

بسم الله الرحمن الرحيم

حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)

مؤلف:

محمد هاشم اعتمادزاده

عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی - واحد سبزوار

فهرست مطالب

مقدمه	۵
فصل یکم: ماتریس و دترمینان	۷
۱- ماتریس ها	۷
جمع دو ماتریس	۹
ضرب دو ماتریس	۱۰
چند خاصیت جبری ماتریس ها	۱۲
۲- دترمینان ماتریس مربع	۱۳
دترمینان ماتریس 2×2	۱۳
دترمینان ماتریس 3×3	۱۴
روش ساروس برای دترمینان 3×3	۱۵
خواص دترمینان	۱۵
۳- معکوس يك ماتریس مربع	۱۷
معکوس ماتریس 2×2	۱۷
معکوس ماتریس 3×3	۱۸
۴- تمرین	۱۹
فصل دوم: حل دستگاه معادلات خطی	۲۳
۱- دستگاه معادلات خطی	۲۳
۲- حل دستگاه مربع به روش ماتریسی	۲۴
۳- حل دستگاه به روش کرامر	۲۵
۴- حل دستگاه به روش حذفی گاوس	۲۷
۵- تمرین	۳۱
فصل سوم: معادلات پارامتری و مختصات قطبی	۳۳
۱- معادلات پارامتری	۳۳
مشتق معادلات پارامتری	۳۵
طول منحنی	۳۶

۳۷	۲ - مختصات قطبی.....
۳۸	منحنی های قطبی.....
۴۱	مساحت ناحیه در مختصات قطبی.....
۴۳	۳-تمرین.....
۴۵	فصل چهارم: توابع برداری.....
۴۵	۱- بردارها در فضا.....
۴۵	مختصات قائم سه بعدی.....
۴۶	اعمال جبری روی بردارها.....
۴۷	ضرب نقطه ای دو بردار.....
۴۸	ضرب خارجی.....
۴۹	۲- معادله خط و صفحه در فضا.....
۴۹	معادله خط در فضا.....
۵۱	معادله صفحه در فضا.....
۵۲	۳- چند سطح (رویه) در فضا.....
۵۲	سطح استوانه ای.....
۵۳	رویه های درجه دوم.....
۵۵	۴- توابع برداری.....
۵۷	مشتق توابع برداری.....
۵۹	طول قوس منحنی.....
۵۹	انحناء یک منحنی در فضا.....
۶۱	سرعت و شتاب یک ذره.....
۶۱	۵- تمرینات.....
۶۵	فصل پنجم: حد و پیوستگی توابع دو متغیره.....
۶۵	۱- توابع چند متغیره.....
۶۵	توابع دو متغیره.....
۶۷	توابع سه متغیره.....
۶۸	۲- حد و پیوستگی توابع دو متغیره.....
۶۹	پیوستگی.....
۷۰	۳- تمرینات.....

فصل ششم: مشتق توابع چند متغیره ۷۳

۱- مشتقات جزئی ۷۳

مشتقات جزئی مراتب بالاتر ۷۴

۲- صفحه مماس بر سطح و قاعده زنجیری ۷۵

قاعده زنجیری ۷۶ ۷۶

مشتق گیری ضمنی ۷۸

۳- بردار گرادیان و مشتق جهتی ۷۹

تعبیر هندسی ∇f دو بعدی ۷۹

تعبیر هندسی ∇f سه بعدی ۸۱

مشتق جهتی ۸۱

۴- تمرینات ۸۳

فصل هفتم: تعیین اکسترم‌های توابع دو متغیره ۸۷

۱- تعیین اکسترم‌ها ۸۷

آزمون تعیین اکسترم‌های نسبی ۸۸

اکسترم مطلق روی ناحیه بسته ۹۱

۲- روش ضرایب لاگرانژ ۹۲

۳- تمرینات ۹۴

فصل هشتم: انتگرال چندگانه ۹۷

۱- انتگرال دوگانه ۹۷

انتگرال مکرر ۹۸

انتگرال دوگانه روی ناحیه‌های دیگر ۹۹

انتگرال گیری در مختصات قطبی ۱۰۲

جرم یک ناحیه در صفحه ۱۰۳

۲- انتگرال سه گانه ۱۰۴

انتگرال سه گانه روی ناحیه‌های دیگر ۱۰۵

جرم یک جسم در فضا ۱۰۸

انتگرال سه گانه در مختصات استوانه‌ای ۱۰۸

مختصات کروی ۱۱۰

انتگرال سه گانه در مختصات کروی ۱۱۲

۱۱۳	۳- تغییر متغیر در انتگرال دوگانه.....
۱۱۵	۴- تمرینات
۱۱۹	فصل نهم: میدان برداری و انتگرال خطی
۱۱۹	۱- میدان‌های برداری.....
۱۱۹	میدان‌های پایستار.....
۱۲۲	۲- انتگرال خط.....
۱۲۲	انتگرال خط نسبت به طول قوس.....
۱۲۲	جرم یک سیم نازک.....
۱۲۳	انتگرال خط روی مسیر
۱۲۴	انتگرال خط میدان برداری.....
۱۲۵	تعبیر فیزیکی انتگرال خط.....
۱۲۶	قضیه اساسی انتگرال خط.....
۱۲۸	۳- تمرینات.....
۱۳۱	فصل دهم: سه قضیه مهم و انتگرال روی سطح
۱۳۱	۱- قضیه گرین.....
۱۳۳	۲- انتگرال روی سطح.....
۱۳۳	مساحت یک سطح در فضا.....
۱۳۴	انتگرال سطحی تابع اسکالر f
۱۳۵	جرم یک سطح در فضا
۱۳۵	انتگرال سطحی میدان F
۱۳۶	تعبیر فیزیکی $\iint_S F \cdot dS$
۱۳۷	۳- قضیه استوکس
۱۳۸	۴- قضیه دیورژانس (واگرایی)
۱۳۸	تعبیر فیزیکی $\text{div} F$
۱۳۹	۵- تمرینات
۱۴۳	پنج قضیه مهم در انتگرال
۱۴۵	منابع.....

مقدمه

این کتاب برای دانشجویان فنی و مهندسی با توجه به سرفصل درس ریاضی (۲) تدوین شده و بحث اصلی آن مشتق و انتگرال توابع چند متغیره است. دو فصل اول ماتریسها و دستگاههای خطی هستند که در بعضی از فصلهای بعدی استفاده می شوند. یادگیری ریاضی باید همراه با حل تمرین باشد که در آخر هر فصل آمده و بیشتر آنها محاسباتی و تعداد کمی اثباتی هستند. از تمام عزیزانی که در تهیه و انتشار کتاب به هر نوعی نقش داشته تشکر و قدردانی می کنم. و امید است که مفید برای دانشجویان و مورد عنایت و رضایت حق تعالی باشید.

ان شاء الله

محمد هاشم اعتمادزاده

مهر ۱۴۰۴

فصل یکم

ماتریس و دترمینان

در هر جایی که ترتیبی خاص از اشیاء (اعداد) مطرح باشد، می توان نمایش آن را به صورت ماتریس بیان کرد. ماتریس ها در علوم مختلف از جمله در خود ریاضیات کاربرد دارند. در فصل بعدی یکی از کاربردهای آن برای حل دستگاه خطی بیان می گردد.

۱- ماتریس ها

آرایشی شامل m سطر و n ستون از اشیاء را یک ماتریس $m \times n$ می نامند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ماتریس A را با علامت $A = [a_{ij}]$ نیز نشان می دهند، هر a_{ij} یک "درآیه یا عنصر" ماتریس A نام دارد.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ یک ماتریس 2×3 است.

در این ماتریس $a_{11} = 2$ ، $a_{23} = 6$ ، $a_{12} = -1$ به طور کلی a_{ij} عنصری است که در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ ماتریسی سطری و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ یک ماتریسی ستونی است.

مثال: اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ و $a_{ij} = 2i - 3j$ ، اعضای ماتریس A را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف. هرگاه درآیه‌های نظیر به نظیر دو ماتریس یکسان باشند. آن دو ماتریس را مساوی می‌نامند.

$$\text{مثال: اگر } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & c \\ 0 & k \end{bmatrix} \text{ در این صورت: } \begin{cases} c = -1 \\ k = 4 \end{cases}$$

ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن برابر باشد، ($n=m$) "ماتریس مربع" نام دارد. ماتریس مربع زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

اعضای روی خط ممتد را "قطر اصلی" و اعضای روی خط چین را "قطر فرعی" ماتریس می‌نامند. اگر در یک ماتریس مربع، اعضای خارج از قطر اصلی صفر باشند، آن را "ماتریس قطری" می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هرگاه در یک ماتریس قطری تمام اعضای روی قطر اصلی یک باشند، آن را "ماتریس یکه (واحد)" می‌نامند و با I_n نمایش می‌دهند.

مثال: ماتریس‌های یکه 2×2 و 3×3 در ذیل نشان داده شده‌اند:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هرگاه تمام درآیه‌های ماتریس صفر باشند. آن را "ماتریس صفر" می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هرگاه جای سطرها و ستون‌ها را در ماتریس A عوض کنیم، ماتریس حاصل را "ترانپوز (تراسپوز)" ماتریس A می‌نامند و با علامت A^T نشان می‌دهند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

هرگاه $A = A^T$ ، ماتریس A را "متقارن" می‌نامند، به عبارت دیگر: $a_{ij} = a_{ji}$.

مثال: ماتریس‌های ذیل متقارن هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

هرگاه $A = -A^T$ ، ماتریس A را "شبه متقارن" می‌نامند، به عبارت دیگر: $a_{ij} = -a_{ji}$.

مثال: ماتریس‌های ذیل شبه متقارن هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

هرگاه اعضای زیر قطر اصلی ماتریس مربع A صفر باشند. ماتریس A را "بالا مثلثی" و هرگاه اعضای بالای قطر اصلی صفر باشند. ماتریس A را "پایین مثلثی" می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{بالا مثلثی}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{پایین مثلثی}$$

در یک ماتریس مربع A ، مجموع عناصر روی قطر اصلی را "اثر ماتریس" می‌نامند و با علامت $Tr(A)$ نشان می‌دهند.

$$\text{مثال: در ماتریس } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ داریم:}$$

$$Tr(A) = 0 + 2 + (-3) = -1$$

جمع دو ماتریس

برای جمع دو ماتریس، درآیه‌های نظیر به نظیر را با هم جمع می‌کنیم. (ابعاد دو ماتریس باید یکسان باشند).

مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & -5 \end{bmatrix}$$

تفاضل دو ماتریس

برای تفاضل دو ماتریس، درآیه‌های نظیر به نظیر را از هم کم می‌کنیم. (ابعاد دو ماتریس باید یکسان باشند.)

مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در ماتریس

برای ضرب یک عدد در ماتریس، عدد را در تمامی درآیه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم.

$$2 \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad -3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -6 & 12 & -3 \end{bmatrix}$$

ضرب دو ماتریس

برای ضرب ماتریس A در ماتریس B ، سطریهای ماتریس A را در ستونیهای ماتریس B ضرب می‌کنیم. این تعریف ایجاب می‌کند که تعداد ستونیهای A برابر با تعداد سطریهای B باشد. به عبارت دیگر، باید $A_{n \times p}$ و $B_{p \times m}$ باشند.

$$\text{مثال: حاصل ضرب } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \text{ را بیابید.}$$

$$c_{11} = [2, 0] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \times 1 + 0 \times 2 = 2$$

$$c_{12} = [2, 0] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \times 0 + 0 \times 4 = 0$$

$$c_{13} = [2, 0] \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \times 2 + 0 \times -1 = 4$$

$$c_{21} = [1, 4] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \times 1 + 4 \times 2 = 9$$

$$c_{22} = [1, 4] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \times 0 + 4 \times 4 = 16$$

$$c_{23} = [1, 4] \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \times 2 + 4 \times -1 = -2$$

پس:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 9 & 16 & -2 \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، حاصل ضرب‌های $A \times B$ و $B \times A$ را محاسبه کنید.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

در این مثال، دیده می‌شود: $A \times B \neq B \times A$

مثال: در صورت ضرب‌پذیر بودن، ضرب‌های ذیل را انجام دهید.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \text{ضرب‌پذیر نیست}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ موارد ذیل را محاسبه کنید.

$$2I_2 + A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2A + 3B = 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A - 3B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$$

$$2A \times 3B = 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \times 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 24 \\ 66 & -36 \end{bmatrix}$$

$$(A+I) \times (B-I) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 15 & -12 \end{bmatrix}$$

چند خاصیت جبری ماتریس‌ها

$$A + [0] = A$$

$$A \times [0] = [0]$$

$$A + B = B + A$$

$$A \times I = I \times A = A \quad (A \text{ مربع است})$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

می‌دانیم در اعداد حقیقی، از تساوی $ab = 0$ نتیجه می‌شود: $a = 0$ یا $b = 0$ اما در ماتریس‌ها، این خاصیت برقرار نیست. به مثال ذیل توجه کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0]$$

دو ماتریس سمت چپ مخالف صفر هستند، ولی حاصل ضرب آنها صفر شده است.

در اعداد حقیقی خاصیت حذف داریم، به عبارت دیگر، اگر $a \neq 0$

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

اما این خاصیت در ماتریس‌ها برقرار نیست، مثلاً اگر

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با محاسبه بررسی کنید که $A \times B = A \times C$ ولی $B \neq C$ است.

اگر A یک ماتریس مربع باشد، توان‌های A به صورت ذیل می‌باشند:

$$A^1 = A \times A$$

$$A^2 = A^1 \times A$$

$\vdots$

$$A^n = A^{n-1} \times A$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، A^2 و A^3 را محاسبه کنید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 0 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، A^{52} را به دست آورید.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}$$

با این محاسبات می توان حدس زد:

$$A^{52} = \begin{bmatrix} 2^{52} & 0 \\ 0 & 2^{52} \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^{75} را به دست آورید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \times A = I \times A = A$$

$$A^4 = A^3 \times A = I \times I = I$$

⋮

$$A^{75} = A$$

۲- دترمینان ماتریس مربع

دترمینان یک ماتریس مربع A ، مقدار عددی است که به صورت ذیل نشان داده می شود:

$$|A| \quad \text{یا} \quad \det(A)$$

دترمینان ماتریس 2×2

دترمینان ماتریس 2×2 برابر است با حاصل ضرب قطر اصلی، منهای حاصل ضرب قطر فرعی

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

به مثال های زیر توجه کنید:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - (2 \times 4) = -5$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times -2 - (1 \times 2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \times 4 - (2 \times -3) = 6$$

همان طور که دیده می شود، مقدار دترمینان می تواند مثبت، منفی و یا صفر شود.

دترمینان ماتریس ۳×۳

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

از حذف سطر اول و ستون اول، زیر دترمینان $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ حاصل می شود.

A_1 را "دترمینان کهاد (فرعی) عنصر a_{11} " و عبارت $A_1^{1+1}(-1)$ را "همسازه عنصر a_{11} " می نامند. به طور مشابه، A_{23} دترمینانی است که از حذف سطر دوم و ستون سوم ماتریس A حاصل می شود.

$$A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{دترمینان کهاد عنصر } a_{23}$$

$$(-1)^{2+3} A_{23} = -A_{23} \quad \text{همسازه عنصر } a_{23}$$

به راحتی دیده می شود که ماتریس ۳×۳ نه همسازه دارد. فرمول محاسبه دترمینان ۳×۳ به روش بسط، (روی سطر اول) در ذیل آمده است.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} A_{13}$$

دترمینان های زیر، با روش بسط (روی سطر اول) بدست آمده اند.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + -3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1) + -3(2) + 4(1) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4) + 1(6) + -3(2) = 8$$

به طور مشابه، می توان دترمینان ۳×۳ را به روش بسط روی سطر دوم یا سوم محاسبه کرد. همچنین می توان دترمینان را با بسط روی ستون های ماتریس نیز به دست آورد.

مثال: دترمینان $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ را به روش بسط (روی سطر سوم) به دست آورید.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + -1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-3) + -1(-6) + 0(-3) = 0$$

نکته. مقدار دترمینان يك ماتریس با بسط روی هر سطر یا هر ستون، یکسان به دست می آید.

دترمینان ماتریس $n \times n$

روش محاسبه‌ی دترمینان $n \times n$ همانند محاسبه‌ی دترمینان 3×3 است. دترمینان ذیل با روش بسط (روی سطر اول) محاسبه شده است.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + -3 \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + -2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4) + -3(6) + 0(-2) + -2(1) = -12$$

برای محاسبه سریع تر دترمینان، بهتر است سطر یا ستونی را انتخاب کنیم که صفر بیشتر دارد.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4(5) = -20$$

روش ساروس برای دترمینان 3×3

در این روش دو ستون اول را تکرار و بعد مجموع حاصل ضرب قطره‌های اصلی را از مجموع حاصل ضرب قطره‌های فرعی کم می‌کنیم.

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ را حساب کنید.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = [(1 \times 0 \times 5) + (-1 \times 4 \times -1) + (2 \times 3 \times 2)]$$

$$- [(-1 \times 3 \times 5) + (1 \times 4 \times 2) + (2 \times 0 \times -1)]$$

$$= (0 + 4 + 12) - (-15 + 8 + 0) = 23$$

خواص دترمینان

۱- اگر تمامی عناصر يك سطر، صفر باشند، مقدار دترمینان صفر است: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$

۲- اگر يك سطر ، مضربى از سطر ديگر باشد، مقدار دترمینان صفر است:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

سطر چهارم دو برابر سطر دوم است:

از این خاصیت نتیجه می شود که اگر دو سطر برابر باشند، دترمینان صفر است:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۳- اگر در دترمینان جای دو سطر را عوض کنیم ، مقدار دترمینان در يك منفي ضرب می شود:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

۴- اگر ماتریس مثلثی باشد، دترمینان آن برابر است با حاصل ضرب قطر اصلی:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times -3 \times 7 = -21$$

۵- اگر مضربى از يك سطر را به سطر ديگراضافه کنیم ،مقدار دترمینان ثابت می ماند:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 10 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

دو برابر سطر اول به سطر دوم اضافه شده است.

$$2(1, 2, 3) + (-1, 2, 4) = (2, 4, 6) + (-1, 2, 4) = (1, 6, 10)$$

۶- دترمینان ماتریس، با دترمینان ترانهاده آن برابر است.

$$|A| = |A^T|$$

۷- برای ضرب عدد در يك دترمینان، عدد را در يك سطر (دلخواه) ضرب می کنیم:

$$-2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \\ -6 & -4 & -2 \end{vmatrix}$$

عدد ۲- در سطر سوم ضرب شده است.

۸- اگر A و B دو ماتریس مربع باشند، داریم:

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

۹- اگر يك سطر بر حسب چند سطر ديگر باشد، مقدار دترمینان برابر با صفر است:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

سطر چهارم، مجموع سطر اول و دوم است.

چند نکته.

الف) در تمامی خواص بالا، اگر به جای کلمه «سطر» کلمه «ستون» را قرار دهیم، باز هم این خواص برقرارند.

ب) با استفاده از این خواص، می توان هر دترمینانی را مثلی نمود.

ج) هرگاه ابعاد دترمینان بزرگ باشد، با خواص دترمینان سریع تر محاسبه می گردد.

۳- معکوس يك ماتریس مربع

تعریف. فرض کنیم A يك ماتریس مربع $n \times n$ باشد، ماتریس B را معکوس A می نامند، هرگاه:

$$A \times B = B \times A = I_n$$

اگر B را با A^{-1} نشان دهیم، داریم:

$$A^{-1} \times A = I_n$$

در اعداد حقیقی، هر عدد مخالف صفر، معکوس پذیر است. در ماتریس ها، شرط لازم و کافی برای اینکه A معکوس پذیر باشد این است که $|A| \neq 0$ باشد.

محاسبه A^{-1}

معکوس ماتریس 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{اگر} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{بنا به فرمول:}$$

(جای عناصر قطر اصلی عوض شده و قطر فرعی در منفي ضرب شده است.)

مثال: معکوس ماتریس های ذیل را بیابید.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

حل:

$$|A| = -14 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{4}{14} & \frac{-2}{14} \end{bmatrix}$$

$$|B| = 1 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس C معکوس پذیر نیست: $|C| = 0$

معکوس ماتریس 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{اگر} \quad \text{معکوس ماتریس } A \text{ با فرمول} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A \quad \text{تعریف می شود. که در آن } \text{adj}A$$

ماتریس "الحاقی" A نام دارد و به صورت ذیل است:

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

A_{ij} دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A به دست می آید.

$$\text{مثال: معکوس ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ را به دست آورید.}$$

$$|A| = -18$$

حل:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 \quad -A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$-A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10 \quad -A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad -A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{-18} \begin{bmatrix} -8 & -4 & 5 \\ 2 & 10 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-18} \begin{bmatrix} -8 & 2 & -4 \\ -4 & 10 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس $n \times n$

در حالت $n \times n$ ، فرمول معکوس A ، مانند فرمول 3×3 است: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A$ ، ترانهاد ماتریس همسازهای A

می باشد. (شبه 3×3)

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ عنصر a_{33} را در ماتریس A^{-1} بیابید.

حل: با توجه به فرمول A^{-1} داریم:

$$a_{33} = \frac{-A_{32}}{|A|}$$

$$|A| = -1, \quad -A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$a_{33} = \frac{-5}{-1} = 5$$

چند خاصیت

(الف) $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

(ب) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

(ج) $(I_n)^{-1} = I_n$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، دترمینان $|A^{-1}|$ را بیابید.

حل: $|A| = 8$ ، بنا به خاصیت:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{8}$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، مطلوب است A^{-2}

حل:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-2} = A^{-1} \times A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴-تمرین

۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، موارد ذیل را محاسبه کنید.

(ب) $2A - 4B$

(الف) $A + B$

(د) $B \times (A - B)$

(ج) $3A^T + B$

۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ موارد ذیل را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $A \times B$ ب) $B \times A$
 ج) A^T د) $A \times (A - 2B)$
 ۳- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ موارد ذیل را محاسبه کنید.
 الف) $B \times A$ ب) $A - 4I_3$
 ج) $Tr(A^T)$ د) $A - B + 3I_3$

۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^{40} را به دست آورید.

۵- اگر $A^3 = A$ ، ماتریس A^{100} را بیابید.

۶- آیا اتحاد $A^T - B^T = (A - B) \times (A + B)$ برای ماتریس‌ها برقرار است؟

۷- دترمینان‌های ذیل را بیابید. (روش بسط)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

۸- دترمینان‌های 3×3 تمرین قبل را به روش ساروس بیابید.

۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $A \times B$ را بیابید.

۱۰- مقدار x را طوری بیابید که دترمینان ذیل صفر شود.

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

۱۱- با يك مثال، نشان دهید، تساوي $|A+B| = |A| + |B|$ همواره برقرار نیست.

۱۲- معکوس ماتریس های ذیل را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

۱۳- ماتریس B را طوری بیابید که

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۴- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^{-3} را بیابید.

۱۵- معکوس ماتریس های ذیل را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۱۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ ، درآیه a_{12} را در ماتریس A^{-1} بیابید.

فصل دوم

حل دستگاه معادلات خطي

در هر جا که تعدادي معادله خطي با تعدادي مجهول داشته باشیم، دستگاه معادلات خطي تشکیل می شود. یافتن نقطه ی برخورد دو خط و یا نقاط برخورد دو صفحه از موارد کاربرد دستگاه ها هستند.

۱- دستگاه معادلات خطي

يك دستگاه معادلات خطي m معادله و n مجهول به این صورت است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

در این دستگاه، x_i ها مجهول های دستگاه، a_{ij} ها ضرایب دستگاه و b_i ها اعداد ثابت دستگاه می باشند. هرگاه $x_1, \dots, x_n$ در تمامی معادلات دستگاه صدق کنند. $x_1, \dots, x_n$ را "جواب دستگاه" می نامند.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{دستگاه دو معادله و سه مجهول:}$$

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + y + 4z = 1 \\ -x + y + 5z = 2 \end{cases} \quad \text{دستگاه مربع سه معادله و سه مجهول:}$$

توجه: دستگاهي که تمام b_i ها صفر باشند، "دستگاه همگن" نام دارد.

جواب هاي يك دستگاه معادلات خطي به يکي از حالات ذیل است:

الف) دستگاه يك جواب منحصر به فرد دارد.

ب) دستگاه جواب ندارد. (دستگاه ناسازگار)

ج) دستگاه بي نهایت جواب دارد.

۲- حل دستگاه مربع به روش ماتریسی

دستگاه مربع زیر مفروض است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

به این دستگاه یک ماتریس نسبت می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس ضرایب دستگاه}$$

$$\text{اگر } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ ماتریس مجهول‌ها و } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ ماتریس اعداد ثابت دستگاه باشند، داریم:}$$

$$A \times X = B$$

طرفین را در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \quad (|A| \neq 0)$$

$$I \times X = A^{-1} \times B$$

$$X = A^{-1} \times B$$

بنابراین اگر دستگاه مربع و دترمینان ضرایب دستگاه مخالف صفر باشد، فرمول حل دستگاه به روش ماتریسی، به صورت زیر است:

$$X = A^{-1} \times B$$

مثال: دستگاه $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$ را به روش ماتریسی حل کنید.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \times B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \text{دستگاه يك جواب دارد.}$$

مثال: دستگاه $\begin{cases} -2x + y = 4 \\ x - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$ را به روش ماتریسی حل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{دستگاه از این روش حل نمی‌شود.}$$

مثال: دستگاه زیر را به روش ماتریسی حل کنید.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{دستگاه يك جواب دارد.}$$

۳- حل دستگاه به روش کرامر

در این روش نیز باید دستگاه مربع و دترمینان ضرایب دستگاه، مخالف صفر باشد. ($|A| \neq 0$) فرمول روش کرامر به صورت ذیل است:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n$$

A ماتریس ضرایب دستگاه و A_i ماتریسی است که از تعویض ستون i ام ماتریس A با اعداد ثابت دستگاه حاصل می‌شود.

مثال: دستگاه زیر را به روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} -x + 3y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{2}{-5}, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-6}{-5} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases} \text{ دستگاه یک جواب دارد.}$$

مثال: دستگاه داده شده را به روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + 10y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$$

حل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 46$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 92, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -46$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{92}{46} = 2, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{0}{46} = 0, \quad z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-46}{46} = -1$$

دستگاه یک جواب دارد.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

نکته. در يك دستگاه مربع، هرگاه $|A| \neq 0$ باشد، دستگاه يك جواب منحصر به فرد دارد و اگر $|A| = 0$ باشد، دستگاه بي نهایت

جواب و يا بدون جواب است.

مثال. مقدار a را طوری بیابید که دستگاه ذیل ناسازگار باشد. (بدون جواب)

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -6x + ay = 5 \end{cases}$$

حل: باید: $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a - 18 = 0 \Rightarrow a = 9$$

مثال: به ازای چه مقدار a ، دستگاه $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ فقط یک جواب بدیهی دارد.

حل: یک جواب بدیهی دستگاه $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ است. اگر $|A| \neq 0$ ، این تنها جواب دستگاه خواهد بود.

$$|A| \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$2 - 4a \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{1}{2}$$

۴- حل دستگاه به روش حذفی گاوس

در روش حذفی گاوس، مجهول‌ها را طوری حذف می‌کنیم که دستگاه، بالا مثلثی شود و بعد مجهول‌ها را یک به یک به دست می‌آوریم. اگر دستگاه مربع نباشد با افزودن صفرهای مناسب، دستگاه را مربع می‌کنیم. هیچ محدودیتی برای حل دستگاه در این روش وجود ندارد. مثال. دستگاه‌های داده شده را به روش حذفی حل کنید:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 2x - 6y = 3 \end{cases} \quad \text{ب)} & \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad \text{الف)} \\ &\begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \quad \text{ج)} \end{aligned}$$

حل الف) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 0 + 5y = 1 \end{cases} \quad \text{دستگاه مثلثی است.}$$

$$5y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{5}, \quad x - 2y = 1 \Rightarrow x - 2\left(\frac{1}{5}\right) = 1 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$$

$$\begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \text{دستگاه یک جواب دارد.}$$

حل ب)

$$\textcircled{2} \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 2x - 6y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 0 + 0 = 3 \end{cases} \quad \text{دستگاه مثلثی است.}$$

در معادله‌ی آخر $0 = 3$ ، بنا به این تناقض، دستگاه جواب ندارد.

حل ج)

$$\textcircled{1} \begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases} \quad \text{دستگاه مثلثی است.}$$

این دستگاه، یک معادله و دو مجهول دارد، یکی از مجهول‌ها را دلخواه می‌گیریم.

دلخواه $x = k$

$$-2x + 4y = 6 \Rightarrow -2k + 4y = 6 \Rightarrow y = \frac{3+k}{2}$$

$$\begin{cases} x = k \\ y = \frac{3+k}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.}$$

مثال. دستگاه‌های داده شده را به روش حذفی حل کنید.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ z + y + 2x = -1 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -2x + y - z = 4 \end{cases} \quad \text{ب)}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y - 4z = 0 \\ x + y - 3z = 8 \end{cases} \quad \text{ج)}$$

حل الف)

$$\textcircled{1} \textcircled{-2} \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \textcircled{-1} \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 0 + 3y - 3z = -3 \\ 0 + y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 0 + 3y - 3z = -3 \\ 0 + 0 + 3z = 6 \end{cases} \Rightarrow z = 2 \quad \text{دستگاه مثلثی است.}$$

$$\begin{aligned} 3y - 3(2) &= -3 \Rightarrow y = 1 \\ x - (1) + 2(2) &= 1 \Rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{دستگاه یک جواب دارد.}$$

حل ب)

$$(2) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -2x + y - z = 4 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 0 - y + 3z = 6 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases} \quad \text{دستگاه مثلثی است.}$$

دلخواه $z = k$

$$-y + 3k = 6 \Rightarrow y = 3k - 6$$

$$x - y + 2z = 1 \Rightarrow x - (3k - 6) + 2k = 1 \Rightarrow x = k - 5$$

$$\begin{cases} z = k \\ y = 3k - 6 \\ x = k - 5 \end{cases} \quad k \in R \quad \text{دستگاه بی نهایت جواب دارد.}$$

حل ج) جای سطر اول و دوم را عوض می کنیم.

$$(1)(2) \begin{cases} -x + 2y - 4z = 0 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y - 3z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y - 4z = 0 \\ 0 + 3y - 7z = 5 \\ 0 + 3y - 7z = 8 \end{cases}$$

دستگاه در گام بعدی مثلثی می شود ولی دیده می شود که سطر دوم و سوم باهم ایجاد تناقض می کنند.

$$5 = 3y - 7z = 8 \Rightarrow 5 = 8$$

بنا به این تناقض دستگاه جواب ندارد.

مثال: دستگاه های زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ x + y = 0 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

حل: با افزودن یک ستون صفر دستگاه مربع می شود. ولی برای سادگی یک دستگاه مربع از داخل آن انتخاب و سپس جواب را در

معادله ی باقی مانده قرار می دهیم.

$$(1) \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 0 + 3y = 4 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

جواب را در معادله سوم قرار می دهیم ولی در معادله صدق نمی کند.

$$3x - y = 1 \Rightarrow 3\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right) \neq 1 \quad \text{دستگاه جواب ندارد.}$$

$$(ب) \quad \begin{cases} -x + y = 2 \\ 3x - y = 0 \\ -2x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$$

حل: یک دستگاه دو معادله و دو مجهول انتخاب می کنیم.

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

جواب در معادله ی سوم برقرار است:

$$-2x + 2y = -2(1) + 2(3) = 4$$

جواب را در معادله ی چهارم قرار می دهیم ولی در معادله صدق نمی کند.

$$3x + 4y = 3(1) + 4(3) \neq 0 \quad \text{دستگاه جواب ندارد.}$$

مثال: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} -x + y - z + 2t = 2 \\ x - y + 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

حل: دستگاه را به مربع تبدیل می کنیم.

دستگاه مثلثی شد.

$$() \rightarrow \begin{cases} -x + y - z + 2t = 2 \\ x - y + 2z + 3t = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - z + 2t = 2 \\ 0 + 0 + z + 5t = 2 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

$$t = k_1 \quad \text{دلخواه}$$

پس: $z = 2 - 5k_1$ با جایگذاری در معادله اول داریم:

$$\begin{aligned} -x + y &= 2 + (2 - 5k_1) - 2k_1 \\ -x + y &= -vk_1 + 4 \end{aligned}$$

یک معادله و دو مجهول داریم، یکی از این دو را دلخواه می گیریم:

$$y = -vk_1 + k_2 + 4 \quad \text{و} \quad x = k_2$$

بنابراین:

$$\begin{cases} x = k_2 \\ y = -vk_1 + k_2 + 4 \\ z = 2 - 5k_1 \\ t = k_1 \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad \text{دستگاه بی نهایت جواب دارد.}$$

مثال: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ y - 2z + t = 4 \\ x - 3y + 3z = 1 \\ -y + 2z = 4 \end{cases}$$

حل:

$$(-1) \begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ 0 + y - 2z + t = 4 \\ x - 3y + 3z + 0 = 1 \\ 0 - y + 2z + 0 = 4 \end{cases}$$

$$(1)(2) \begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ 0 + y - 2z + t = 4 \\ 0 - 2y + 2z + t = 0 \\ 0 - y + 2z + 0 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ 0 + y - 2z + t = 4 \\ 0 + 0 - 2z + 3t = 8 \\ 0 + 0 + 0 + t = 8 \Rightarrow t = 8 \end{cases} \quad \text{دستگاه مثلثی شد.}$$

$$-2z + 3t = 8 \Rightarrow -2z + 24 = 8 \Rightarrow z = 8 \quad \text{از معادله سوم داریم:}$$

$$y - 2z + t = 4 \Rightarrow y - 16 + 8 = 4 \Rightarrow y = 12 \quad \text{از معادله دوم داریم:}$$

$$x - y + z - t = 1 \Rightarrow x - 12 + 8 - 8 = 1 \Rightarrow x = 13 \quad \text{و از معادله اول داریم:}$$

$$\begin{cases} x = 13 \\ y = 12 \\ z = 8 \\ t = 8 \end{cases} \quad \text{دستگاه یک جواب دارد.}$$

۵-تمرین

۱- دستگاه‌های ذیل را به روش ماتریسی حل کنید.

$$(ب) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$(الف) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$(د) \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2z = 0 \\ y - z = -2 \end{cases}$$

$$(ج) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

۲- دستگاه‌های تمرین قبل را به روش کرامر حل کنید.

۳- دستگاه همگن ذیل را حل کنید.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

۴- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ ، با استفاده از دستگاه‌ها، ماتریسی مانند B بیابید به طوری که $A \times B = C$

۵- مقدار a را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + ay = 4 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۶- a را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$ جواب‌های غیر بدیهی داشته باشد.

۷- دستگاه‌های ذیل را به روش حذفی حل کنید.

(الف) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 6x - y = 0 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ -8y + 4x = 7 \end{cases}$

(ج) $\begin{cases} -x - y = 2 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases}$ (د) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - y = 2 \\ 2x + \frac{2}{3}y = -4 \end{cases}$

۸- دستگاه‌های داده شده را به روش حذفی حل کنید.

(الف) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x - 2y = 1 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 3x - y + 4z = -1 \end{cases}$

(ج) $\begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ x + 4y - z = 0 \end{cases}$ (د) $\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 2x + y + 2z + t = 1 \\ 3x - 4y + 2t = -2 \end{cases}$

۹- دستگاه‌های ذیل را حل کنید.

(الف) $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ 2x + z + t = 0 \end{cases}$

(ج) $\begin{cases} x - y + z + t = 4 \\ 2x + y + 2z + t = 0 \\ -x - 2y + t = 1 \\ y + 2z + 2t = 0 \end{cases}$

۱۰- نقطه‌ی برخورد دو خط $2x + y = 4$ و $-x + 2y = 1$ را تعیین کنید.

۱۱- نقطه‌ی برخورد سه خط $y - x = 1$ ، $y = 2x$ ، و $y + 2x - 4 = 0$ را تعیین کنید.

۱۲- نقاط برخورد دو صفحه $x - y + 4z = 1$ و $-x + 2y + z = 0$ را تعیین کنید.

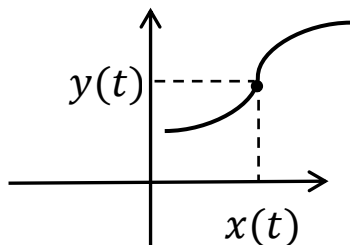
فصل سوم

معادلات پارامتری و مختصات قطبی

معادلات پارامتری یکی از راه های نمایش منحنی ها است، به خصوص مکان یک متحرک (برحسب زمان) با معادلات پارامتری تعیین می شود. از مختصات قطبی برای بعضی از محاسبات مشتق و انتگرال و رسم نمودارهای خاص استفاده می گردد.

۱- معادلات پارامتری

فرض کنیم t عددی حقیقی باشد، عبارت $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ را معادله پارامتری با پارامتر t می نامیم. به هر معادله پارامتری نموداری می توان نسبت داد که از زوج های مرتب $(x(t), y(t))$ تشکیل شده است.



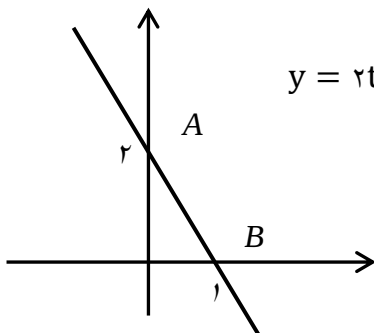
اگر t را زمان محسوب کنیم، معادل پارامتری موقعیت مکان ذره در لحظه t را در صفحه است.

مثال: نمودار معادله پارامتری $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ را رسم کنید.

روش اول: با حذف پارامتر t داریم:

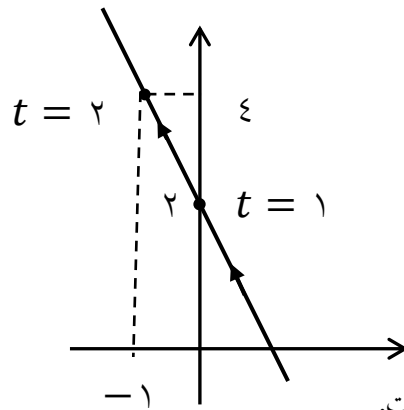
$$y = 2t = 2(1 - x) = 2 - 2x \Rightarrow y = 2 - 2x$$

این خط با دو نقطه دلخواه رسم می شود. $A(0, 2)$, $B(1, 0)$



روش دوم: توجه داریم که $x(t)$ و $y(t)$ بر حسب t هر دو خطی هستند پس باید نمودار آن نیز یک خط در صفحه باشد. این خط با دو نقطه دلخواه رسم می شود.

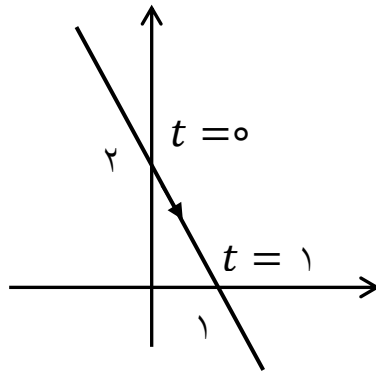
$$t = 1 \rightarrow (0, 2), t = 2 \rightarrow (-1, 4)$$



توجه: جهت یک منحنی پارامتری در جهت افزایش t است.

مثال: معادله پارامتری بیابید که خط $y = 2 - 2x$ (مثال قبل) را رسم کند ولی با جهت مخالف

حل: قرار می‌دهیم: $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$ واضح است که با حذف پارامتر t داریم: $y = 2 - 2x$
 $t = 0 \rightarrow (0, 2), t = 1 \rightarrow (1, 0)$



این دو مثال نشان می‌دهند که یک منحنی در صفحه می‌تواند معادلات پارامتری متفاوتی داشته باشد (بی‌نهایت معادله پارامتری)

مثال: با حذف پارامتر t ، معادلات زیر را در صفحه توصیف کنید.

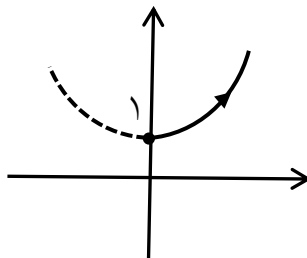
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 + 1 \end{cases} \quad \text{الف}$$

حل: با حل حذف t داریم:

$$y = t^2 + 1 = (t^2) + 1 = x + 1$$

$$y = x + 1, x \geq 0$$

نمودار آن شاخه سمت راست سهمی $y = x^2 + 1$ است.

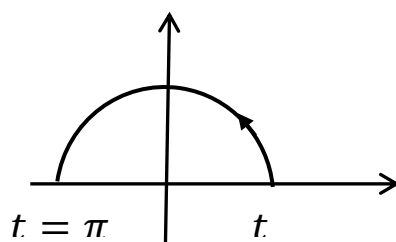


$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi \quad \text{ب}$$

حل:

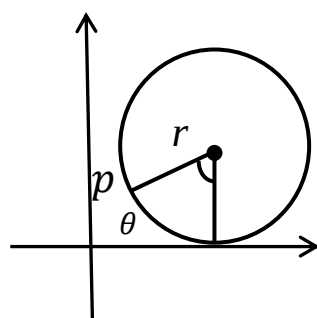
$$x^2 + y^2 = 9 \cos^2 t + 9 \sin^2 t = 9$$

$x^2 + y^2 = 9$ معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۳ است. از اینکه $0 \leq t \leq \pi$ است فقط نیم دایره بالایی رسم می‌شود.



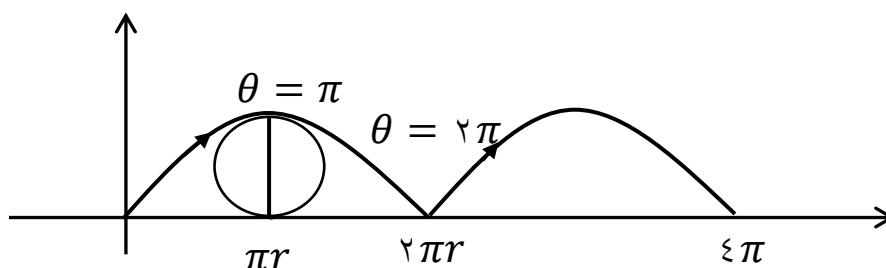
منحنی چرخزاد

دایره‌ای به شعاع r روی سطح افق شروع به غلطیدن می‌کند. اگر P یک نقطه روی این دایره باشد، معادله پارامتری منحنی را که نقطه P طی می‌کند به صورت زیر است.



$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin \theta) \\ y = r(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

این منحنی را **منحنی چرخزاد** می‌نامیم (زاویه θ بر حسب رادیان است).



مشتق معادلات پارامتری

فرض کنیم $x(t)$ و $y(t)$ توابعی مشتق پذیر باشند، با استفاده از قاعده زنجیری به دست می‌آید:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad \text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } (x, y) \text{ است}$$

توجه: برای t ‌هایی که $y'(t) = 0$ منحنی مماس افقی و برای t ‌هایی که $x'(t) = 0$ منحنی مماس قائم دارد (بجز حالت $(\dot{-})$)

اگر $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$y''(x) = (y'(x))' = \frac{(y'(x))'(t)}{x'(t)}$$

مثال: معادله $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$ مفروض است.

(الف) شیب خط مماس بر منحنی پارامتری را در نقطه $t = 2$ را به دست آورید

(ب) در چه نقاطی منحنی شیب افقی و قائم دارد

(ج) معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه $t = 2$ به دست آورید.

(د) جهت تغییر منحنی را در نقطه $t = 2$ بیابید.

حل الف) $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2 - 3}{2} \quad , \quad m = y'(x) \Big|_{t=2} = \frac{9}{2}$

حل ب)

مماس های افقی $y'(t) = 3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t = \pm 1$

منحنی مماس قائم ندارد $x'(t) = 2 \neq 0$

حل ج)

مختصات نقطه روی منحنی $t = 2 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 2 \end{cases}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = \frac{9}{2}(x - 5)$

حل د)

$y'(x) = \frac{3t^2 - 3}{2} = \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}$

$y''(x) = \frac{(y'(x))'(t)}{x'(t)} = \frac{\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}\right)'}{(2t + 1)'} = \frac{3t}{2}$

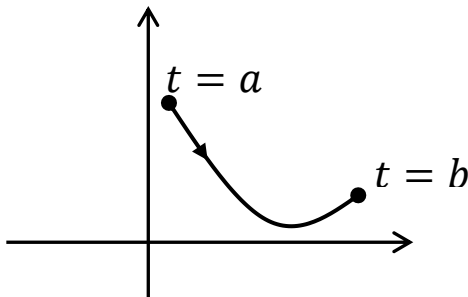
جهت تقعر در $t = 2$ به سمت بالا است. $y''(x) \Big|_{t=2} = \frac{6}{2} = 3 > 0$

طول منحنی

فرض کنیم معادله پارامتری $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$ پیوسته و بدون شکستگی و منحنی آن در این فاصله یک بار طی شود.

طول این منحنی به صورت زیر است.

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$



مثال: طول پاره خط $\begin{cases} x = -t + 3 \\ y = 2t + 1 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2$ را بیابید.

حل:

$$L = \int_1^2 \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_1^2 \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} dt = \int_1^2 \sqrt{5} dt = 2\sqrt{5}$$

روش دیگر استفاده از فرمول فاصله دو نقطه است (انجام دهید)

مثال: طول منحنی $y = x^{\frac{3}{2}}$ را در فاصله $0 \leq x \leq 1$ پیدا کنید.

حل:
$$\begin{cases} x = t \\ y = t^{\frac{3}{2}} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

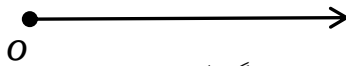
$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_0^1 \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\right)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} dt = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{8}{27} \left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) \end{aligned}$$

مثال: فرمول محیط دایره به شعاع r را پیدا کنید.

حل: معادله $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$ دایره‌ای به شعاع r و مرکز مبدأ است.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} r \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = 2\pi r$$

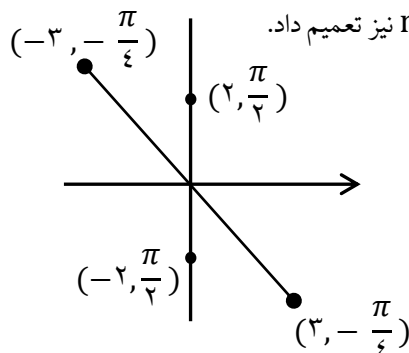
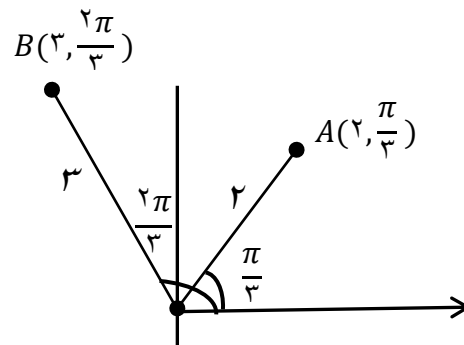
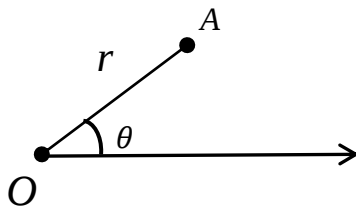
۲- مختصات قطبی



در شکل مقابل نقطه O را مرکز قطب و نیم خط را محور قطب می‌نامیم.

نقطه‌ای A در صفحه با مرکز قطب فاصله r و با محور قطب زاویه θ می‌سازد (در جهت پادساعتگرد)

$A(r, \theta)$ را مختصات قطبی نقطه A می‌نامیم.

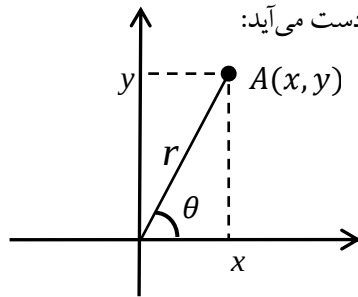


با تعریف $(-r, \theta) \equiv (r, \theta + \pi)$ می‌توان مختصات قطبی را برای $r < 0$ نیز تعمیم داد.

توجه: برای هر θ ، $(0, \theta)$ مرکز قطب است.

$$(-2, \frac{\pi}{4}) \equiv (2, \frac{\pi}{4} + \pi)$$

$$(-3, -\frac{\pi}{4}) \equiv (3, \pi - \frac{\pi}{4})$$



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

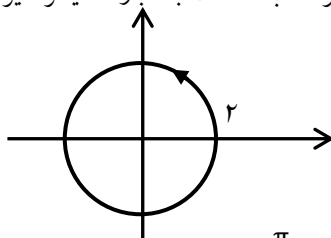
توجه: نقطه (r, θ) در مختصات قطبی بی‌نهایت نمایش دارد.

$$\begin{aligned} (r, \frac{\pi}{3}) &\equiv (r, \frac{\pi}{3} + 2\pi) \\ (r, \frac{\pi}{3}) &\equiv (r, \frac{\pi}{3} - 2\pi) \\ (r, \frac{\pi}{3}) &\equiv (-r, \frac{\pi}{3} + \pi) \\ (r, \frac{\pi}{3}) &\equiv (-r, \frac{\pi}{3} - \pi) \end{aligned}$$

منحنی‌های قطبی

مثال: منحنی $r = 2$ را در مختصات قطبی توصیف کنید.

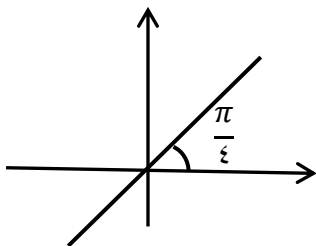
منحنی از نقاط $(2, \theta)$ تشکیل شده است. یعنی تمام نقاطی که فاصله آنها از مرکز قطب ۲ است به عبارت دیگر دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز قطب. از رابطه $x^2 + y^2 = r^2$ و $r = 2$ بدست می‌آید:



$$x^2 + y^2 = 2^2$$

مثال: نمودار $\theta = \frac{\pi}{4}$ را توصیف کنید.

منحنی از نقاط $(r, \frac{\pi}{4})$ تشکیل شده است. یعنی تمام نقاطی که زاویه آنها با محور قطب $\frac{\pi}{4}$ است. به عبارت دیگر خطی است که از محور قطب عبور و با محور قطب زاویه $\frac{\pi}{4}$ می‌سازد. (برای $r < 0$ نیم خط پایینی به دست می‌آید)



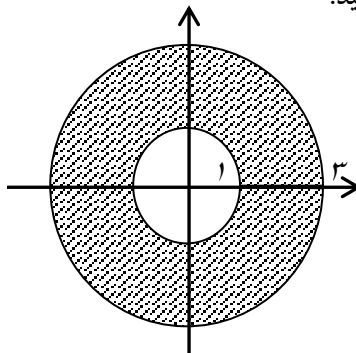
$$\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \tan \theta = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

از رابطه $\tan \theta = \frac{y}{x}$ به دست می‌آید:

$$\frac{y}{x} = 1 \Rightarrow y = x$$

مثال: ناحیه قطبی $1 \leq r \leq 3$ را در صفحه توصیف کنید.

حل: این ناحیه بین دو دایره $r = 1$ و $r = 3$ قرار دارد.



مثال: منحنی $r = 2 \sin \theta$ را به دو روش رسم کنید.

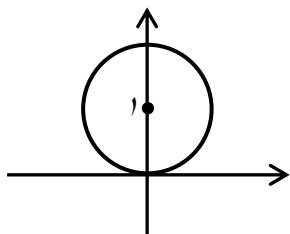
روش اول: ابتدا منحنی را به فرم دکارتی تبدیل و بعد رسم می‌کنیم.

$$r = 2 \sin \theta \Rightarrow r^2 = 2r \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = 2y$$

با مربع‌سازی داریم:

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad , \quad \text{دایره‌ای به مرکز } (0, 1) \text{ و شعاع } 1$$

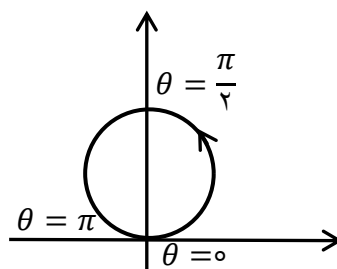


دایره‌ای است که از مبدأ عبور و یکی از محورها را قطع می‌کند.

توجه: نمودار به فرم: $\begin{cases} r = a \sin \theta \\ r = a \cos \theta \end{cases}$ یا

روش دوم: این روش رسم نمودار با نقطه یابی است.

θ	r
۰	۰
$\frac{\pi}{6}$	۱
$\frac{\pi}{2}$	۲
$\frac{5\pi}{6}$	۱
π	۰

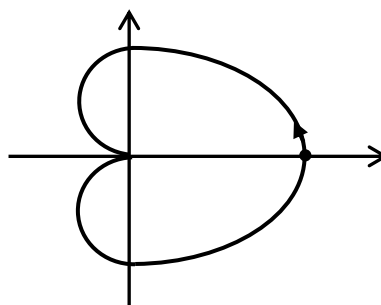


در فاصله $0 \leq \theta \leq \pi$ دایره کامل می‌شود.

مثال: نمودار $r = -1 + \cos \theta$ را رسم کنید.

حل: نمودار را به روش نقطه یابی رسم می‌کنیم.

θ	r
۰	۰
$\frac{\pi}{2}$	-۱
$\frac{2\pi}{3}$	۰
$\frac{3\pi}{4}$	-۱
π	-۲
$\frac{5\pi}{4}$	-۱
$\frac{3\pi}{2}$	۰
2π	۰



این نمودار را دِلگون می‌نامیم.

توجه: هر نمودار به فرم: $\begin{cases} r = a \pm a \sin \theta \\ r = a \pm a \cos \theta \end{cases}$ یا یک دِلگون است که رأس آن روی یکی از محورها و نمودار در مرکز قطب شکستگی دارد. (بیشترین فاصله از قطب در رأس دِلگون است)

مثال: نمودار $r = ۱ + ۲ \sin \theta$ را رسم کنید.

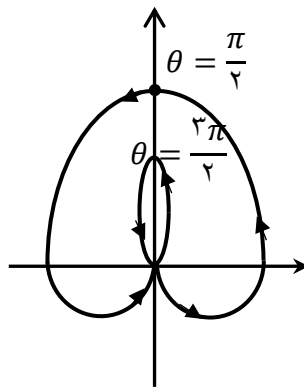
حل: θ هایی را که منحنی از مبدأ عبور می کند را به دست می آوریم:

$$r = ۰ \Rightarrow ۱ + ۲ \sin \theta = ۰ \rightarrow \sin \theta = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{۶} \\ \theta = \pi - (-\frac{\pi}{۶}) = \pi + \frac{\pi}{۶} \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} \theta = ۲\pi - \frac{\pi}{۶} \\ \theta = \pi + \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

در فاصله $۰ \leq \theta \leq ۲\pi$ داریم:

$$\sin \theta = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \theta = ۲\pi - \frac{\pi}{۶} \\ \theta = \pi + \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

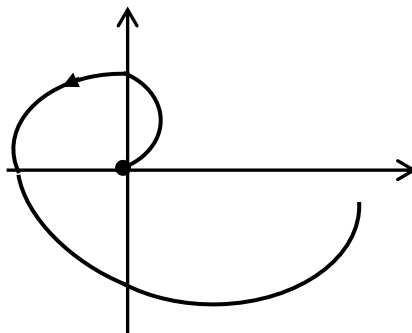
θ	r
۰	۱
$\frac{\pi}{۶}$	۲
$\frac{\pi}{۲}$	۳
$\frac{۲\pi}{۳}$	۱
π	۰
$\pi + \frac{\pi}{۶}$	-۱
$\frac{۳\pi}{۲}$	-۲
$۲\pi - \frac{\pi}{۶}$	-۱
۲π	۱



این منحنی حلزونی با حلقه داخلی نام دارد.

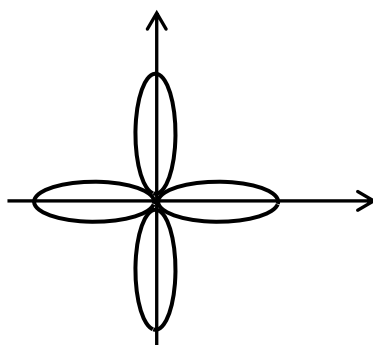
توجه: نمودار $\begin{cases} r = a \pm b \cos \theta \\ r = a \pm b \sin \theta \end{cases}$ در حالتی که $|a| < |b|$ حلزونی با حلقه داخلی است و رأس آن روی یکی از محورها قرار دارد.

چند نمودار قطبی دیگر

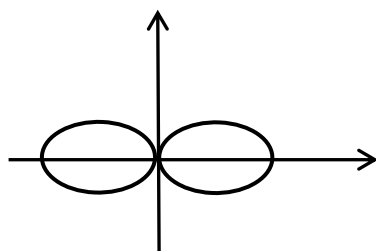


مارپیچ ارشمیدسی: $r = \theta, \theta \geq ۰$

گل ۴ برگه: $r = \cos 2\theta$



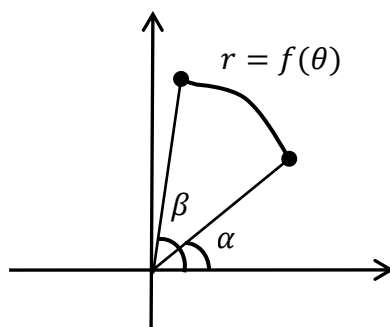
توجه: نمودار $\begin{cases} r = a \cos(n\theta) \\ \text{یا} \\ r = a \sin(n\theta) \end{cases}$ برای n های زوج، گل $2n$ برگه و برای n های فرد، گل n برگه است.



پروانه: $r^2 = \cos(2\theta)$

مساحت ناحیه در مختصات قطبی

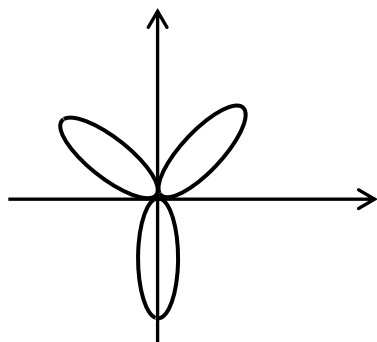
فرض کنیم $r = f(\theta)$ تابعی پیوسته و مثبت باشد. مساحت ناحیه محدود به $f(\theta)$ دو خط $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ به صورت زیر است.



$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta$$

مثال: مساحت یک حلقه گل ۳ برگه $r = 4 \sin(3\theta)$ را به دست آورید.

حل: ابتدا نمودار آن را رسم می‌کنیم. نمودار نسبت به محور y متقارن است. مساحت حلقه در ربع اول را به دست می‌آوریم.



$$r = 0 \Rightarrow 4 \sin(3\theta) = 0 \rightarrow 3\theta = k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$$

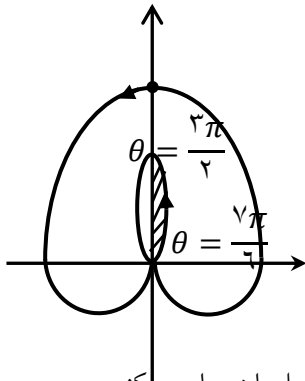
$$\theta = \frac{k\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases} \text{ در ربع اول}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} 16 \sin^2(3\theta) d\theta \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1 - \cos(6\theta))}{2} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos(6\theta)) d\theta = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

در محاسبه انتگرال از فرمول $\sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2}$ استفاده شده است.

مثال: مساحت حلقه داخلی حلزونی $r = 1 + 2 \sin \theta$ را بیابید.

حل: نمودار نسبت به محور y ها متقارن است.



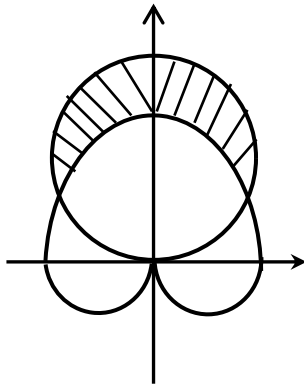
$$r = 0 \rightarrow 1 + 2 \sin \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{6} \\ \text{یا} \\ \theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

بنا به تقارن شکل مساحت نصف حلقه را در فاصله $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{6}$ به دست می آوریم و حاصل را دو برابر می کنیم.

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} r^2 d\theta = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} (1 + 2 \sin \theta)^2 d\theta = \pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

مثال: مساحت درون دایره $r = 3 \sin \theta$ و بیرون دلگون $r = 1 + \sin \theta$ را پیدا کنید.

حل: دو منحنی را در یک دستگاه رسم می کنیم.



$$\begin{aligned} r = r &\rightarrow 1 + \sin \theta = 3 \sin \theta \\ \sin \theta = \frac{1}{2} &\Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} \\ \text{یا} \\ \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

در فاصله $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ ، مساحت دایره را از مساحت دلگون کم می کنیم.

$$S = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (3 \sin \theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1 + \sin \theta)^2 d\theta = \pi$$

مثال: شیب خط مماس بر مارپیچ ارشمیدس $r = 2\theta$ را در نقطه $\theta = \frac{\pi}{2}$ بیابید.

حل: ابتدا معادله قطبی را به معادله پارامتری تبدیل می کنیم. داریم:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\theta \cdot \cos \theta \\ y = 2\theta \cdot \sin \theta \end{cases}$$

$$m = y'(x) = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \frac{2(\sin \theta + \theta \cdot \cos \theta)}{2(\cos \theta - \theta \cdot \sin \theta)} \Big|_{\theta = \pi/2} = -\frac{2}{\pi}$$

۳- تمرینات

۱- با حذف پارامتر t ، معادلات پارامتری زیر را بصورت معادلات دکارتی بنویسید.

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t^3 \end{array} \right. & \text{(ب)} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = t^2 + 1 \\ y = \frac{1}{t} \end{array} \right. & \text{(د)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} x = -2t + 1 \\ y = \frac{t}{2} + 4 \end{array} \right. & \text{(الف)} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \sin(2t) \\ y = \cos(2t) \end{array} \right. & \text{(ج)} \end{array}$$

۲- با حذف پارامتر t ، معادلات زیر را رسم کنید.

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} x = e^t - 1 \\ y = e^{2t} \end{array} \right. & \text{(ب)} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \sin ht \\ y = \cos ht \end{array} \right. & \text{(د)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} x = t + 1 \\ y = t^2 - 1 \end{array} \right. & \text{(الف)} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ y = 4 \cos t \end{array} \right. & \text{(ج)} \end{array} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

۳- دو منحنی زیر چه تفاوتی با هم دارند.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t^3 \\ y = t^2 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} x = t^6 \\ y = t^4 \end{array} \right.$$

۴- شیب خط مماس بر منحنی $\left\{ \begin{array}{l} x = t^3 + 1 \\ y = t^4 - t \end{array} \right.$ را در نقطه $t = 2$ بیابید.

۵- معادله خط مماس بر منحنی $\left\{ \begin{array}{l} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t^3 \end{array} \right.$ را در نقطه $A(2, 1)$ بیابید.

۶- مماس‌های افقی و قائم منحنی‌های زیر را بیابید.

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \cos(2t) \\ y = 4 \sin(2t) \end{array} \right. & \text{(ب)} \quad 0 \leq t \leq \pi \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - t^2 \\ y = t^3 - 12t \end{array} \right. & \text{(الف)} \end{array}$$

۷- نشان دهید منحنی $\left\{ \begin{array}{l} x = t^3 - 4t \\ y = t^2 \end{array} \right.$ در نقطه $A(0, 4)$ دو خط مماس دارد.

۸- به ازای چه t ‌هایی منحنی‌های زیر تقعر به سمت بالا دارند.

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} x = t - e^t \\ y = t + e^{-t} \end{array} \right. & \text{(ب)} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = t^3 - 2t^2 \\ y = 3t + 1 \end{array} \right. & \text{(الف)} \end{array}$$

۹- دو پارامتری متفاوت برای سهمی $x = y^2 + 2y$ بیابید.

۱۰- مسافتی را که یک ذره با موقعیت (x, y) روی منحنی زیر طی می‌کند را به دست آورید.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \cos^2 t \\ y = \cos t \end{array} \right. , \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

۱۱- طول منحنی های زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & \begin{cases} x = t^2 + 2 \\ y = t^2 + 4 \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ \text{ب)} \quad & y = \ln(\cosh x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

۱۲- میخی داخل لاستیک دوچرخه ای به شعاع 0.5 متر می شود. اگر دوچرخه 10 متر روی مسیر مستقیم حرکت کند، مسافتی را که میخ طی کرده است چقدر است؟

راهنمایی: مسیر حرکت میخ منحنی چرخزاد است.

۱۳- ناحیه های زیر را در مختصات قطبی توصیف کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 1 \leq r \leq 3 \\ \text{ب)} \quad & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad r \geq 1 \end{aligned}$$

۱۴- معادلات زیر را به فرم قطبی تبدیل کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & x^2 + (y-1)^2 = 4 \\ \text{ب)} \quad & x = -y^2 \end{aligned}$$

۱۵- منحنی های زیر را رسم کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & r = -3 \cos \theta \\ \text{ب)} \quad & r = 2 - 2 \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad & r = 2 - 4 \cos \theta \\ \text{د)} \quad & r = \cos^2 \theta \end{aligned}$$

۱۶- منحنی های زیر را رسم کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & r = -1 + 2 \sin \theta \\ \text{ب)} \quad & r = -\theta, \theta > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad & r = \frac{1}{\theta}, \theta > 0 \\ \text{د)} \quad & r^2 + r - 6 = 0 \end{aligned}$$

۱۷- شیب خط مماس بر منحنی های قطبی زیر را در نقطه داده شده بیابید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & r = \theta^2, \theta = \pi \\ \text{ب)} \quad & r = 1 + \cos \theta, \theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

۱۸- مساحت نصف داخل دلگون $r = 2 + 2 \sin \theta$ را به دست آورید.

۱۹- مساحت حلقه داخلی $r = 1 + 2 \cos \theta$ را به دست آورید.

۲۰- مساحت یک حلقه گل ۴ برگی $r = \sin 2\theta$ را به دست آورید.

۲۱- مساحت محدود به دو دایره $r = 1$ و $r = 2$ و دو خط $\theta = \frac{\pi}{3}$ و $\theta = \pi$ را بیابید.

۲۲- مساحت داخل دلگون $r = 1 + \cos \theta$ و بیرون دایره $r = 1$ را بیابید.

۲۳- مساحت محدود به نمودار $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$ را بیابید.

راهنمایی: با تبدیل به فرم قطبی معادله پروانه به دست می آید.

فصل چهارم

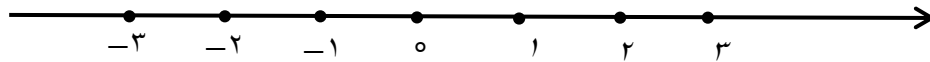
توابع برداری

در این فصل بردارها، معادلات خط و صفحه در فضا، منحنی‌ها و سطوح فضایی بررسی می‌شوند. همچنین با معرفی توابع برداری می‌توان محاسبات مشتق و انتگرال را روی بردارها انجام داد.

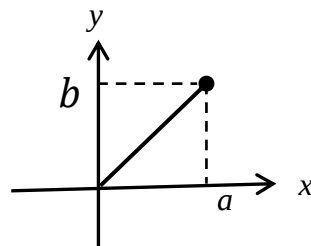
۱- بردارها در فضا

مختصات قائم سه بعدی

مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ متناظر با نقاط روی خط است.

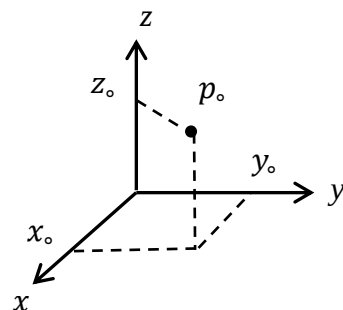


مجموعه زوج‌های مرتب $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ متناظر با نقاط روی صفحه است.

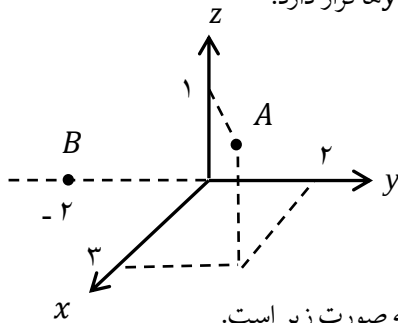


مجموعه سه تایی‌های مرتب $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ متناظر با نقاط در فضا است.

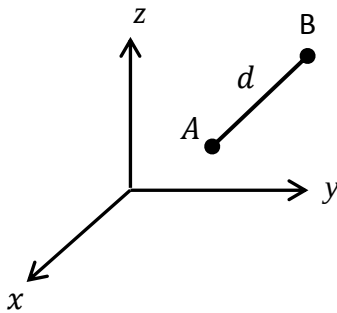
سه خط عمود برهم فضا را نشان می‌دهند و هر سه تایی مرتب (x, y, z) مانند شکل زیر با یک نقطه P در فضا متناظر می‌شود. $P(x, y, z)$ را مختصات قائم نقطه P می‌نامیم.



سه خط قائم بر هم فضا را به هشت قسمت تقسیم می‌کند. یک هشتم اول (یا ثمن اول) ناحیه‌ای است که $x, y, z \geq 0$ می‌باشند. در شکل زیر نقطه $A(3, 2, 1)$ در یک هشتم اول و نقطه $B(0, -2, 0)$ روی محور y ها قرار دارد.

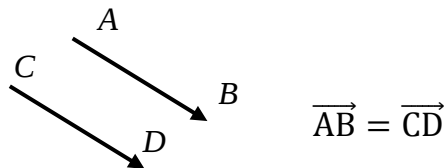


اگر $A(a_1, a_2, a_3)$ و $B(b_1, b_2, b_3)$ دو نقطه در فضا باشند. فاصله این دو نقطه به صورت زیر است.



$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

تعریف: هر پاره خط جهت دار در فضا را یک بردار می‌نامیم و دو بردار را مساوی هستند هرگاه هم طول و هم جهت باشند

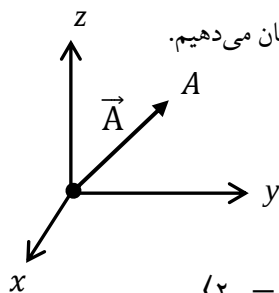


اگر O مبدأ مختصات باشد، بردار $\overrightarrow{OA}$ را با $\vec{A}$ نشان می‌دهیم:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{A}$$

بنابراین هر نقطه $A(a, b, c)$ را می‌توان به بردار تبدیل کرد و آن را با علامت زیر نشان می‌دهیم.

$$\vec{A} = \langle a, b, c \rangle$$



اعمال جبری روی بردارها

جمع و تفاضل بردارها به صورت مؤلفه‌ای است.

$$\langle 2, -1, 3 \rangle + \langle -4, 3, 1 \rangle = \langle -2, 2, 4 \rangle$$

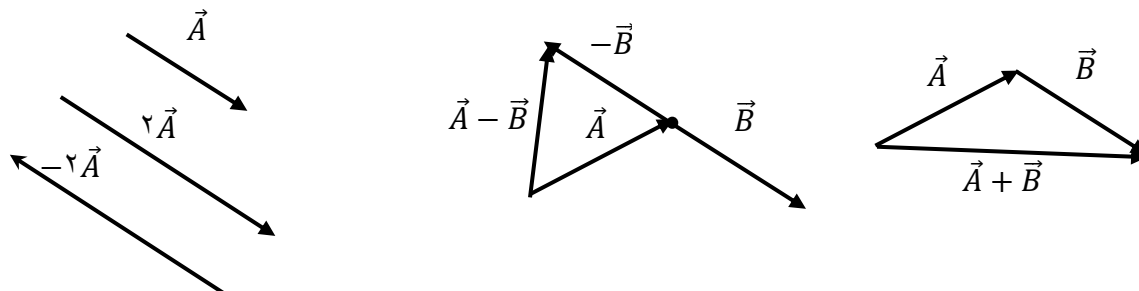
$$\langle 2, -1, 3 \rangle - \langle -4, 3, 1 \rangle = \langle 6, -4, 2 \rangle$$

ضرب عدد در بردار به صورت زیر است.

$$-2\langle 1, 3, -2 \rangle = \langle -2, -6, 4 \rangle$$

$$\frac{\langle 2, 1, 6 \rangle}{4} = \frac{1}{4}\langle 2, 1, 6 \rangle = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2} \rangle$$

اعمال جبری به صورت هندسی



توجه: $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

طول بردار $\vec{A} = (a, b, c)$ برابر است با: $|\vec{A}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ و $\vec{u}$ را بردار واحد می‌نامیم هرگاه: $|\vec{u}| = 1$

مثال: برداری بیابید که با بردار $\vec{A} = \langle 2, -1, 3 \rangle$ هم جهت و طول آن ۳ واحد باشد.

حل:

$$|\vec{u}| = \frac{|\vec{A}|}{|\vec{A}|} = \langle \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \rangle \quad \text{و} \quad |\vec{A}| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

بردار $\vec{u}$ با $\vec{A}$ هم جهت و $|\vec{u}| = 1$ قرار می‌دهیم:

$$\vec{B} = 3\vec{u} = \langle \frac{6}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{9}{\sqrt{14}} \rangle \quad \text{بردار } \vec{B} \text{ با } \vec{A} \text{ هم جهت و طول آن ۳ واحد است.}$$

بردارهای پایه در فضا

بردارهای $\vec{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ و $\vec{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ و $\vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ را بردارهای پایه متعامد (عمود برهم) می‌نامیم. ویژگی مهم بردارهای پایه این است که می‌توان هر بردار را بر حسب آنها نوشت.

$$\vec{A} = \langle a, b, c \rangle = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

جمع و تفاضل بردارها با این نماد به صورت زیر است:

$$(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) + (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$(\vec{i} - \vec{j}) - (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

جملات متشابه با هم ساده می‌شوند.

ضرب نقطه‌ای دو بردار

تعریف: اگر $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ ، ضرب نقطه‌ای دو بردار به صورت زیر است.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\langle 2, -1, 0 \rangle \cdot \langle 4, 3, 2 \rangle = 8 - 3 + 0 = 5$$

$$(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 1 - 1 + 1 = 1$$

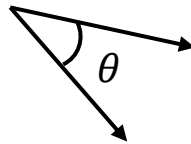
چند خاصیت ضرب نقطه‌ای

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \text{خاصیت توزیع پذیری}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{خاصیت جابجایی}$$

خاصیت شرکت پذیری برای ضرب داخلی برقرار نیست.

در شکل مقابل θ زاویه بین دو بردار است. $0 \leq \theta \leq \pi$ قضیه: اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آنگاه:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$$

نتیجه: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار مخالف صفر باشند.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \text{ و } \vec{b} \text{ برهم عمودند}$$

ضرب خارجی

تعریف: اگر $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ ضرب خارجی دو بردار به صورت زیر است.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

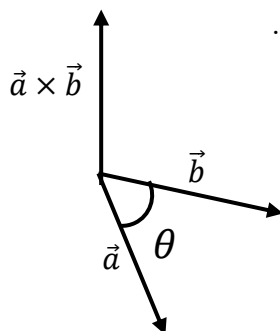
مثال: با یک مثال تحقیق کنید که بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ بر هر دو بردار $\vec{a}$ و بردار $\vec{b}$ عمود است.

حل:

$$\vec{b} = (2, 4, -1) \quad , \quad \vec{a} = (1, -3, 0)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} + 10\vec{k}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \langle 3, 1, 10 \rangle \cdot \langle 1, -3, 0 \rangle = 3 - 3 + 0 = 0$$

به طور مشابه: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ یعنی بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است.طبق قانون دست راست: است اگر ۴ انگشت دست راست در جهت بردار $\vec{a}$ به $\vec{b}$ باشد،انگشت شصت در جهت بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ است.

قضیه: اگر θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، آنگاه

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$$

نتیجه:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \quad \text{بخصوص:} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \text{ با } \vec{b} \text{ موازی باشد}$$

چند خاصیت ضرب خارجی

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$$

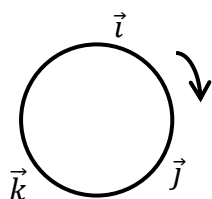
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

می توان نشان داد خاصیت شرکت پذیری برای ضرب خارجی برقرار نیست.

توجه:



$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

از طرفی:

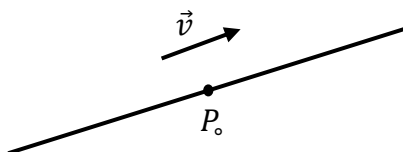
مثال: اگر $\vec{a} = \langle 2, 0, 3 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 1, -1, 0 \rangle$ با استفاده از بردارهای پایه $\vec{a} \times \vec{b}$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (2\vec{i} + 3\vec{k}) \times (\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i}(\vec{i} - \vec{j}) + 3\vec{k}(\vec{i} - \vec{j}) \\ &= \vec{0} - 2\vec{k} + 3\vec{j} + 3\vec{i} = \langle 3, 3, -2 \rangle \end{aligned}$$

۲- معادله خط و صفحه در فضا

معادله خط در فضا

معادله هر خط مانند L در فضا با یک نقطه $P(x_0, y_0, z_0)$ روی خط و یک بردار $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ موازی خط تعیین می شود.



$$L: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

این را معادله پارامتری خط L می نامیم.

مثال: معادله خطی را بیابید که از دو نقطه $A(0, 0, 5)$ و $B(-1, 2, 3)$ عبور می کند.

حل: واضح است $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ بردار موازی خط است.

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \langle -1, 2, 3 \rangle - \langle 0, 0, 5 \rangle = \langle -1, 2, -2 \rangle$$

با انتخاب $P.(۰, ۰, ۵)$ داریم:

$$\begin{cases} x = ۰ - t \\ y = ۰ + ۲t \\ z = ۵ - ۲t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = ۲t \\ z = ۵ - ۲t \end{cases}$$

دو خط در فضا نسبت به هم موازی یا متقاطع یا متنافر (نه موازی نه متقاطع) هستند.

مثال: وضعیت دو خط زیر را در فضا نسبت به هم تعیین کنید.

$$L_1 \begin{cases} x = -۱ + t \\ y = ۲t \\ z = ۳ + t \end{cases}, \quad L_2 \begin{cases} x = ۲s \\ y = ۴ \\ z = ۱ + s \end{cases}$$

حل: بردارهای $\vec{v}_1 = \langle ۱, ۲, ۱ \rangle$ و $\vec{v}_2 = \langle ۲, ۰, ۱ \rangle$ موازی نیستند. پس این دو خط نیز موازی نمی باشند. اگر دو خط متقاطع باشند، نقطه برخورد در هر دو معادله خط صدق می کند.

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۱ + t = ۲s \\ ۲t = ۴ \\ ۳ + t = ۱ + s \end{cases} \quad \text{دستگاه سه معادله و دو مجهول}$$

$$\begin{cases} t - ۲s = -۱ \\ ۲t = ۴ \\ t - s = -۲ \end{cases}$$

یک دستگاه ۲×۲ انتخاب می کنیم.

$$\begin{cases} t - ۲s = -۱ \\ ۲t = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = ۲ \\ s = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

اما این جواب در معادله سوم صدق نمی کند، یعنی دستگاه جواب ندارد. پس این دو خط متنافر هستند.

$$\text{توجه: با حذف } t \text{ در معادله پارامتری خط} \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{ به دست می آید:}$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

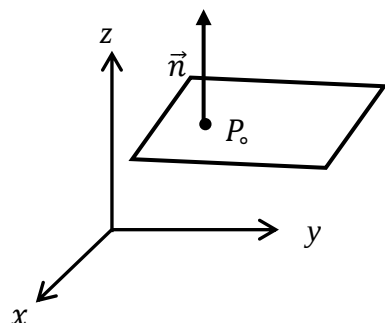
این را معادله مقارن خط می نامیم.

در حالتی که یکی از مخرج ها، مثلاً $a = ۰$ باشد، معادله به صورت زیر تحویل می شود.

$$\frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \quad x = x_0$$

معادله صفحه در فضا

یک صفحه در فضا با یک نقطه $P(x_0, y_0, z_0)$ روی صفحه و یک بردار $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$ قائم بر صفحه تعیین می‌شود و معادله آن به صورت زیر است.



$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz = d \quad \text{به بیان دیگر:}$$

مثال: چند نقطه روی صفحه $x - y + 2z = 3$ بیابید.

حل: دو مجهول را دلخواه و مجهول سوم را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow P_1(1, 0, 1) \quad , \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow P_2\left(0, 0, \frac{3}{2}\right) \quad , \quad \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow P_3(3, 0, 0)$$

توجه داریم که نقطه P_2 برخورد صفحه با محور z ها و نقطه P_3 برخورد صفحه با محور x ها است.

مثال: معادله صفحه‌ای را بیابید که از نقطه $P(-1, 0, 4)$ عبور و بر خط $L: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 5 \end{cases}$ عمود است.

حل: کافی است بردار قائم صفحه را بردار موازی خط انتخاب کنیم.

$$\vec{n} = \vec{v} = \langle 2, -3, 0 \rangle$$

پس بنا به فرمول صفحه:

$$2(x + 1) - 3(y - 0) + 0(z - 4) = 0 \Rightarrow 2x - 3y = -2$$

فرض کنیم نقاط A و B و C روی یک صفحه باشند (غیر هم خط) برای تعیین معادله صفحه ابتدا بردارهای $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ را تشکیل می‌دهیم. بردار $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ بر دو بردار $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ عمود است یعنی بر صفحه عمود است و P_0 را یکی از سه نقطه داده شده انتخاب می‌کنیم.

مثال: وضعیت دو صفحه زیر را در فضا نسبت به هم تعیین کنید.

$$x + y - 2z = 1 \quad , \quad -x + 2y + z = 0$$

خط برخورد دو صفحه در معادلات هر دو صفحه صدق می‌کند.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

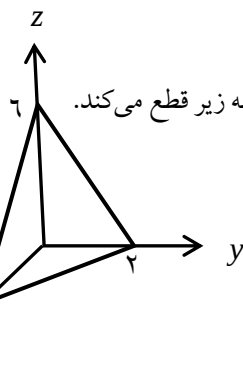
با انتخاب دلخواه $z = t$ داریم:

$$\begin{cases} x + y = 1 + 2t \\ -x + 2y = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$$

جواب به دست آمده معادله پارامتری خط برخورد دو صفحه است.

مثال: معادلات زیر را در فضا توصیف کنید.

الف) $2x + 3y + z = 6$

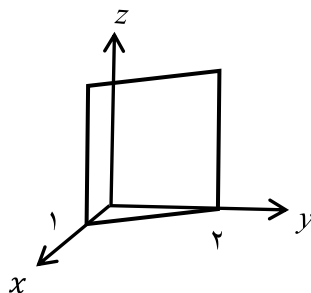


حل: معادله ی صفحه است که در یک هشتم اول محورها را در نقطه زیر قطع می کند.

$A(0, 0, 6), B(0, 2, 0), C(3, 0, 0)$

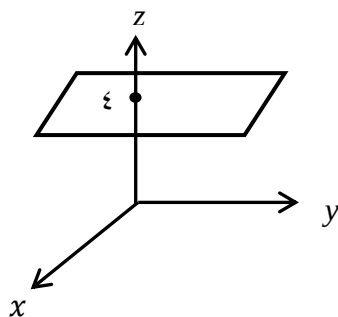
ب) $2x + y = 2$

حل: معادله صفحه ای است با بردار قائم $\vec{n} = \langle 2, 1, 0 \rangle$ ، این صفحه از خط $2x + y = 2$ در صفحه xy عبور و با محور z موازی است.



ج) $z = 4$

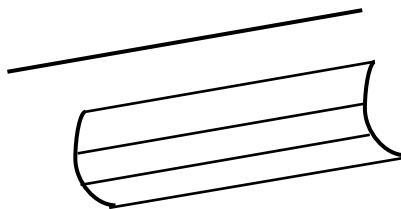
حل: معادله صفحه ای است با بردار قائم $\vec{n} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ ، این صفحه بر محور z عمود است و محور z را در نقطه $(0, 0, 4)$ قطع می کند.



۳- چند سطح (رویه) در فضا

سطح استوانه ای

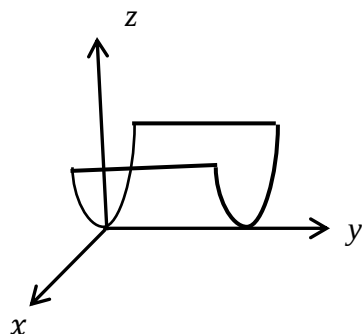
سطح استوانه ای از امتداد یک منحنی مسطح در جهت یک خط ثابت حاصل می شود.



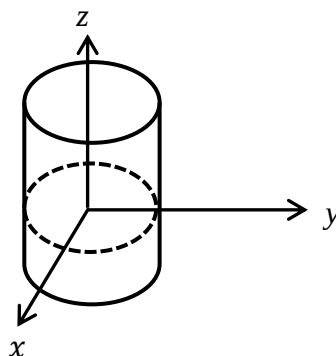
در حالت خاص هرگاه در معادله $f(x, y, z) = 0$ در فضا یکی از مجهول ها نباشد، سطح استوانه ای است.

دو مثال از سطح استوانه‌ای

الف) $Z = X^2$ ، سطح استوانه‌ای است از امتداد منحنی $Z = X^2$ در صفحه XZ در جهت محور Y ها.

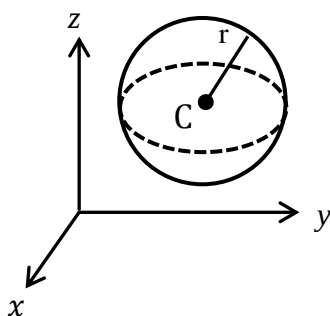


ب) $X^2 + Y^2 = 1$ ، استوانه‌ای است از امتداد دایره $X^2 + Y^2 = 1$ در صفحه XY در امتداد محور Z ها



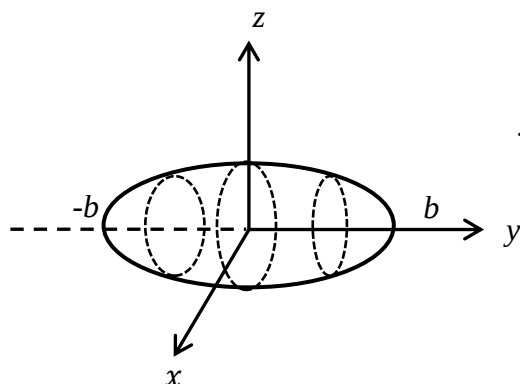
توجه: هرگاه $f(x, y, z) = 0$ یک رویه در فضا باشد، $f(x - \alpha, y - \beta, z - \gamma) = 0$ از انتقال رویه $f(x, y, z) = 0$ به اندازه α و β و γ در جهت سه محور به دست می‌آید.

رویه‌های درجه دوم



$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2 \quad \text{کره:}$$

معادله کره‌ای است به مرکز $C(\alpha, \beta, \gamma)$ و شعاع r

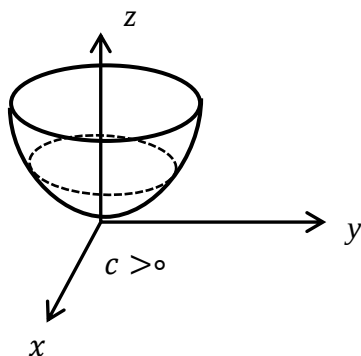


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{بیضی گون:}$$

معادله یک بیضی گون با سه قطر $2a$ و $2b$ و $2c$ است.

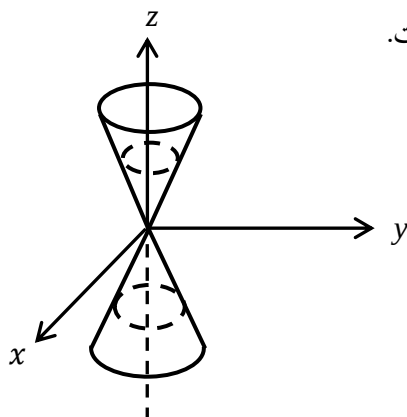
سهمی گون: $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

معادله سهمی گون در جهت محور Z ها است.



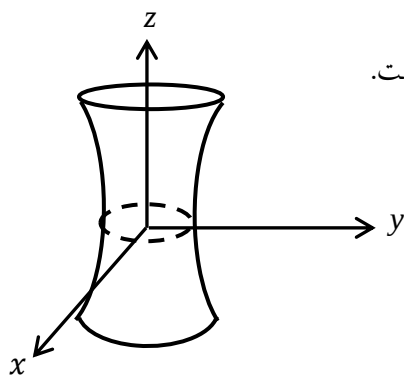
مخروط کامل: $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

معادله مخروط کامل در راستای محور Z ها است.



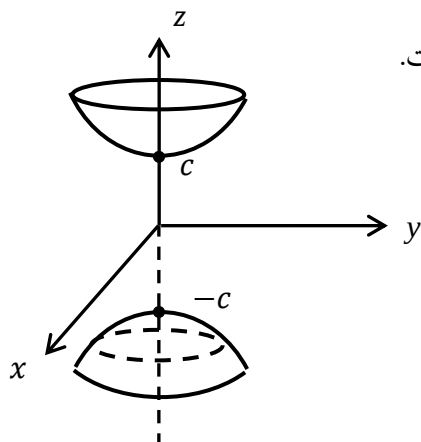
هذلولی گون یک پارچه: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

معادله هذلولی گون یک پارچه در جهت محور Z ها است.

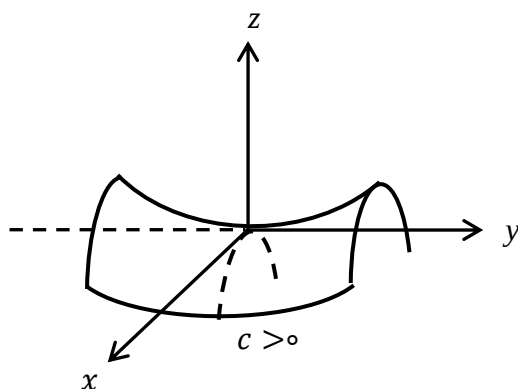


هذلولی گون دو پارچه: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

معادله هذلولی گون دو پارچه در جهت محور Z ها است.

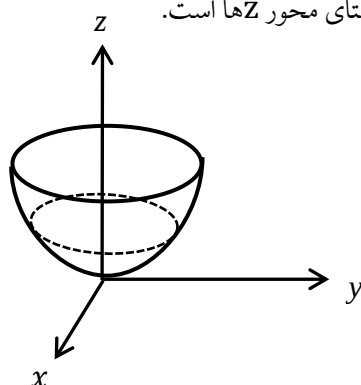


زین اسبی (زینی): $\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$
معادله زینی در راستای محور z ها است.



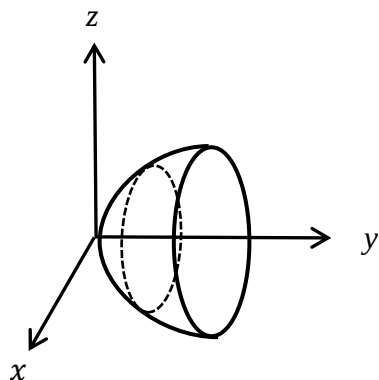
چند مثال از سطح درجه دوم:

الف) $z = x^2 + y^2$ یک سهمی گون در راستای محور z ها است.



ب) $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$ یک کره به مرکز $C(1, 0, -2)$ و شعاع $r = \sqrt{9} = 3$ است.

ج) $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ ، معادله $z^2 = x^2 + y^2$ مخروط کامل است، اما $z \leq 0$ پس $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ نیمه پایینی مخروط در امتداد محور z ها است.



د) $y = z^2 + x^2$ یک سهمی گون در امتداد محور y ها است.

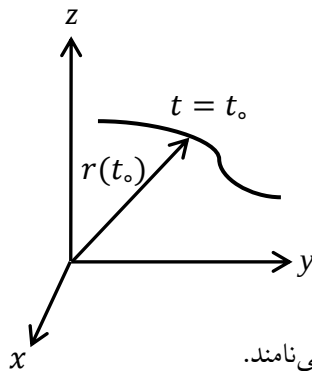
ه) $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ ، داریم: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$
معادله هذلولی گون یک پارچه در جهت محور y ها است.

۴- توابع برداری

فرض کنیم V_3 مجموعه تمام بردارها در فضا باشد. تابعی مانند $r: \mathbb{R} \rightarrow V_3$ یک تابع برداری می باشد که معمولاً با $r(t) = \langle x(t) + y(t) + z(t) \rangle$ نشان داده می شود. به هر t یک بردار در فضا نسبت داده می شود.

$$r(t) = \langle t^2, 2t + 1, t^3 \rangle$$

$$r(1) = \langle 1, 3, 1 \rangle, \quad r(0) = \langle 0, 1, 0 \rangle, \quad r(2) = \langle 2, 5, 8 \rangle$$



فرض کنیم $r(t) = \langle x(t) + y(t) + z(t) \rangle$ تابع برداری باشد، معادله پارامتری

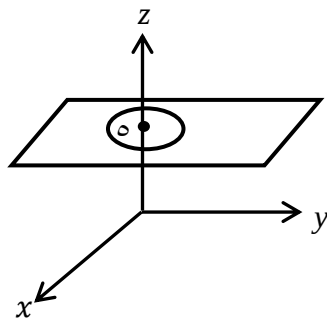
$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

یک منحنی در فضا می باشد و تسامحاً آن را منحنی تابع برداری $r(t)$ می نامیم. اگر t زمان باشد، منحنی C مکان ذره در فضا را معلوم می کند، لذا $r(t)$ را بردار مکان نیز می نامند.

مثال: منحنی توابع برداری زیر را در فضا توصیف کنید.

الف) $r(t) = \langle 1 - t, 4, t \rangle$

حل: $C: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 \\ z = t \end{cases}$ این منحنی یک خط در فضا است که روی صفحه $y = 4$ قرار دارد.



ب) $r(t) = \langle 2 \cos t, 2 \sin t, 5 \rangle$

حل:

$$C: \begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

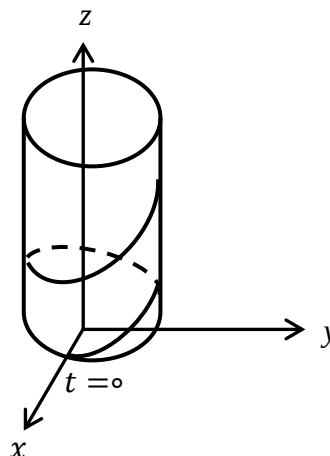
منحنی C دایره $x^2 + y^2 = 4$ روی صفحه $z = 5$ است.

ج) $r(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$

حل: $C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$ از دو معادله اول به دست می آید: $x^2 + y^2 = 1$

یعنی منحنی C روی استوانه $x^2 + y^2 = 1$ قرار دارد. با افزایش t ، z افزایش می یابد و منحنی یک پیچ روی استوانه است که آن را پیچ

استوانه ای می نامیم.

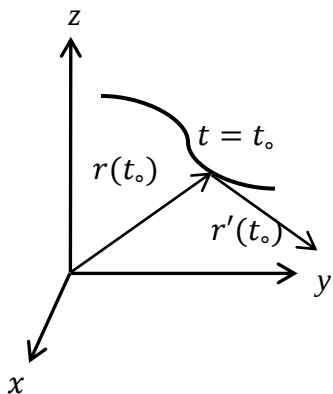


مشتق توابع برداری

فرض کنیم $r(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ تابعی برداری باشد، مشتق $r(t)$ به صورت زیر است.

$$r'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$$

بردار $r'(t_0)$ در نقطه $t = t_0$ بر منحنی $r(t)$ مماس است.



تعریف: فرض کنیم $r(t)$ تابع برداری، $T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$ را بردار مماس واحد می‌نامیم. واضح است همواره:

$$|T(t)| = 1$$

مثال: اگر $r(t) = \langle t^3, 3, t \rangle$ موارد زیر را بیابید.

$$r'(1), r''(1), T(1)$$

حل:

$$r'(t) = \langle 3t^2, 0, 1 \rangle, r'(1) = \langle 3, 0, 1 \rangle$$

$$r''(1) = \langle 6t, 0, 0 \rangle, r''(1) = \langle 6, 0, 0 \rangle$$

$$T(1) = \frac{r'(1)}{|r'(1)|} = \frac{\langle 3, 0, 1 \rangle}{\sqrt{10}} = \left\langle \frac{3}{\sqrt{10}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10}} \right\rangle$$

چند خاصیت:

فرض کنیم $u(t)$ و $v(t)$ توابع برداری باشند.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

مثال: نشان دهید اگر برای هر t ، $|r(t)| = k$ ، آنگاه بردارهای $r(t)$ و $r'(t)$ برهم عمود هستند.

$$r(t) \cdot r'(t) = |r(t)|^2 = k^2$$

حل: بنا به خواص بردارها:

از طرفین معادله $r(t) \cdot r(t) = k^2$ مشتق می‌گیریم. بنا به خواص بالا

$$r'(t) \cdot r(t) + r(t) \cdot r'(t) = 0 \Rightarrow 2r'(t) \cdot r(t) = 0 \Rightarrow r'(t) \cdot r(t) = 0$$

یعنی بردارهای $r(t)$ و $r'(t)$ برهم عمود هستند. بنابراین اگر یک منحنی روی کره‌ای به مرکز مبدأ باشد، بردار مماس $r'(t)$ بر بردار مکان $r(t)$ عمود است.

مثال: معادله خط مماس بر تابع برداری $r(t) = \langle t^2, t^3, 4t \rangle$ را در نقطه $t = 1$ بیابید.

حل:

$$r'(t) = \langle 2t, 3t^2, 4 \rangle$$

$$r'(1) = \langle 2, 3, 4 \rangle, \quad t = 1 \text{ بردار مماس در } t = 1$$

$$t = 1 \rightarrow P(1, 1, 4), \quad r(t) \text{ روی منحنی}$$

با قرار دادن $\vec{v} = r'(1) = \langle 2, 3, 4 \rangle$ معادله خط مماس برابر است با:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 4 + 4t \end{cases}$$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $x = y^2 + y - 2$ را در صفحه xy در نقطه $A(4, 2, 0)$ بیابید.

حل: معادله را به صورت معادله پارامتری تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{cases} x = t^2 + t - 2 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t = 2 \rightarrow A(4, 2, 0)$$

$$r'(t) = \langle 2t + 1, 1, 0 \rangle \quad \text{و} \quad r(t) = \langle t^2 + t - 2, t, 0 \rangle \quad \text{داریم:}$$

$$r'(2) = \langle 5, 1, 0 \rangle, \quad t = 2 \text{ بردار مماس در } t = 2$$

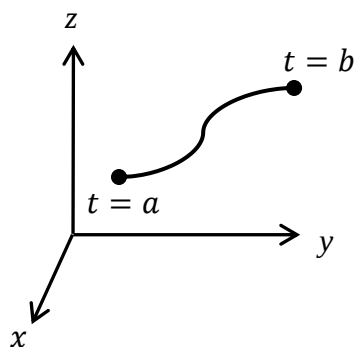
پس معادله خط مماس برابر است با:

$$\begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases}$$

با حذف پارامتر t معادله خط برحسب X و Y به دست می‌آید.

طول قوس منحنی

فرض کنیم تابع $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ پیوسته و منحنی آن بدون شکستگی باشد، اگر منحنی در فاصله $a \leq t \leq b$



یک بار طی شود، طول منحنی به صورت زیر است:

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

مثال: طول منحنی $\mathbf{r}(t) = \langle 3, \cos t, \sin t \rangle$ را در فاصله $0 \leq t \leq 2\pi$ بیابید.

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 0, -\sin t, \cos t \rangle$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + \sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1} dt = 2\pi$$

انحناء یک منحنی در فضا

به خمیدگی یک منحنی پیوسته در فضا عددی نسبت داده می‌شود که با افزایش خمیدگی این عدد بزرگتر می‌شود. به طور مثال هر چه

شعاع دایره کوچکتر شود خمیدگی آن بیشتر می‌شود.

تعریف: فرض کنیم $\mathbf{r}(t)$ تابع برداری، تحت شرایط معین انحناء منحنی $\mathbf{r}(t)$ به صورت زیر است.

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

مثال: انحناء منحنی درجه سوم **تابیده** $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ را در نقاط $A(0, 0, 0)$ و $B(-1, 1, -1)$ بیابید.

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle, \quad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

$$t = 0 \rightarrow A(0, 0, 0)$$

$$\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{k}$$

$$\kappa(0) = \frac{|\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0)|}{|\mathbf{r}'(0)|^3} = \frac{|2\mathbf{k}|}{(1)^3} = \frac{2}{1} = 2$$

$$t = -1 \rightarrow B(-1, 1, -1)$$

$$\mathbf{r}'(-1) \times \mathbf{r}''(-1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\kappa(-1) = \frac{|\mathbf{r}'(-1) \times \mathbf{r}''(-1)|}{|\mathbf{r}'(-1)|^3} = \frac{\sqrt{36+36+4}}{(\sqrt{14})^3} \cong 0.16$$

فرض کنیم $y = f(x)$ منحنی در xy باشد. می‌خواهیم فرمولی برای انحناء منحنی f بیابیم.

$$\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \\ z = 0 \end{cases} \quad : y = f(x) \text{ پارامتری منحنی}$$

$$\mathbf{r}(t) = \langle t, y(t), 0 \rangle, \quad \mathbf{r}'(t) = \langle 1, y'(t), 0 \rangle, \quad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, y''(t), 0 \rangle$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & y' & 0 \\ 0 & y'' & 0 \end{vmatrix} = y''(t)\vec{k}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{|y''(t)|}{(1 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

با جایگذاری $t = x$ به دست می‌آید:

$$\kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{(1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال: انحناء سهمی $y = x^2 + 1$ در کدام یک از نقاط $A(0, 1)$ و $B(1, 1)$ بیشتر است؟

$$\kappa(t) = \frac{|y''(x)|}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa(0) = \frac{2}{1} = 2, \quad \kappa(1) = \frac{2}{(5)^{\frac{3}{2}}} \cong 0.18$$

انحناء در رأس سهمی A بیشتر از نقطه B است. با روش‌های ریاضی (۱) نشان دهید بیشترین انحناء این سهمی در نقطه $A(0, 1)$

است.

سرعت و شتاب یک ذره

فرض کنیم ذره‌ای در فضا حرکت می‌کند که بردار موقعیت آن $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ است. بردار سرعت این ذره در هر لحظه برابر با: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ و شتاب ذره مشتق بردار سرعت است: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$ همچنین اندازه بردار سرعت

را تندی می‌نامیم. $|\mathbf{v}(t)| =$ تندی

مثال: بردار موقعیت حرکت دو ذره به صورت زیر است.

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle \cos t, \sin t, 3 \rangle, \quad \mathbf{r}_2(t) = \langle \cos(2t), \sin(2t), 3 \rangle$$

نشان دهید هر دو ذره یک منحنی را طی می‌کنند ولی با تندی های متفاوت.

حل: از رابطه $\sin^2(ax) + \cos^2(ax) = 1$ معلوم می‌شود که هر دو ذره روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه $z = 3$ حرکت می‌کنند.

$$\mathbf{r}'_1(t) = \langle -\sin t, \cos t, 0 \rangle \quad \text{و} \quad \mathbf{r}'_2(t) = \langle -2\sin(2t), 2\cos(2t), 0 \rangle$$

$$|\mathbf{r}'_1(t)| = 1, \quad |\mathbf{r}'_2(t)| = 2$$

۵- تمرینات

۱- با استفاده از ضرب داخلی بردارها معلوم کنید که آیا مثلث با رأس‌های $A(6, 2, -5)$ و $B(2, 0, -4)$ و $C(1, -2, -3)$

قائم‌الزاویه است؟

۲- مقدار k را در بردار $\vec{a} = \langle 2, k, 3 \rangle$ طوری بیابید که بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b} = \langle -1, 3, 1 \rangle$ عمود باشد.

۳- زاویه بین دو بردار $\vec{a} = \langle 1, 0, 2 \rangle$ و $\vec{b} = \langle 2, 3, 1 \rangle$ را به طور تقریبی بیابید.

۴- برداری بیابید که:

الف) با بردار $\vec{A} = \langle 2, -1, 3 \rangle$ هم‌جهت و طول آن ۵ واحد باشد

ب) بر بردار $\vec{A} = \langle 2, -1, 3 \rangle$ عمود و طول آن ۵ واحد باشد.

۵- دو بردار عمود واحد بر بردارهای $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$ بیابید.

۶- نشان دهید بردار $\vec{a} + \vec{b}$ بر بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ عمود است.

۷- با مثال نشان دهید که خاصیت شرکت پذیری برای ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها درست نیست.

۸- معادله خطی را بیابید که از نقطه $P(1, 2, 3)$ عبور و با خط موازی باشد.

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -2t \\ z = 4t + 1 \end{cases}$$

۹- معادله خط برخورد دو صفحه زیر را بیابید.

$$-x + 2y + z = 0, \quad 3x + y - z = 4$$

۱۰- معادله صفحه‌ای را بیابید که از سه نقطه زیر عبور می‌کنند.

$$A(0, 0, 0), \quad B(1, -1, 0), \quad C(2, 3, 1)$$

۱۱- معادله صفحه‌ای را بیابید که از نقطه $A(-1, 0, 1)$ عبور و شامل خط L باشد.

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4 \\ z = 2t + 3 \end{cases}$$

۱۲- نقطه برخورد خط L و صفحه $x - y + z = 3$ را بیابید.

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$$

۱۳- معادلات زیر را در فضا توصیف کنید.

(ب) $2x + y + 4z = 4$

(الف) $2x + y = 1$

(د) $z = 4 - x^2$

(ج) $y = 3$

(و) $x = y^2$

(ه) $z = \sin y$

۱۴- رویه‌های درجه دوم زیر را در فضا توصیف کنید.

(ب) $z = x^2 + y^2 - 4$

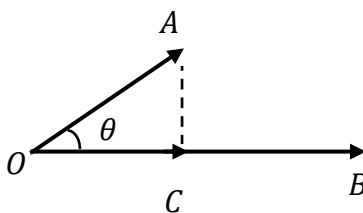
(الف) $y = \sqrt{x^2 + z^2}$

(د) $z = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$

(ج) $-2x^2 + y^2 - z^2 = 4$

(و) $4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$

(ه) $z^2 + y^2 + x^2 - 2z - 4y = 0$



۱۵- در شکل مقابل بردار $\vec{OC}$ را تصویر بردار $\vec{OA}$ روی بردار $\vec{OB}$ می‌نامیم.

با فرض معلوم بودن بردار $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ فرمولی برای محاسبه بردار $\vec{OC}$ بیابید.

با استفاده از آن تصویر بردار $\vec{A} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ را روی بردار $\vec{B} = \langle 1, 0, 2 \rangle$ را پیدا کنید.

۱۶- منحنی برخورد $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را در فضا توصیف کنید.

۱۷- منحنی های توابع پارامتری زیر را در فضا توصیف کنید.

الف) $r(t) = \langle t, 2t, 3t \rangle$ ب) $r(t) = \langle t^3, t^2, 0 \rangle$

ج) $r(t) = \langle \cos 2t, 4, \sin 2t \rangle$ د) $r(t) = \langle 2, 3, t^2 \rangle$

۱۸- معادله پارامتری خط مماس بر منحنی های زیر را در نقطه داده شده بیابید.

الف) $C: \begin{cases} x = t^3 \\ y = \sqrt{t} \\ z = 2t + 1 \end{cases}$ در نقطه $P(1, 1, 3)$ ب) $C: \begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = -2t \\ z = 4 \end{cases}$ در نقطه $t = 2$

۱۹- فرض کنید $\vec{A}$ یک بردار در فضا و α و β و γ زاویه بردار A به ترتیب با محور x ها، محور y ها و محور z ها باشد.

نشان دهید:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

۲۰- اگر $r(t) = \langle t, \sqrt{t}, t^2 \rangle$ موارد زیر را بیابید.

الف) $T(1)$ ب) $T'(1)$

۲۱- انحنا منحنی های زیر را در نقطه داده شده بیابید.

الف) $r(t) = \langle t^2, 2t, t \rangle, t = 1$ ب) $y = x^3 - 2x, x = -1$

ج) $r(t) = \langle \cos t, t^2, \sin t \rangle, t = 0$ د) $x = y^2 - 2y + 1, y = 2$

۲۲- نشان دهید منحنی $\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \\ z = t^2 \end{cases}$ روی مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ قرار دارد. (پیچ مخروطی)

۲۳- دایره بوسان منحنی $y = f(x)$ ، دایره ای است که در هر نقطه $X = X_0$ بر منحنی مماس و شعاع آن عکس انحنا در نقطه

$X = X_0$ است. $(r = \frac{1}{\kappa(x)})$ دایره بوسان همواره به سمت داخل منحنی می باشد. معادله دایره بوسان توابع زیر را بیابید.

الف) $y = \frac{x^2}{2}, x_0 = 2$ ب) $y = x^3, x_0 = 1$

۲۴- انحنا پیچ $r(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ در نقاط $t = 0$ و $t = 2\pi$ بیابید.

۲۵- سرعت، شتاب و تندی ذره‌ای را که بردار موقعیت آن $r(t) = \langle 3, t^2, t^3 \rangle$ است را در نقطه $t = 1$ بیابید.

۲۶- نشان دهید اگر ذره‌ای با تندی ثابت حرکت کند، بردارهای سرعت و شتاب بر هم عمود هستند.

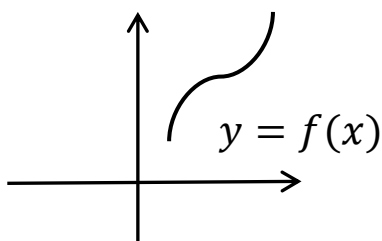
فصل پنجم

حد و پیوستگی توابع دو متغیره

با معرفی توابع چند متغیره می توان مفاهیم حساب و انتگرال را تعمیم داد. در اینجا حد و پیوستگی برای توابع دو متغیره بررسی می شوند.

۱- توابع چند متغیره

می دانیم اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $y = f(x)$ باشد، f تابعی یک متغیره است (یک متغیر مستقل دارد) نمودار توابع یک متغیره در صفحه است.



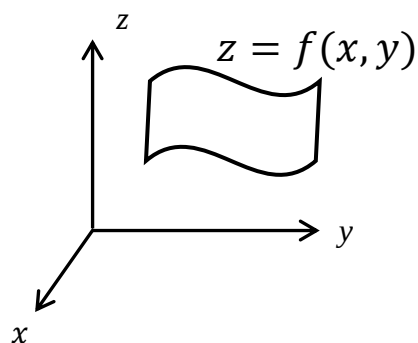
توابع دو متغیره

هرگاه f تابعی از $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $y = f(x, y)$ باشد، f را تابعی دو متغیره می نامیم. (f دو متغیر مستقل دارد)
تابع دو متغیره: $f(x, y) = x^2 + xy$

$$f(0, 1) = 0, \quad f(1, 2) = 3, \quad f(1, -1) = 0$$

ورودی توابع دو متغیره زوج مرتب و خروجی آن عدد حقیقی است.

توجه: نمودار توابع دو متغیره، یک سطح در فضا است.



تابع $f(x, y) = x^2 + 1$ تابعی دو متغیره است زیرا $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ است. بنابراین نمودار آن یک سطح در فضا است.

مثال: دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

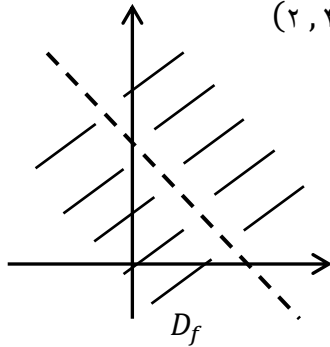
الف) $f(x, y) = \frac{x+y}{1-x-y}$

حل: f تابعی دو متغیره است پس دامنه آن باید زیرمجموعه $\mathbb{R}^2$ باشد.

$$D_f = \{(x, y) | 1 - x - y \neq 0\} = \{(x, y) | x + y \neq 1\}$$

معادله $x + y = 1$ خطی در صفحه است بنابراین D_f مجموعه تمام نقاطی روی صفحه است که روی این خط نیستند. مثلاً:

$$(2, 4), (0, 1), (1, 1) \in D_f$$

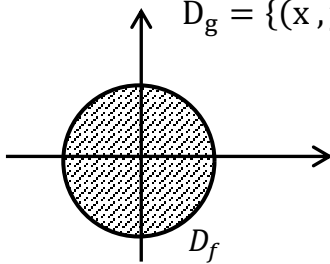


ب) $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

حل:

$$D_g = \{(x, y) | 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 9\}$$

نمودار $x^2 + y^2 = 9$ دایره‌ای به شعاع ۳ است. و دامنه f نقاط داخل دایره است.

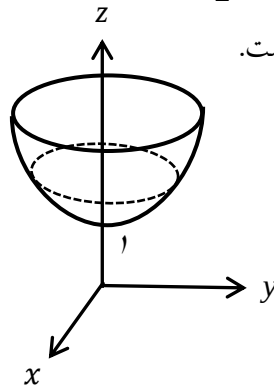


مثال: نمودار توابع دو متغیره زیر را توصیف کنید.

الف) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$

حل: قرار می‌دهیم $z = f(x, y)$ پس: $z = x^2 + y^2 + 1$

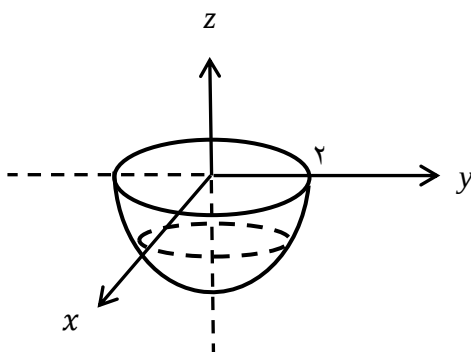
معادله یک سهمی گون با رأس $(0, 0, 1)$ در جهت محور z ها است.



ب) $f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

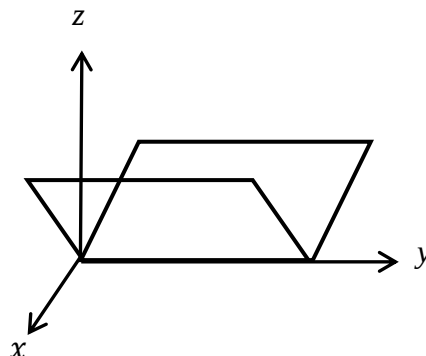
حل: $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ داریم: $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z < 0$

نیمکره پایینی به مرکز $(0, 0, 0)$ و شعاع ۲



ج) $f(x, y) = |x|$

حل: $z = |x|$ نمودار سطح استوانه‌ای است که از امتداد منحنی $z = |x|$ در جهت محور y ها بدست می‌آید.



یکی از راه‌های نمودار توابع دو متغیره، استفاده از منحنی‌های تراز هستند.

تعریف: اگر $z = f(x, y)$ و k عددی ثابت باشد، منحنی $f(x, y) = k$ در صفحه xy را منحنی تراز f می‌نامیم. (نقاط هم ارتفاع)

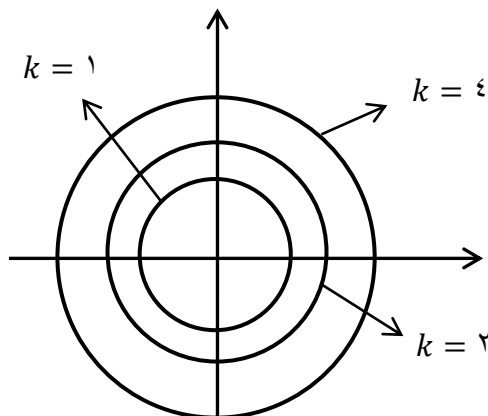
مثال: چند منحنی تراز تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ را رسم کنید.

حل:

$$k = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$k = 2 \rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$k = 4 \rightarrow x^2 + y^2 = 4$$



تمام نقاطی که در دایره $x^2 + y^2 = 1$ صدق می‌کنند در ارتفاع ۱ و تمام نقاطی که در دایره $x^2 + y^2 = 2$ صدق می‌کنند در ارتفاع ۲ هستند. با ارتفاع دادن به دایره‌های هم مرکز می‌توان نمودار سهمی گون $z = x^2 + y^2$ را تجسم کرد.

توابع سه متغیره

هرگاه f تابعی از $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $w = f(x, y, z)$ باشد، f را تابعی سه متغیره می‌نامیم. (f سه متغیر مستقل دارد).

تابع سه متغیره: $f(x, y, z) = \frac{x+y}{yz}$

$$f(0, 1, 1) = \frac{1}{1}, \quad f(1, -1, 2) = 0, \quad f(1, 2, 3) = \frac{1}{6}$$

توابع زیر سه متغیره هستند.

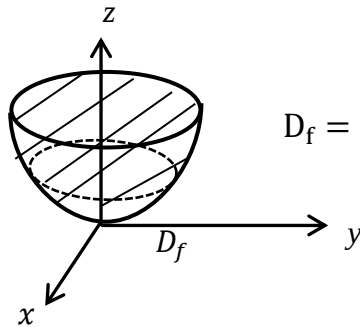
$$f(x, y, z) = x^2 y, \quad g(x, y, z) = y^2$$

مثال: دامنه تابع $f(x, y, z) = \sqrt{z - x^2 - y^2}$ را بیابید.

حل: دامنه f باید زیرمجموعه $\mathbb{R}^3$ باشد.

$$D_f = \{(x, y, z) | z - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y, z) | z \geq x^2 + y^2\}$$

$z = x^2 + y^2$ سهمی گون است و D_f نقاط داخل این سهمی گون هستند.



نمودار توابع سه متغیره $w = f(x, y, z)$ باید در فضای چهار بعدی باشد که به صورت هندسی قابل ترسیم نیستند. با این حال می توان رویه های تراز $f(x, y, z) = k$ را بررسی نمود.

مثال: رویه های تراز تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ را به ازای $\begin{cases} k = 0 \\ k = \pm 1 \end{cases}$ بررسی کنید.

$$k = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 0 \rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \quad \text{مخروط کامل}$$

$$k = 1 \rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{هذلولی گون یک پارچه}$$

$$k = -1 \rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = -1 \rightarrow -x^2 - y^2 + z^2 = 1 \quad \text{هذلولی گون دو پارچه}$$

یک تعبیر فیزیکی برای رابطه $t = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ وقتی که t زمان باشد این است که کره $x^2 + y^2 + z^2 = k$ با افزایش زمان t در حال بزرگتر شدن است.

۲- حد و پیوستگی توابع دو متغیره

فرض کنیم تابع $z = f(x, y)$ در اطراف نقطه $P_0(x_0, y_0)$ تعریف شده باشد، گوئیم حد تابع f در نقطه $P_0(x_0, y_0)$ برابر با عدد L است، هرگاه با نزدیک شدن نقطه متحرک (x, y) به $P_0(x_0, y_0)$ ، مقدار تابع f به عدد L نزدیک شود.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

چند مثال:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x - y)(x + y)}{(x - y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x + y)}{1} = 2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{\sin(2x+y)}{2x+y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \quad (t = 2x + y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

توجه: یکی از راه هایی که نشان دهیم تابع $z = f(x, y)$ در نقطه $P_0(x_0, y_0)$ حد ندارد این است که حد f را روی مسیرهایی بیابیم که از نقطه P_0 عبور می کنند ولی جواب ها متفاوت باشند.

مثال: حد توابع زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید.

الف) $P.(۲, ۳)$, $f(x, y) = \frac{x-۲}{y-۳}$

حل: مسیر $S_۱$:

$$S_۱: y = x + ۱$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (۲,۳) \\ \text{روی } S_۱}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{x-۲}{(x+۱)-۳} = \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{x-۲}{x-۲} = ۱$$

مسیر $S_۲$:

$$S_۲: y = ۲x - ۱$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (۲,۳) \\ \text{روی } S_۲}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{x-۲}{(۲x-۱)-۳} = \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{x-۲}{۲x-۴} = \frac{۱}{۲}$$

بنابر این تابع f در نقطه $P.(۲, ۳)$ حد ندارد.

ب) $P.(۰, ۰)$ در نقطه $g(x, y) = \frac{xy}{x^۲+y^۲}$

حل:

$$S_۱: y = x$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (۰,۰) \\ \text{روی } S_۱}} g(x, y) = \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{x^۲}{x^۲+x^۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$S_۲: x = ۰$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (۰,۰) \\ \text{روی } S_۲}} g(x, y) = \lim_{y \rightarrow ۰} \frac{۰}{۰+y^۲} = ۰$$

پس تابع f در نقطه $P.(۰, ۰)$ حد ندارد.

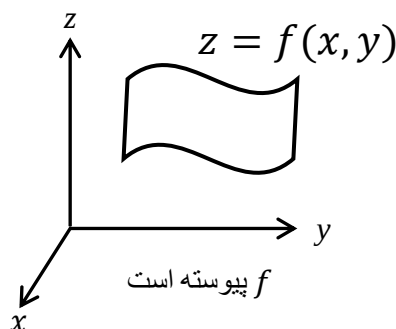
پیوستگی

تعریف: تابع $f(x, y)$ را در نقطه $P.(x_۰, y_۰)$ پیوسته می نامیم، هرگاه:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_۰, y_۰)} f(x, y) = f(x_۰, y_۰)$$

توجه: اگر $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_۰, y_۰)} f(x, y) = L$ آنگاه f روی هر مسیر دلخواه که از $P.(x_۰, y_۰)$ عبور می کند حد دارد.

به لحاظ هندسی اگر تابع $z = f(x, y)$ روی دامنه خود پیوسته باشد، نمودار آن نه سوراخ دارد و نه بریدگی



مثال: پیوستگی تابع $f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & (x, y) \neq (1, 1) \\ 2 & (x, y) = (1, 1) \end{cases}$ را در نقطه $P(1, 1)$ بررسی کنید.

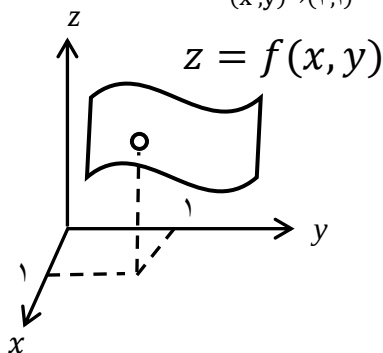
حل:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} x^2 - y = 0$$

ولی $f(1, 1) = 2$ یعنی f در نقطه $(1, 1)$ پیوسته نیست.

نمودار f در نقطه $(1, 1)$ سوراخ دارد.

(f در نقاط دیگر پیوسته است)



مثال: پیوستگی تابع $f(x, y) = \begin{cases} 4 & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 2 & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$ را روی نقطه مرزی $x^2 + y^2 = 1$ بررسی کنید.

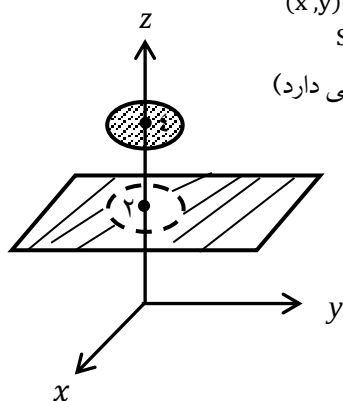
حل: فرض کنیم $P(x, y)$ نقطه‌ای روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ باشد و S_1 مسیری داخل دایره باشد که از نقطه $P(x, y)$ عبور می‌کند.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x,y) \\ \text{روی } S_1}} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x,y)} 4 = 4$$

و اگر S_2 مسیری بیرون دایره باشد که از نقطه $P(x, y)$ عبور کند، داریم:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x,y) \\ \text{روی } S_2}} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x,y)} 2 = 2$$

بنابراین f روی تمام نقاط دایره $x^2 + y^2 = 1$ پیوسته نیست. (در این نقاط نمودار f بریدگی دارد)



۳- تمرینات

۱- دامنه توابع زیر را بیابید.

(ب) $g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$

(د) $g(x, y) = \sqrt{2x + y - 1}$

(ب) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$

(د) $g(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(الف) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$

(ج) $f(x, y) = \sin^{-1}(x + y)$

۲- نمودار توابع زیر را توصیف کنید.

(الف) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

(ج) $g(x, y) = x^2 + 1$

(و) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$

۳- منحنی های تراز تابع $f(x, y) = 2x + 4y$ را به ازای $k = 0$ و $k = 1$ و $k = 2$ رسم کنید.

۴- منحنی های تراز توابع زیر را به ازای $k = -1, 0, 1$ رسم کنید.

$$g(x, y) = x^2 - y^2, \quad f(x, y) = x - y$$

۵- منحنی های تراز تابع $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ را برای $k = 0, 1, 2$ رسم کنید.

۶- دامنه توابع سه متغیره زیر را بیابید.

$$f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} \quad (\text{الف}) \quad g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \quad (\text{ب})$$

۷- سطوح تراز توابع زیر را برای $k = -1, 0, 1$ توصیف کنید.

$$f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{الف}) \quad g = 2x^2 + 4y^2 + 5z^2 \quad (\text{ب})$$

۸- حد بگیرید.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2 + y}{x + y}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-2)} \frac{x^2 - y^2}{x + y}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-e^{xy}}{x^2}$$

۹- نشان دهید توابع زیر در نقطه $P(0, 0)$ حد ندارند.

$$g(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} \quad (\text{الف})$$

$$g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad (\text{د})$$

$$f(x, y) = \frac{xy^4}{x^2 + y^4} \quad (\text{ج})$$

۱۰- پیوستگی توابع زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{الف}) \quad P(0, 0)$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x - y} & x \neq y \\ 4 & x = y \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad P(2, 2)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 + xy}{y^2 + y} & y \neq 0 \text{ و } y \neq -1 \\ 5 & y = 0 \text{ یا } y = -1 \end{cases} \quad (\text{ج}) \quad P(1, 0)$$

فصل ششم

مشتق توابع چند متغیره

مشتق روی توابع چند متغیره به صورت مشتق جزئی، مشتق جهتی و بردار گرادیان تعریف می‌شود. مفاهیم قاعده زنجیری و مشتق‌گیری ضمنی برای توابع چند متغیره قابل تعمیم هستند.

۱- مشتقات جزئی

فرض کنیم تابع $z = f(x, y)$ در اطراف نقطه $P(x_0, y_0)$ تعریف شده باشد، مشتق جزئی f نسبت به x به صورت زیر است.

$$f_x(P) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

نماد دیگر برای مشتق جزئی نسبت به x ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ (روند f به روند x) است. بنا به تعریف بالا داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \equiv \text{از } f \text{ فقط نسبت به } x \text{ مشتق می‌گیریم و } y \text{ ثابت است}$$

به طور مشابه، $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ مشتق جزئی f نسبت به y است و داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y \equiv \text{از } f \text{ فقط نسبت به } y \text{ مشتق می‌گیریم و } x \text{ ثابت است}$$

مثال: مشتقات جزئی تابع $f = x^2y^3 + x^3 + y^2 + xy$ را بیابید.

$$\text{حل: } f_x = 2xy^3 + 3x^2 + y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2y + x$$

مثال: مشتقات جزئی تابع $f = x^2 \ln(4x + 3y)$

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \ln(4x + 3y) + \frac{4}{4x+3y} x^2 \quad , \quad f_y = \frac{3x^2}{4x+3y}$$

توجه: اگر f تابعی سه متغیره و یا بیشتر باشد، مشتقات جزئی به طور مشابه محاسبه می‌شوند.

مثال: اگر $f = x^2 z^2 y^3$ ، مشتقات جزئی f را بیابید.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x z^2 y^3 \quad , \quad f_y = 3x^2 z^2 y^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2x^2 z y^3$$

مشتقات جزئی مراتب بالاتر

اگر $z = f(x, y)$ ، مشتقات جزئی مرتبه دوم f به صورت زیر است.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = (f_x)_x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = (f_y)_y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = (f_y)_x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = (f_x)_y$$

مثال: مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع $f = x^2 - x^2 y^2 + y^2$ را بیابید.

$$f_x = 2x - 2x^2 y^2, \quad f_y = -2x^2 y + 2y$$

$$f_{xx} = 2 - 4xy^2, \quad f_{yy} = -2x^2 + 2$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = -4xy, \quad f_{yx} = (f_y)_x = -4xy$$

در این مثال $f_{xy} = f_{yx}$ ، این تساوی اتفاقی نیست. تحت شرایط مناسب با هر ترتیبی از مشتق‌گیری جواب یکسان به دست می‌آید.

$$f_{xy} = f_{yx}$$

مثال: اگر $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 3)$ را بیابید.

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1, 3) = \frac{-1}{16}$$

مثال: اگر $f = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ ، نشان دهید: $f_{xx} + f_{yy} = 0$

حل: $f = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$

$$f_x = \frac{1}{r} \cdot \frac{rx}{x^r + y^r} = \frac{x}{x^r + y^r}$$

$$f_{xx} = \frac{(x^r + y^r) - rx^r}{(x^r + y^r)^2} = \frac{y^r - x^r}{(x^r + y^r)^2}$$

f تابعی متقارن است ($f(y, x) = f(x, y)$) بنابراین f_{yy} با تعویض x و y در f_{xx} به دست می‌آید.

$$f_{yy} = \frac{x^r - y^r}{(y^r + x^r)^2} \quad \text{پس:} \quad f_{xx} + f_{yy} = 0$$

مشتقات جزئی مراتب بالاتر به طور مشابه است.

مثال: اگر $w = x^r + z^r y^r + z^r$ ، $\frac{\partial^2 w}{\partial z^r \partial y^r}$ را بیابید.

حل:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = ryz^r, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} = ryz^{r-1}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^r \partial y} = r^2 yz^{r-1}$$

مثال: اگر $f = (x^r + rx)e^{y^r + y^r}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x^r \partial y^r}$ را محاسبه کنید.

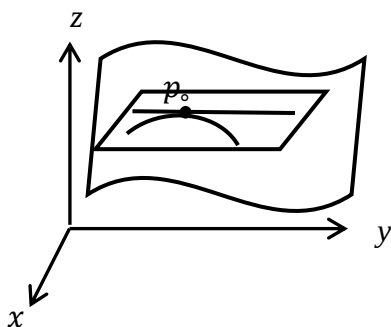
حل: باید از f پنج بار مشتق بگیریم، دو بار نسبت به y و سپس سه بار نسبت به x . ولی برای سادگی ترتیب مشتق‌گیری را عوض می‌کنیم.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^r \partial y^r} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^r \partial x^r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (rx + r)e^{y^r + y^r}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^r} = re^{y^r + y^r}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^r} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^r \partial x^r} = 0$$

۲- صفحه مماس بر سطح و قاعده زنجیری

صفحه مماس بر سطح f در نقطه $P(x_0, y_0, z_0)$ ، صفحه‌ای است که شامل خط مماس بر هر منحنی دلخواه است که از نقطه P عبور و روی سطح f قرار دارد. این صفحه در صورت وجود منحصر به فرد است.



اگر مشتقات جزئی تابع $z = f(x, y)$ در $P(x_0, y_0)$ پیوسته باشند، صفحه مماس بر سطح f در P وجود دارد و معادله آن به صورت زیر است.

$$z - f(P_0) = f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0)$$

به بیانی دیگر صفحه مماس در نقطه P_0 تقریب مناسبی برای سطح f در اطراف نقطه P_0 است.

$$f(x, y) \cong f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0)$$

مثال: معادله صفحه مماس بر سطح $f = x^2 + 2y^2$ را در نقطه $P_0(1, -2)$ بیابید.

$$f_x = 2x, \quad f_y = 4y \quad \text{حل:}$$

$$f(P_0) = 9, \quad f_x(P_0) = 2, \quad f_y(P_0) = -8$$

$$z - f(P_0) = f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0)$$

$$z - 9 = 2(x - 1) - 8(y + 2)$$

$$-2x + 8y + z + 9 = 0 \quad \text{صفحه مماس}$$

تعریف: تابع $z = f(x, y)$ را در نقطه $P_0(x_0, y_0)$ مشتق پذیر می‌نامیم، هرگاه f در نقطه P_0 صفحه مماس داشته باشد. دیفرانسیل توابع دو متغیره همانند توابع یک متغیره تعریف می‌شود.

$$z = f(x, y) \Rightarrow dz = f_x dx + f_y dy$$

اگر $z = \frac{y}{x}$ داریم:

$$dz = z_x dx + z_y dy$$

$$dz = \frac{-y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

قاعده زنجیری

در توابع یک متغیره دیدیم اگر $y = y(u)$ و $u = u(x)$ توابعی مشتق پذیر باشند.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

نظیر این فرمول را برای توابع چند متغیره نیز داریم.

قضیه: فرض کنیم $y = y(s, t)$, $x = x(s, t)$, $z = f(x, y)$ توابعی مشتق پذیر باشند، در این صورت:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

همچنین:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

نکته: در حالتی که $y = y(t)$, $x = x(t)$ توابع مشتق پذیر یک متغیره باشند نیز تساوی بالا درست است.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

این قضیه قابل تعمیم برای توابع بیش از دو متغیره است.

اگر $w = f(x, y, z)$ و $x = x(t)$ و $y = y(t)$ و $z = z(t)$ توابعی مشتق پذیر باشند. داریم:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

مثال: اگر $z = x^2 + xy$ و $\begin{cases} x = 2s + t^2 \\ y = 3s + 5t \end{cases}$ را در $\frac{\partial z}{\partial t}$ بیابید.

حل:

$$\begin{cases} t = 1 \\ s = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (2x + y)(2t) + (x)(5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(-1, 1) = (0)(2) + (-1)(5) = -5$$

مثال: اگر $w = \ln(x + 2y, 3z)$ و $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3t - 1 \\ z = t^2 \end{cases}$ را در $\frac{dw}{dt}$ بیابید.

حل:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{x + 2y + 3z} (1) + \frac{2}{x + 2y + 3z} (3) + \frac{3}{x + 2y + 3z} (2t)$$

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = \left(\frac{1}{-1} \right) + \frac{6}{-1} + 0 = -5$$

مثال: اگر $z = f(y^2, 2x + 3y)$ را بیابید.

حل: قرار می دهیم:

$$\begin{cases} u = y^2 \\ v = 2x + 3y \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} (\cdot) + \frac{\partial z}{\partial v} (۲) = ۲ \frac{\partial z}{\partial u}$$

مثال: اگر $z = f(۲x + y) + g(۳x - ۴y)$ و $f'(\cdot) = ۵$ و $g'(-۵) = ۲$ ، $\frac{\partial z}{\partial x}$ را در نقطه $P(۱, ۲)$ بیابید.

حل: قرار می‌دهیم: $\begin{cases} u = ۲x + y \\ v = ۳x - ۴y \end{cases}$ پس $z = f(u) + g(v)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= f'(u)(۲) + g'(v)(۳) \\ \frac{\partial z}{\partial x}(۱, ۲) &= f'(\cdot)(۲) + g'(-۵)(۳) = ۱۶ \end{aligned}$$

مشتق‌گیری ضمنی

فرض کنیم برای معادله $F(x, y, z) = ۰$ تابعی چون $z = g(x, y)$ وجود داشته باشد که

$$F(x, y, g(x, y)) = ۰$$

در این صورت $z = g(x, y)$ تابعی ضمنی از x و y است که با ضابطه $F(x, y, z) = ۰$ بیان می‌شود.

توابع زیر ضمنی هستند.

$$xy^۲ + z^۲y^۲ + x^۲ + ۲ = ۰, \quad x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۱ = ۰$$

فرض کنیم $F(x, y, z) = ۰$ و z تابعی ضمنی از x و y باشند داریم: $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = g(x, y) \end{cases}$ با استفاده از قاعده زنجیری از طرفین

معادله $F(x, y, z) = ۰$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = ۰$$

داریم: $\frac{\partial x}{\partial x} = ۱$ و $\frac{\partial y}{\partial x} = ۰$ پس: $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = ۰$ بنابراین:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

به طور مشابه:

همچنین اگر $F(x, y, z) = 0$ و x تابعی ضمنی از y و z باشد داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x} \\ \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_x} \end{cases}$$

مثال: در رابطه $x^2y = z^2y^2 + x^2 + 1$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بیابید.

حل:

$$F = x^2y - z^2y^2 - x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{x^2 - 2z^2y}{-2zy^2}$$

مثال: در رابطه ضمنی $5 + z^2y - 2xy = x^2$ ، $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0, 2)$ را بیابید.

حل:

$$F = x^2 - z^2y - 2xy + z^2 - 5 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x - 2y}{-2zy + 2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0, 2) = -\frac{2}{4}$$

مثال: فرض کنیم x تابعی از z و y باشد. در معادله $1 - 3x - x^2 + z^2 = y$ ، $\frac{\partial x}{\partial y}$ را بیابید.

حل:

$$F = y - z^2 - x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x} = -\frac{1}{-2x + 3}$$

۳- بردار گرادیان و مشتق جهتی

فرض کنیم $z = f(x, y)$ بردار گرادیان f به صورت: $\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j}$ تعریف می‌شود. عبارت ∇f ، دِل f یا نابلاي f خوانده می‌شود.

توجه: اگر V_p مجموعه بردارها در صفحه باشد. $\nabla f: \mathbb{R}^2 \rightarrow V_p$

مثال: اگر $f = x^2y - y^3$ ، $\nabla f(2, 3)$ را بیابید.

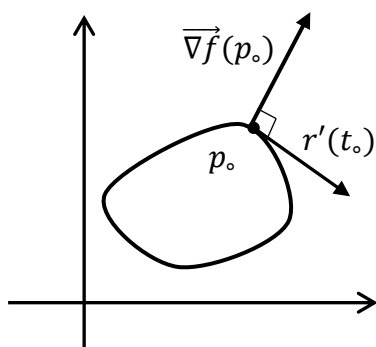
$$\nabla f = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} = 2xy \vec{i} + (x^2 - 3y^2) \vec{j}$$

$$\nabla f(2, 3) = 12 \vec{i} - 23 \vec{j}$$

تعبیر هندسی ∇f دوبعدی

فرض کنیم $z = f(x, y)$ تابعی مشتق پذیر در $P(x, y)$ و $f(x, y) = k$ منحنی تراز f با معادله $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ باشد که در $t = t_0$ از نقطه $P(x_0, y_0)$ عبور می‌کند.

تابع برداری $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ را در نظر می‌گیریم. داریم:



$$f(x(t), y(t)) = k$$

از طرفین نسبت به t مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

به طور معادل: $\nabla f \cdot r'(t) = 0$ به خصوص در $t = t_0$ داریم.

$$\nabla f(P_0) \cdot r'(t_0) = 0$$

یعنی $\nabla f(P_0)$ بر منحنی تراز $f(x, y) = k$ که از نقطه می‌گذرد عمود است.

مثال: به دوروش برداری بیابید که بر بیضی $x^2 + 4y^2 = 8$ در نقطه $P_0(2, 1)$ عمود باشد.

روش اول: قرار می‌دهیم:

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2$$

معادله $x^2 + 4y^2 = 8$ ، منحنی تراز f به ازای $k = 8$ است.

$$\nabla f = 2x\vec{i} + 8y\vec{j}$$

$$\nabla f(2, 1) = 4\vec{i} + 8\vec{j}$$

بنا به تعبیر هندسی، $\nabla f(2, 1)$ بر منحنی تراز $x^2 + 4y^2 = 8$ در نقطه $P_0(2, 1)$ عمود است.

روش دوم: ابتدا شیب خط مماس بر بیضی $x^2 + 4y^2 = 8$ را در نقطه $P_0(2, 1)$ به دست می‌آوریم:

از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$2x + 8yy' = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{2x}{8y} = -\frac{x}{4y}$$

$$m_1 = y' \Big|_{P_0(2, 1)} = -\frac{2}{4}$$

شیب خط قائم را در نقطه $P_0(2, 1)$ برابر است با:

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} = 2$$

اگر $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ بردار قائم بر منحنی در $P_0(2, 1)$ باشد.

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} = 2, \quad m_2 = \tan \theta = \frac{y}{x} = 2$$

با انتخاب: $\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ به دست می‌آید: $\vec{a} = 2\vec{i} + 1\vec{j}$ که همان بردار $\nabla f(2, 1)$ است.

$$\nabla f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$$

به طور مشابه: اگر $w = f(x, y, z)$ داریم:

$$\nabla f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

مثلا اگر $f = x^2 + y^2 + z^2$ داریم:

تعبیر هندسی ∇f سه بعدی

فرض کنیم $w = f(x, y, z)$ تابعی مشتق پذیر در $P_0(x_0, y_0, z_0)$ و $f(x, y, z) = k$ سطح تراز باشد که شامل نقطه P_0 و $r(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ یک منحنی روی این سطح تراز باشد که در نقطه $t = t_0$ از نقطه P_0 عبور می کند. داریم:

$$f(x(t), y(t), z(t)) = k$$

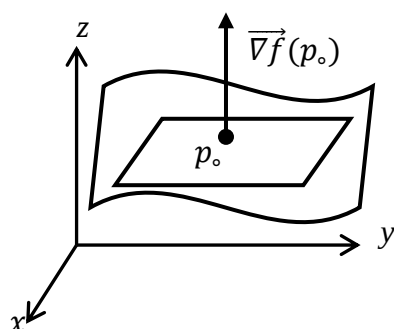
$$\nabla f \cdot r'(t) = 0$$

از طرفین نسبت به t مشتق می گیریم:

$$\nabla f(P_0) \cdot r'(t_0) = 0$$

به خصوص در $t = t_0$ داریم:

یعنی $\nabla f(P_0)$ بر خط مماس بر منحنی $r(t)$ در نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ عمود است. بنابراین $\nabla f(P_0)$ بر صفحه مماس به سطح $f(x, y, z) = k$ در نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ عمود است.



خلاصه:

∇f دو بعدی در منحنی تراز f از عمود است.

∇f سه بعدی بر سطح تراز f عمود است.

نتیجه: $\nabla f(P_0)$ بر صفحه مماس سطح $f(x, y, z) = k$ در نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ عمود است، بنابراین تحت شرایط مناسب معادله صفحه ی مماس به صورت زیر است:

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

مثال: معادله صفحه مماس بر مخروط $z^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$ را در نقطه ی $P_0(3, 1, \sqrt{5})$ بیابید.

حل: قرار می دهیم:

$$f = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - z^2 = 0$$

$$\nabla f = 2(x - 1)\vec{i} + 2(y - 2)\vec{j} - 2z\vec{k}$$

$$\nabla f(P_0) = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\sqrt{5}\vec{k} \quad \text{بردار عمود بر صفحه:}$$

معادله صفحه مماس بر مخروط در نقطه $P_0(3, 1, \sqrt{5})$:

$$4(x - 3) - 2(y - 1) - 2\sqrt{5}(z - \sqrt{5}) = 0$$

مشتق جهتی

فرض کنیم $z = f(x, y)$ تابعی مشتق پذیر، مشتق f در جهت بردار واحد $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ به صورت زیر است:

$$D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u} = f_x \cdot a + f_y \cdot b$$

به طور مشابه: اگر $w = f(x, y, z)$ مشتق f در جهت بردار واحد $\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$ برابر است با:

$$D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u} = f_x \cdot a + f_y \cdot b + f_z \cdot c$$

مثال: اگر $f = x^2y + z^2$ ، مشتق f در نقطه $P.(-1, 0, 2)$ در جهت بردار $\vec{a} = \langle 0, 1, 4 \rangle$ را بیابید.

حل:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}} \right\rangle$$

$$\nabla f = \langle 2xy, x^2, 2z \rangle, \quad \nabla f(P.) = \langle 0, 1, 4 \rangle$$

$$D_{\vec{u}}f(P.) = \nabla f(P.) \cdot \vec{u} = 0 + \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4 \cdot 4}{\sqrt{17}} = \frac{49}{\sqrt{17}}$$

مثال: مشتق تابع $f \Rightarrow x^2 - y^2$ را در نقطه $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ به سمت نقطه $B\left(4, -\frac{3}{2}\right)$ بیابید.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \langle 3, -4 \rangle, \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left\langle \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right\rangle$$

حل:

$$P. = A = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\nabla f = \langle 2x, -2y \rangle, \quad \nabla f(P.) = \langle 2, -1 \rangle$$

$$D_{\vec{u}}f(P.) = \nabla f(P.) \cdot \vec{u} = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 2$$

$$D_{\vec{u}}f(P.) = 2$$

مفهوم عدد ۲ به این معنی است که هرگاه از نقطه $P. = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ در جهت بردار $\vec{u}$ (به سمت نقطه B) کمی دور شویم، تغییرات f تقریباً ۲ برابر است.

نکته: از تعریف مشتق جهتی معلوم می‌شود:

$$D_{\vec{i}}f = f_x, \quad D_{\vec{j}}f = f_y, \quad D_{\vec{k}}f = f_z$$

قضیه: فرض کنیم f تابعی دو یا سه متغیره باشد، در این صورت:

$$D_{\vec{u}}f(P.) = \nabla f(P.) \cdot \vec{u} = |\nabla f(P.)| \cdot |\vec{u}| \cos \theta$$

که در آن θ زاویه بین بردارهای $\nabla f(P.)$ و بردار $\vec{u}$ است.

نتیجه: بیشترین تغییرات f در نقطه $P.$ در جهتی است که $\theta = 0$ یعنی در جهت $\nabla f(P.)$ و مقدار آن $|\nabla f(P.)|$ است.

مثال: فرض کنیم $f = xy^2$ ، متحرکی روی سطح f در نقطه $P.(-1, 2)$ قرار دارد.

الف) متحرک در چه جهتی حرکت کند که بیشترین افزایش ارتفاع را داشته باشد.

$$\nabla f = y^2 \vec{i} + 2xy \vec{j}, \quad \nabla f(P.) = \langle 4, -4 \rangle$$

حل:

بنا به نتیجه بالا متحرک باید در جهت بردار $\nabla f(P.) = \langle 4, -4 \rangle$ حرکت کند.

ب) متحرک در چه جهتی حرکت کند که بیشترین کاهش ارتفاع به دست آید؟

حل: متحرک باید در جهت بردار $-\nabla f(P.)$ حرکت کند.

ج) در چه جهتی متحرک حرکت کند که تغییر ارتفاع ندهد.

حل: بنا به قضیه بالا در $\theta = \frac{\pi}{4}$ مشتق جهتی صفر است. یعنی باید $\vec{u}$ و $\nabla f(P.)$ بر هم عمود باشند

$\nabla f(P.) = \langle 4, -4 \rangle$ داریم: $\langle 4, -4 \rangle \cdot \langle 1, 1 \rangle = 0$ پس متحرک باید در جهت $\vec{u} = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$ حرکت کند.

یک روش دیگر حل قسمت ج) این است که متحرک روی منحنی تراز (هم ارتفاع) که از نقطه $P.(-1, 2)$ عبور می کند حرکت کند

یعنی منحنی $xy^2 = -4$ ، شیب خط مماس بر این منحنی را در نقطه $P.(-1, 2)$ بدست آورید و نشان دهید بردار مماس آن

$\vec{u} = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$ است.

۴- تمرینات

۱- مشتقات جزئی خواسته شده را بیابید.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) \quad , \quad f = \frac{3x+1}{2x+4y} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \quad , \quad f = x^2 \cdot \sin(2x + 3y) \quad (\text{ب})$$

$$g_y(1, 1) \quad , \quad g = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{ج})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -1) \quad , \quad z = e^{x^2 y} \quad (\text{د})$$

۲- مشتقات مشخص شده را بدست آورید.

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z} \quad , \quad f = \sin(2x + 3y + 4z) \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2 \partial \theta} \quad , \quad f = e^{r\theta} \cdot \sin \theta \quad (\text{ب})$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \quad , \quad f = e^y + x^2 y^3 \quad \text{اگر } \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \text{ را بیابید.} \quad (\text{ج})$$

$$w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 0 \quad \text{اگر } w = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{نشان دهید.} \quad (\text{د})$$

$$xz_x + yz_y = z \quad \text{اگر } z = \frac{x^2 + y^2}{x+y} \quad \text{نشان دهید} \quad (\text{ه})$$

۶- معادله صفحه مماس بر سطوح زیر را در نقطه داده شده بیابید.

$$P.(1, 3) \quad , \quad f = x^2 + xy + y^3 \quad (\text{الف})$$

$$P.(2, 0) \quad , \quad f = x \ln(y+1) \quad (\text{ب})$$

۷- معادله صفحه مماس بر سطح $f = \sqrt{x^2 + y}$ در نقطه $P.(1, 3)$ بیابید و سپس با تقریب سطح بر صفحه مماس در $P.(1, 3)$ مقدار تقریبی

$f(1.01, 3.02)$ را بدست آورید.

۸- اگر $z = e^{x^2+2y}$ و $\begin{cases} x = 2r + 4s \\ y = s^2t \end{cases}$ ، $\frac{\partial z}{\partial r}$ را در نقطه $\begin{cases} r = 1 \\ s = 1 \end{cases}$ بیابید.

۹- اگر $z = \frac{x^2+1}{y^2-1}$ ، $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$ ، $\frac{dz}{dt}$ را در $t = 2$ بیابید.

۱۰- اگر $w = z^2xy^3$ ، $\begin{cases} x = 2u + v \\ y = u^2 \\ z = u^2 + 3v \end{cases}$ ، $\frac{\partial w}{\partial v}$ را در نقطه $\begin{cases} u = 1 \\ v = -1 \end{cases}$ بیابید.

۱۱- اگر $z = f(x + at) + g(x - at)$ ، نشان دهید:

۱۲- اگر $z = f(u, v)$ و $u = \frac{x}{y}$ و $v = \frac{y}{x}$ و $f_u(2, \frac{1}{2}) = 4$ و $f_v(2, \frac{1}{2}) = 5$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ را در نقطه $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ بیابید.

۱۳- اگر $z = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$ نشان دهید:

$$x \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

۱۴- اگر $z = f(2r - s, s^2 - 4r)$ و $f_x(0, 0) = 4$ و $f_y(0, 0) = 3$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial r}(1, 2)$ را بیابید.

۱۵- اگر $z = f(x, y)$ و $\begin{cases} x = x(r, s) \\ y = y(r, s) \end{cases}$ فرمولی برای $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s}$ بیابید.

۱۶- در معادلات زیر مشتقات جزئی خواسته شده را بیابید.

(الف) $x^2 + y^2 z^2 = z + 3y + 1$ ، $\frac{\partial z}{\partial x}$

(ب) $1 + xy^2 = e^{z^2 x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial x}$

۱۷- در رابطه $e^{yz-y} + x^2 z - xy^3 = 34$ ، مقدار $\frac{\partial z}{\partial y}(-3, 2, 1)$ را بیابید.

۱۸- در معادله کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، نشان دهید.

$$(z_x)^2 + (z_y)^2 + 1 = \frac{1}{z^2}$$

۱۹- در معادلات زیر ∇f در نقطه داده شده را بیابید.

(الف) $P(-1, 3)$ ، $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$

(ب) $P(1, 3, -1)$ ، $g(x, y, z) = 3x^2 + yz^2$

۲۰- با استفاده از تعبیر هندسی بردار گرادیان

(الف) برداری بیابید که بر منحنی $x^2 - y^2 = 3$ در نقطه $P(2, 1)$ عمود باشد.

(ب) برداری بیابید که بر سطح $x^2 - y^2 + z^2 = 5$ در نقطه $P(1, 0, 2)$ عمود باشد.

۲۱- اگر f و g توابع دو متغیره (یا سه متغیره) باشند، نشان دهید.

$$\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$$

۲۲- نشان دهید هر خط قائم بر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ از مرکز کره می‌گذرد.

۲۳- معادله صفحه مماس بر سطوح زیر را در نقطه داده شده بیابید.

الف) $z^2 + xy^2 - 3 = 0$ در نقطه $P.(2, 1, -1)$

ب) $x = 2y^2 + 4z^2$ در نقطه $P.(6, 1, -1)$

ج) $yz = \ln(x + z)$ در نقطه $P.(0, 0, 1)$

۲۴- نقطه‌ای روی سطح $x^2 + y^2 - z^2 + 2 = 0$ بیابید که صفحه مماس آن $2x - 2y - 4z + 4 = 0$ باشد.

۲۵- نشان دهید هر صفحه مماس بر مخروط از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۲۶- مشتق جهتی تابع $f = x^2 y^4$ را در نقطه $P.(1, -2)$ در جهت بردار $\vec{V} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ بیابید.

۲۷- مشتق تابع $f = 3x^2 + 3y - z^2$ را در نقطه $P.(0, 1, 2)$ به سمت مبدأ مختصات را بیابید.

۲۸- همه نقاطی را بیابید که در آن‌ها جهت سریعترین تغییر تابع $f = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ بردار $\vec{V} = \vec{i} + \vec{j}$ باشد.

۲۹- مورچه‌ای روی سهمی $f = 10 - x^2 - y^2$ در نقطه $P.(1, 2)$ می‌باشد.

الف) برای اینکه مورچه سریعتر به رأس سهمی گون برسد در چه جهتی باید حرکت کند.

ب) معادله دایره‌ای روی سهمی گون بیابید که ارتفاع مورچه هنگام حرکت از نقطه P ثابت بماند. این دایره روی چه صفحه‌ای است؟

۳۰- معادله کره‌ای را بیابید که بر سهمی $z^2 = x^2 + y^2$ در نقطه $P.(1, 2, 5)$ مماس باشد. (صفحه مماس یکسان داشته

باشند.)

فصل هفتم

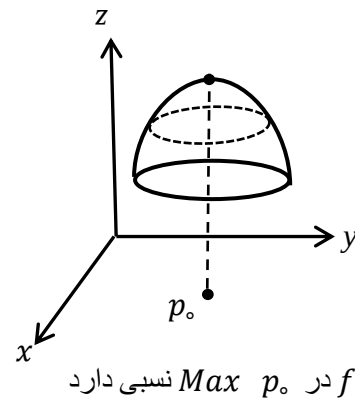
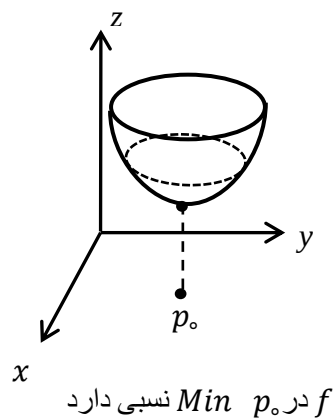
تعیین اکسترم‌های توابع دو متغیره

مانند توابع یک متغیره با تعیین نقاط اکسترم توابع دو متغیره می‌توان کمترین یا بیشترین یک کمیت را بدست آورد. مانند یافتن کمترین یا بیشترین فاصله یک نقطه از یک منحنی

۱- تعیین اکسترم‌ها

تعریف: فرض کنیم $z = f(x, y)$ و $P_0(x_0, y_0)$ متعلق به دامنه f باشد.

- الف) اگر در اطراف نقطه $P_0(x_0, y_0)$ $f(x, y) \leq f(P_0)$ آنگاه f در $P_0(x_0, y_0)$ Max نسبی دارد.
- ب) اگر در اطراف نقطه $P_0(x_0, y_0)$ $f(P_0) \leq f(x, y)$ آنگاه f در $P_0(x_0, y_0)$ Min نسبی دارد.



ج) اگر روی دامنه f $f(x, y) \leq f(P_0)$ آنگاه f در $P_0(x_0, y_0)$ Max مطلق دارد.

د) اگر روی دامنه f $f(P_0) \leq f(x, y)$ آنگاه f در $P_0(x_0, y_0)$ Min مطلق دارد.

تعریف: $P_0(x_0, y_0) \in D_f$ را در نقطه بحرانی تابع $z = f(x, y)$ می‌نامیم، هرگاه:

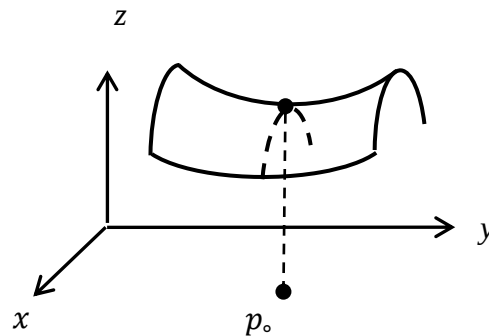
$$\begin{cases} f_x(P_0) = 0 \\ f_y(P_0) = 0 \end{cases} \quad \text{و یا حداقل یکی از}$$

مشتقات جزئی وجود نداشته باشند.

قضیه: فرض کنیم $P.(x, y)$ نقطه اکسترمم نسبی (موضعی) تابع $z = f(x, y)$ باشد، در این صورت $P.(x, y)$ نقطه بحرانی f است. البته عکس قضیه درست نیست.

$$\nabla f(P) = 0 \Rightarrow P \text{ نقطه بحرانی} \Rightarrow P \text{ نقطه اکسترمم نسبی}$$

تعریف: فرض کنیم $P.(x, y)$ نقطه بحرانی $z = f(x, y)$ باشد ولی نقطه اکسترمم نسبی آن نباشد، در این صورت P را نقطه زینی (مینی ماکس) f می نامیم.



f در p_0 نقطه زینی دارد

آزمون تعیین اکسترمم های نسبی

فرض کنیم $P.(x, y)$ نقطه بحرانی $z = f(x, y)$ و مشتقات جزئی f در $P.(x, y)$ پیوسته باشند. قرار می دهیم:

$$D_{P.} = f_{xx}(P.) \cdot f_{yy}(P.) - (f_{xy}(P.))^2$$

(الف) اگر $D_{P.} > 0$ و $f_{xx}(P.) > 0$ در نقطه $P.(x, y)$ Min نسبی دارد.

(ب) اگر $D_{P.} > 0$ و $f_{xx}(P.) < 0$ در نقطه $P.(x, y)$ Max نسبی دارد.

(ج) اگر $D_{P.} < 0$ در $P.(x, y)$ نقطه زینی دارد.

(د) اگر $D_{P.} = 0$ ، از این آزمون نمی توان استفاده کرد.

مثال: نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید و نوع آن ها را تعیین کنید.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3x \quad (\text{الف})$$

حل: برای تعیین نقاط بحرانی باید دستگاه $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ را حل کنیم.

$$\begin{cases} f_x = 2x + y - 3 = 0 \\ f_y = 2x + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$P.(2, -1)$ تنها نقطه بحران f است.

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 1$$

$$D_{P_1} = f_{xx}(P_1) \cdot f_{yy}(P_1) - (f_{xy}(P_1))^2$$

$$D_{P_1} = (2)(2) - (1)^2 = 3 > 0$$

بنابراین در نقطه $(2, -1)$ Min نسبی دارد.

$$f = x^2 + y^2 - 6x^2 + y - 3 \quad \text{ب)}$$

$$\begin{cases} f_x = 2x^2 - 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases} \\ f_y = 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{حل:}$$

جواب‌های دستگاه نقاط بحرانی f هستند. $P_1(0, -\frac{1}{2})$ و $P_2(6, -\frac{1}{2})$

$$f_{xx} = 4x - 12, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 0$$

$$\text{نوع } P_1(0, -\frac{1}{2})$$

$$f_{xx}(P_1) = -12, \quad D_{P_1} = (-12)(2) - (0)^2 = -24$$

f در $P_1(0, -\frac{1}{2})$ نقطه زینی دارد.

$$\text{نوع } P_2(6, -\frac{1}{2})$$

$$f_{xx}(P_2) = 12, \quad D_{P_2} = (12)(2) - (0)^2 = 24$$

f در $P_2(6, -\frac{1}{2})$ Min نسبی دارد.

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{ج)}$$

حل:

$$\begin{cases} f_x = y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ f_y = x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ x = \frac{1}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$P(1, 1)$ نقطه بحران f است.

$$f_{xx} = \frac{2}{x^3}, \quad f_{yy} = \frac{2}{y^3}, \quad f_{xy} = 1$$

$$f_{xx}(P) = 2, \quad f_{yy}(P) = 2$$

$$D_{P_1} = (2)(2) - (1)^2 = 3 > 0$$

f در $P(1, 1)$ Min نسبی دارد.

مثال: نقاط بحرانی $f = x^2 y$ را بیابید و نوع آن‌ها را معلوم کنید.

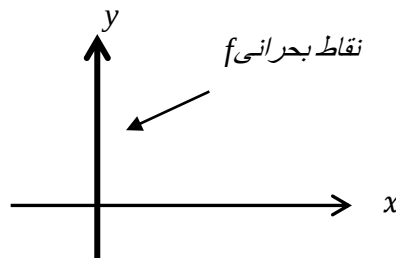
$$\begin{cases} f_x = 2xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } y = 0 \\ f_y = x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

حل:

f بی‌نهایت نقطه بحرانی دارد.

$$A = \{(0, y) | y \in \mathbb{R}\}$$

مجموعه نقاط A ، نقاط بحرانی f هستند. به عبارت دیگر، نقاط بحرانی f نقاطی در صفحه هستند که $x = 0$ یعنی محور y ها.



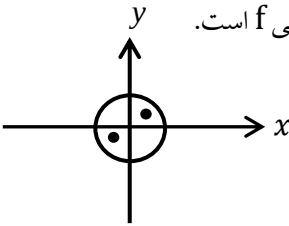
$$f_{xx} = 2y, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xy} = 2x$$

$$D = (2y)(0) - (2x)^2 = -4x^2$$

اما در نقاط بحرانی $x = 0$ داریم: $D = 0$ یعنی از آزمون برای تعیین نوع نقاط بحرانی نمی‌توان استفاده کرد. با تحلیل نوع نقاط بحرانی را مشخص می‌کنیم.

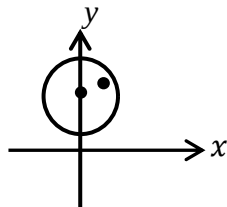
نوع نقطه $P_1(0, 0)$

فرض کنید (x, y) نزدیک $(0, 0)$ و در ناحیه اول باشد، در این صورت $f(x, y) \geq f(0, 0)$ و اگر (x, y) در ناحیه سوم باشد $f(x, y) \leq f(0, 0)$ لذا f در نقطه $(0, 0)$ نه ماکسیمم و نه مینیمم نسبی دارد پس $(0, 0)$ نقطه زینی f است.



نوع نقاط $A_1 = \{(0, y) | y > 0\}$

فرض کنیم $P_1(0, y_1)$ نقطه بحرانی در A_1 و (x, y) نزدیک $P_1(0, y_1)$ باشد. در این صورت $f(x, y) \geq f(P_1) = 0$ پس f در $P_1(0, y_1)$ مینیمم نسبی دارد.



به طور مشابه: f در نقاط $A_2 = \{(0, y) | y < 0\}$ ماکسیمم نسبی دارد.

چند مثال کاربردی

مثال: نقطه‌ای روی مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ بیابید که کمترین فاصله را با نقطه $P_1(1, 2, 0)$ داشته باشد.

حل: فرض کنیم (x, y, z) نقطه‌ای روی مخروط باشد، فاصله این نقطه و نقطه $P_1(1, 2, 0)$ برابر است با:

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2}$$

باید Min تابع d را به دست آوریم، به طور معادل کافی است Min تابع $f = d^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2$ را محاسبه کنیم.

با جایگذاری $z^2 = x^2 + y^2$ داریم:

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + x^2 + y^2$$

$$\begin{cases} f_x = 2(x-1) + 2x = 0 \\ f_y = 2(y-2) + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

تنها نقطه بحرانی f ، $P_1(\frac{1}{2}, 1)$ است. این نقطه Min تابع f است. بنابراین $P_1(\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{17}}{2})$ نقطه‌ای روی مخروط است که کمترین فاصله را با نقطه $P(1, 2, 0)$ دارد.

مثال: ابعاد بزرگترین جعبه‌ای را بیابید که مساحت آن ۲۰ متر مربع باشد.

حل: فرض کنیم X, Y, Z به ترتیب طول و عرض و ارتفاع جعبه باشند. مساحت جعبه برابر است با:

$$\begin{aligned} 2xy + 2yz + 2xz &= 20 \\ z &= \frac{10 - xy}{x + y} \end{aligned}$$

حجم جعبه برابر است با:

$$V = xyz = xy \left(\frac{10 - xy}{x + y} \right)$$

با توجه به تقارن تابع $V(x, y)$ باید در نقاط بحرانی داشته باشیم: $x = y$

با قرار دادن $y = x$ در تابع حجم به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{x^2(10 - x^2)}{2x} = 5x - \frac{x^3}{2} \\ V'(x) &= 5 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{10}{3}}, \quad (x > 0) \\ y = x &= \sqrt{\frac{10}{3}}, \quad z = \sqrt{\frac{10}{3}} \end{aligned}$$

بنابراین ابعاد جعبه مورد نظر: $x = y = z = \sqrt{\frac{10}{3}}$ است.

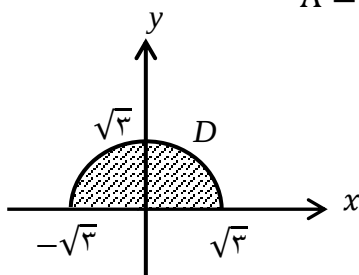
اکسترم مطلق روی ناحیه بسته

یک ناحیه در صفحه بسته است که نقاط مرزی خود را شامل و کراندار باشد. مانند دایره توپر یا مثلث توپر.

برای تعیین اکسترم‌های مطلق روی ناحیه بسته، ابتدا نقاط بحرانی داخل ناحیه را به دست می‌آوریم و سپس مقادیر اکسترم روی مرز ناحیه را مشخص می‌کنیم، بزرگترین این مقادیر Max مطلق و کوچکترین آن‌ها Min مطلق می‌باشند.

مثال: اکسترم‌های مطلق تابع $f = x^2y$ را داخل نیم دایره $D: x^2 + y^2 \leq 3, y \geq 0$ پیدا کنید.

حل: قرار می‌دهیم: $A = \{(x, y) \mid 0 < y < \sqrt{3}\}$



قبلا دیدیم که $(0, y)$ نقاط بحرانی f هستند. بنابراین اعضای مجموعه A نقاط بحرانی داخل نیم دایره D است. و $f(0, y) = 0$.

روی مرز نیم دایره $x^2 + y^2 = 3$, $y \geq 0$ داریم:

$$\begin{aligned} f &= x^2 y = (3 - y^2)y = 3y - y^3 \\ f'(y) &= 3 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 1, \quad y \geq 0 \\ y = 1 &\Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

دو نقطه $P_1(\sqrt{2}, 1)$ و $P_2(-\sqrt{2}, 1)$ نقاط اکسترمم روی مرز دایره هستند.

روی پاره خط: $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ و $y = 0$ داریم: $f = x^2 y = 0$ قرار می دهیم:

$$B = \{(x, 0) | -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\}$$

پس:

$$f(0, y) = 0 \quad \text{درون نیم دایره:}$$

$$\begin{cases} f(\sqrt{2}, 1) = 2 \\ f(-\sqrt{2}, 1) = 2 \end{cases} \quad \text{روی مرز نیم دایره:}$$

$$f(x, 0) = 0 \quad \text{روی پاره خط:}$$

بنابراین f در نقاط $(\pm\sqrt{2}, 1)$ Max مطلق و در نقاط $A \cup B$ Min مطلق دارد.

۲- روش ضرایب لاگرانژ

فرض کنیم تابع $w = f(x, y, z)$ با شرط $g(x, y, z) = k$ در نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ اکسترمم داشته باشد و $\nabla g(y_0) \neq 0$ در این صورت می توان نشان داد عددی حقیقی مانند λ وجود دارد که: $\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$ عدد λ را ضریب لاگرانژ می نامیم.

برای تعیین اکسترمم $w = f(x, y, z)$ تحت شرط $g(x, y, z) = k$ باید دستگاه زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ f_z = \lambda g_z \\ g(x, y, z) = k \end{cases}$$

به طور مشابه: برای تعیین اکسترمم های نسبی تابع $z = f(x, y)$ تحت شرط $g(x, y) = k$ باید دستگاه زیر حل شود.

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x, y) = k \end{cases}$$

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ را روی خط $x + y = 2$ بیابید.

حل: قرار می‌دهیم: $g = x + y = 2$

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x, y) = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \\ 2y = \lambda \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow P(1, 1)$$

بنابراین کمترین مقدار f روی خط، $f(1, 1) = 3$ است.

مثال: اکسترم‌های تابع $f = x^2 - y^2$ را روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ بیابید.

حل: قرار می‌دهیم: $g = x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x, y) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2x\lambda \\ -2y = 2y\lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

فرض کنیم $x \neq 0$ ، از معادله اول $\lambda = 1$ و از معادله دوم $y = 0$ بدست می‌آید. پس در معادله سوم $x = \pm 1$ ، مقدار f را در

نقاط $P_1(1, 0)$ و $P_2(-1, 0)$ حساب می‌کنیم.

$$f(P_1) = 1, \quad f(P_2) = 1$$

اکنون فرض کنیم $x = 0$ ، از معادله سوم بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

مقدار f را در نقاط $P_3(0, 1)$ و $P_4(0, -1)$ حساب می‌کنیم.

$$f(P_3) = -1, \quad f(P_4) = -1$$

بنابراین f روی دایره در نقاط P_1 و P_2 بیشترین مقدار و در نقاط P_3 و P_4 کمترین مقدار را دارد.

مثال: نزدیک‌ترین و دورترین نقاط روی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را به نقطه $P(1, 0, 2)$ بیابید.

حل: فرض کنیم $P(x, y, z)$ یک نقطه روی کره باشد. تابع فاصله P تا P_0 برابر است با:

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2}$$

باید نقاط اکسترم تابع $f = d^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2$ را روی کره $g = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ بدست آوریم.

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ f_z = \lambda g_z \\ g = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1) = 2\lambda x \\ 2y = 2y\lambda \\ 2(z-2) = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

اگر $y \neq 0$ از معادله دوم $\lambda = 1$ بدست می‌آید، اما $\lambda = 1$ با معادله اول تناقض دارد، پس باید $y = 0$ ، از معادله اول و سوم داریم:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{1-\lambda} \\ z = \frac{2}{1-\lambda} \\ y = 0 \end{cases}$$

این سه مقدار را در معادله چهارم قرار می‌دهیم.

$$\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + (0)^2 + \left(\frac{2}{1-\lambda}\right)^2 = 1 \Rightarrow 1 - \lambda = \pm\sqrt{5}$$

$$1 - \lambda = \sqrt{5} \Rightarrow P_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$1 - \lambda = -\sqrt{5} \Rightarrow P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right), f(P_1) < f(P_2)$$

پس P_1 نزدیک‌ترین نقطه و P_2 دورترین نقطه روی کره به نقطه P می‌باشند.

۳- تمرینات

۱- نوع نقاط بحرانی توابع زیر را تعیین کنید.

(الف) $f(x, y) = -x^2 + 3x - 4y^2 + y$ (ب) $g(x, y) = 3x - 4y + 1$

(ج) $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 + 1$ (د) $g(x, y) = x^2 - 12xy + 8y^2$

۲- نقاط باکسترم توابع زیر را بدست آورید.

(الف) $f(x, y) = y^2 + x^2 + 4x$ (ب) $g(x, y) = e^{xy-x^2-y^2}$

(ج) $f = x^4 + y^4 - 4xy$ (د) $g = \ln(x^2 + y^2 - 2y + 3)$

۳- نشان دهید توابع زیر بی‌نهایت نقطه بحران دارند و نوع آن‌ها را مشخص کنید.

(الف) $f = x^2 e^y$ (ب) $g = xy^2$

(ج) $f = (x - 2y)^2$ (د) $g = y^2 + 3$

۴- نوع نقطه بحرانی تابع $f = x^2 y + y^2 x$ را تعیین کنید.

۵- نقطه‌ای روی صفحه $2x + y + z = 2$ بیابید که کمترین فاصله را با نقطه $P(1, -1, 2)$ داشته باشد.

۶- سه عدد مثبت بیابید که حاصل ضرب آن‌ها ۲۴ و مجموع آن‌ها کمترین باشد.

۷- ابعاد جعبه‌ای با حجم ۲۷ سانتی‌متر مکعب را بیابید که مساحت جانبی جعبه Min باشد.

۸- حجم بزرگ‌ترین جعبه‌ای را بیابید که در یک هشتم اول قرار دارد و سه وجه آن روی صفحه مختصات و یک رأس آن روی صفحه

$$2x + 3y + z = 6 \text{ باشد.}$$

در تمرینات ۹ تا ۱۳ اکسترم تابع را روی شرط داده شده بیابید.

۹- $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ روی خط $3x - y = 5$

۱۰- $f = x^2 y$ روی بیضی $x^2 + 2y^2 = 6$

۱۱- $f = 4x + 6y$ روی دایره $x^2 + y^2 = 13$

$$12- \quad f = x + 2y + 2z \quad \text{روی کره} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$13- \quad f = x^2 y^2 z^2 \quad \text{روی کره} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

۱۴- با استفاده از روش ضریب لاگرانژ ابعاد جعبه‌ای را بیابید که حجم آن ۱۰ سانتی متر مکعب و مواد مصرفی آن کمترین مقدار باشد. (جعبه بدون درب است)

۱۵- با استفاده از روش ضریب لاگرانژ حجم بزرگ‌ترین جعبه محاط شده داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ را بیابید.

۱۶- با استفاده از روش ضریب لاگرانژ نقطه‌ای روی سهمی $x = y^2$ بیابید که کمترین فاصله را با نقطه $P(1, 0)$ داشته باشد.

۱۷- اکستریم‌های مطلق تابع $f = 2x + 4y + 3$ را داخل ناحیه مثلث بسته با رأس‌های $A(0, 1)$ ، $B(1, 0)$ ، $C(1, 1)$ بیابید.

۱۸- اکستریم‌های مطلق تابع $f = x^2 + y^2$ را داخل مستطیل بسته $-1 \leq x \leq 1$ ، $-1 \leq y \leq 1$: D بیابید.

روش ضرایب لاگرانژ دو شرطی

اگر بخواهیم اکستریم‌های تابع $w = f(x, y, z)$ را با دو شرط $g(x, y, z) = k_1$ و $h(x, y, z) = k_2$ بیابیم باید دستگاه زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda_1 \nabla g + \lambda_2 \nabla h \\ g(x, y, z) = k_1 \\ h(x, y, z) = k_2 \end{cases}$$

با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ دو شرطی تمرین ۱۹ و تمرین ۲۰ را حل کنید.

۱۹- صفحه $z = x^2 + y^2$ ، سهمی گون $x + y + 2z = 2$ را در یک بیضی قطع می‌کند. نزدیک‌ترین و دورترین نقاط روی این بیضی از مبدأ مختصات را بیابید.

۲۰- حجم بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جعبه‌ای را بیابید که مواد بکار رفته آن ۱۰۰ سانتی متر مربع و مجموع طول یال‌های آن ۳۰ سانتی متر باشد.

فصل هشتم

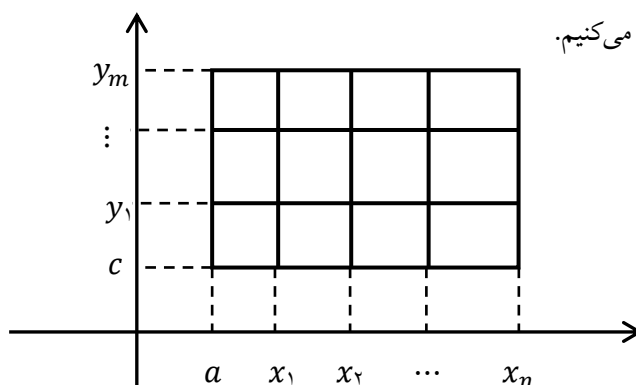
انتگرال چندگانه

انتگرال دو گانه و انتگرال سه گانه همان مفهوم انتگرال یک بعدی (حد مجموع) به ترتیب در صفحه و در فضا را دارند. از کاربردهای انتگرال چند گانه محاسبه مساحت، حجم و جرم است.

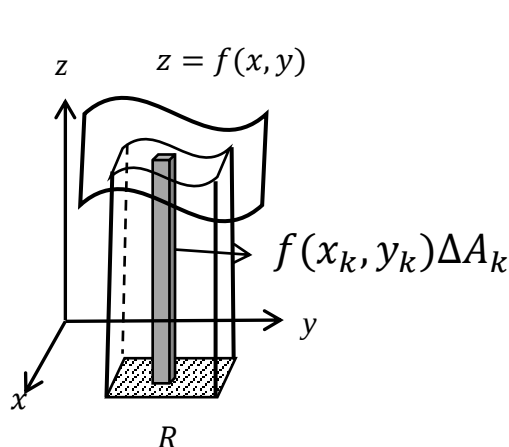
۱- انتگرال دوگانه

می خواهیم حجم زیر سطح $z = f(x, y)$ ($f \geq 0$) محدود به مستطیل $R: [a, b] \times [c, d]$ را بدست آوریم.

مستطیل R را به چند زیر مستطیل افراز می کنیم.



قرار می دهیم: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ، $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ ، $\Delta A_k = \Delta x_k \times \Delta y_k$ اگر (x_k, y_k) نقطه ای داخل زیر مستطیل باشد حجم تقریبی این ناحیه در فضا بصورت زیر است.



$$V \cong \sum_{k=1}^t f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

(t تعداد زیر مستطیل ها است.)

با افزایش تعداد زیر مستطیل ها، حجم این ناحیه به صورت زیر است:

$$V = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^t f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

اکنون انتگرال دوگانه تابع $z = f(x, y)$ روی مستطیل $R: [a, b] \times [c, d]$ به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^t f(x_k, y_k) \Delta A$$

بنا به مطالب گفته شده بهترین تعبیر انتگرال دوگانه f ، حجم زیر سطح f محدود به ناحیه R است. محاسبه انتگرال دوگانه با تعریف آن آسان نیست. برای محاسبه آن ابتدا انتگرال مکرر را تعریف کنیم.

انتگرال مکرر: تابع $z = f(x, y)$ مفروض است، انتگرال مکرر f روی مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ تعریف می شود:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

ابتدا انتگرال داخلی (نسبت به y) و سپس انتگرال بیرونی (نسبت به x) را محاسبه می کنیم، به بیان دیگر محاسبه از داخل به خارج است.

مثال: محاسبه کنید.

$$\int_1^2 \int_1^2 xy^2 dx dy \quad (\text{الف})$$

$$\int_1^2 \int_1^2 xy^2 dy dx \quad (\text{ب})$$

(حل الف)

$$\int_1^2 \int_1^2 xy^2 dx dy = \int_1^2 \left(\int_1^2 xy^2 dy \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{xy^3}{3} \right) \Big|_1^2 dx = \int_1^2 \left(\frac{8}{3}x - \frac{1}{3}x \right) dx = \frac{7}{6}$$

(حل ب)

$$\int_1^2 \int_1^2 xy^2 dx dy = \int_1^2 \left(\int_1^2 xy^2 dx \right) dy = \int_1^2 \left(\frac{x^2 y^2}{2} \right) \Big|_1^2 dy = \int_1^2 \frac{y^2}{2} dy = \frac{7}{6}$$

با مقایسه جواب دو قسمت معلوم می شود:

$$\int_1^2 \int_1^2 xy^2 dy dx = \int_1^2 \int_1^2 xy^2 dx dy$$

این تساوی اتفاقی نیست، می توان ثابت کرد:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

نکته: اگر $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ باشد، انتگرال مکرر ساده تر محاسبه می شود.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b g(x) dx \times \int_c^d h(y) dy$$

مثال قبل با این روش نیز حل می شود:

$$\int_1^2 \int_1^2 xy^2 dy dx = \int_1^2 x dx \times \int_1^2 y^2 dy = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

قضیه فوینی: اگر تابع $z = f(x, y)$ روی مستطیل $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ پیوسته باشد. آنگاه

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

اهمیت قضیه فوینی در این است که به جای محاسبه انتگرال مضاعف که حد مجموع بود، انتگرال مکرر را حساب می کنیم.

مثال: حجم جسمی را بیابید که زیر سطح $f = x + 2y$ و بالای مستطیل $R: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ در صفحه xy است.

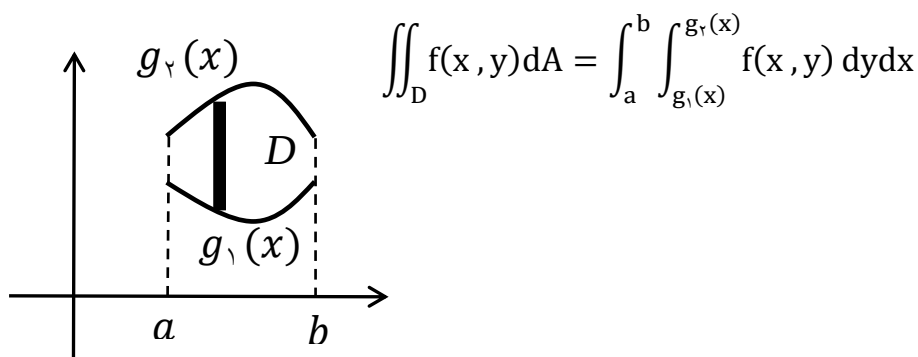
حل:

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (x + 2y) dA = \int_1^2 \int_0^2 (x + 2y) dy dx \\ &= \int_1^2 (x^2 + y^2) \Big|_0^2 dx = \int_1^2 (2x + 4) dx = 6 \end{aligned}$$

انتگرال دوگانه روی ناحیه های دیگر

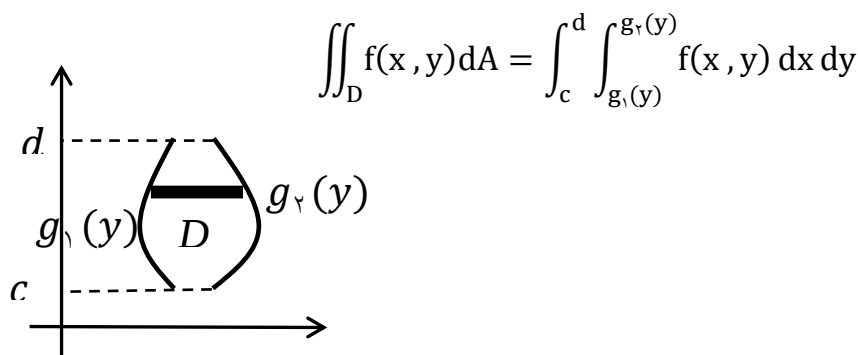
ناحیه نوع اول: فرض می کنیم $z = f(x, y)$ روی ناحیه $D: a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ پیوسته باشد. در

این صورت:

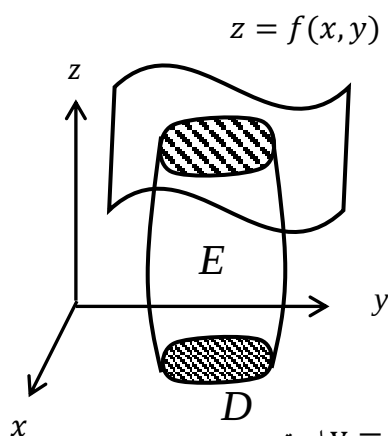


ناحیه نوع دوم: فرض کنیم $z = f(x, y)$ روی ناحیه $D: c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$ پیوسته باشد.

در این صورت:



توجه: در حالتی که $f \geq 0$ ، $\iint_D f dA$ حجم زیر سطح f و بالای ناحیه D در صفحه xy است.

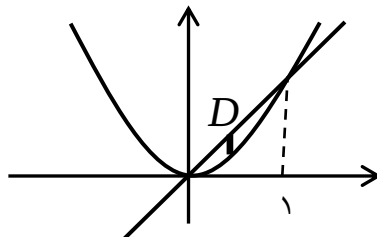


مثال: $\iint_D xy^2 dA$ را بیابید که در آن D ناحیه بین دو منحنی $y = x^2$ و $y = x$ است.

حل: از تساوی $x = x^2$ بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$D: 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x$$



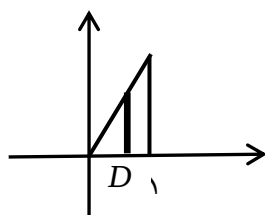
$$\iint_D xy^2 dA = \int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx$$

$$\int_0^1 \left(x \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3} \right) dx = \frac{1}{24}$$

مثال: حجم جسمی را بیابید که زیر صفحه $z = 2x + 1$ و بالای ناحیه D است که در آن D محدود به سه خط $x = 1$ و $y = x$ و $y = 0$ است.

و $y = 0$ در ناحیه اول است.

حل: ناحیه D مثلث مقابل است.



ناحیه نوع اول: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$

$$V = \iiint_D (2x + 1) dA = \int_0^1 \int_0^x (2x + 1) dy dx$$

$$= \int_0^1 ((2x + 1)y) \Big|_0^x dx = \int_0^1 (2x + 1)x dx = \frac{1}{6}$$

مثال: انتگرال $\iint_D (y + 2x) dA$ را حساب کنید.

حل:

ناحیه نوع دوم: $D: 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y^2$

$$\begin{aligned} \iint_D (y + 2x) dA &= \int_0^2 \int_0^{y^2} (y + 2x) dx dy = \int_0^2 (xy + x^2) \Big|_0^{y^2} dy \\ &= \int_0^2 (y^3 + y^4) dy = \frac{52}{5} \end{aligned}$$

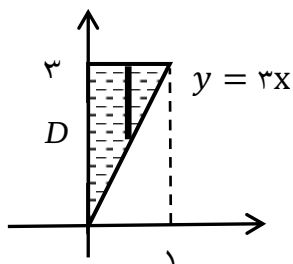
گاهی بعضی از انتگرال‌ها مکرر به سختی محاسبه می‌شوند ولی با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری ممکن است محاسبه ساده‌تر شود.

مثال: محاسبه کنید.

$$I = \int_0^1 \int_{3x}^{3y} e^{y^2} dy dx$$

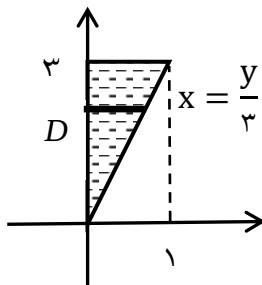
حل: ناحیه را مشخص می‌کنیم.

D: ناحیه نوع اول: $0 \leq x \leq 1, 3x \leq y \leq 3$



اما انتگرال‌گیری روی ناحیه نوع اول ساده نیست. ناحیه را نوع دوم در نظر می‌گیریم.

D: ناحیه نوع دوم: $0 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq \frac{y}{3}$



$$\begin{aligned} I &= \iint_D e^{y^2} dA = \int_0^3 \int_0^{\frac{y}{3}} e^{y^2} dx dy = \int_0^3 (xe^{y^2}) \Big|_0^{\frac{y}{3}} dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 ye^{y^2} dy = \frac{1}{6} (e^9 - 1) \end{aligned}$$

نکته: مساحت ناحیه $\iint_D dA \equiv D$

انتگرال گیری در مختصات قطبی:

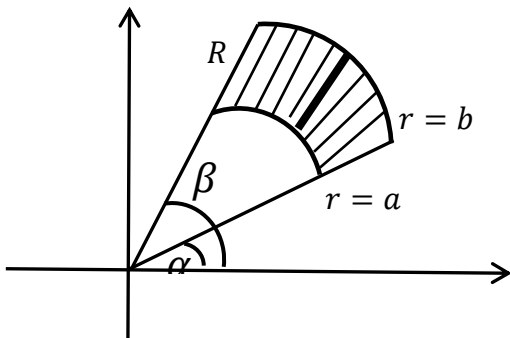
معمولاً محاسبه انتگرال دوگانه روی قسمتی از دایره یا قسمتی از واشر ساده نیست. برای حل این نوع ناحیه ها از مختصات قطبی استفاده می کنیم.

یادآوری رابطه مختصات قطبی و قائم:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

مستطیل قطبی R را در نظر می گیریم:

$$R: \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad a \leq r \leq b$$



می توان نشان داد:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

در انتگرال سمت راست r اضافی را $\mathbf{r}$ تبدیل می نامیم.

مثال: حجم جسمی را بیابید که زیر سهمی گون $z = 4 - x^2 - y^2$ و بالای صفحه $z = 0$ قرار دارد.

حل:

$$z = 0 \Rightarrow 4 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \quad \text{دایره روی صفحه } xy$$

بنابر این D (تصویر f روی صفحه xy) دایره توپر به شعاع ۲ است.

$$D: 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2$$

$$V = \iiint_D f dV = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^2 (4 - r^2) r dr = (2\pi)(4) = 8\pi$$

مثال: $\iint_D x dA$ را بیابید که در آن D ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = 1$ در ربع اول صفحه xy است.

$$D: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1$$

حل:

$$\iint_D x dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r \cos \theta) r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \times \int_0^1 r^2 dr = \frac{1}{3}$$

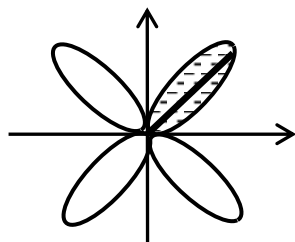
توجه: هرگاه D ناحیه قطبی به صورت زیر باشد.

$$D: \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

مثال: مساحت یک حلقه گل ۴ برگی $r = \sin 2\theta$ را حساب کنید.

حل: D را حلقه در ناحیه اول در نظر می گیریم.



$$D: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq \sin 2\theta$$

$$\text{مساحت ناحیه } D = \iint_D dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin 2\theta} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{\sin 2\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(2\theta)}{2} d\theta = \frac{\pi}{8}$$

در این انتگرال از تساوی $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ استفاده شده است.

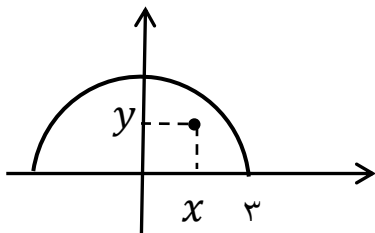
جرم یک ناحیه در صفحه

فرض کنیم D یک ناحیه در صفحه و $\rho(x, y)$ چگالی جرم آن بر واحد سطح ($\frac{\text{جرم}}{\text{مساحت}} = \text{چگالی}$) و m جرم ناحیه D باشد. داریم:

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA$$

مثال: ورقه نیم دایره $x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0$ در هر نقطه چگالی آن متناسب با مربع فاصله آن نقطه تا محور x ها است. جرم

ورقه را حساب کنید.



$$\rho(x, y) = ky^2 \quad \text{حل: داریم:}$$

$$D: 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq 3$$

$$m = \iint_D \rho dA = \iint_D ky^2 dA = \int_0^{\pi} \int_0^3 r^2 \sin^2 \theta \cdot r dr d\theta$$

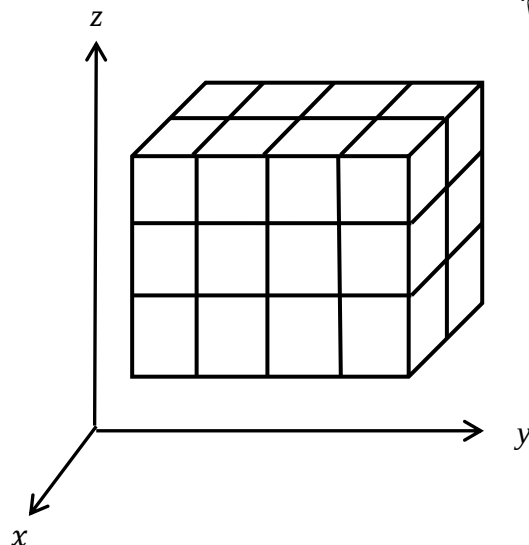
$$= k \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \times \int_0^3 r^3 dr = k \frac{\pi}{2}$$

۲- انتگرال سه گانه

تابع $w = f(x, y, z)$ را روی جعبه زیر در نظر می گیریم.

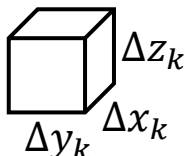
$$B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$$

این جعبه را به چند زیر جعبه افراز می کنیم و قرار می دهیم:



$$z_k = z_k - z_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

$$\Delta V_k = \Delta x_k \times \Delta y_k \times \Delta z_k$$



اگر (x_k, y_k, z_k) نقطه ای داخل زیر جعبه باشد، انتگرال سه گانه f روی جعبه B به صورت زیر است.

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^t f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$$

انتگرال سه گانه نیز به صورت حد مجموع است.

قضیه فوینی: اگر تابع $w = f(x, y, k)$ روی جعبه $B: [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ پیوسته باشد. آنگاه:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z) dz dy dx$$

نکته: با تعویض ترتیب انتگرال های مکرر به ۶ روش می توان انتگرال آنها را بیان کرد که همگی با هم مساوی هستند.

مثال انتگرال $\iiint_B (y + z) dV$ را حساب کنید.

$$B: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$$

$$\iiint_B (y + z) dV = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (y + z) dz dy dx$$

$$= \int_1^2 \int_1^2 (yz + z^2) \Big|_1^2 dy dx = \int_1^2 \int_1^2 \left(2y + \frac{4}{2} \right) dy dx = 15$$

انتگرال سه گانه روی ناحیه‌های دیگر:

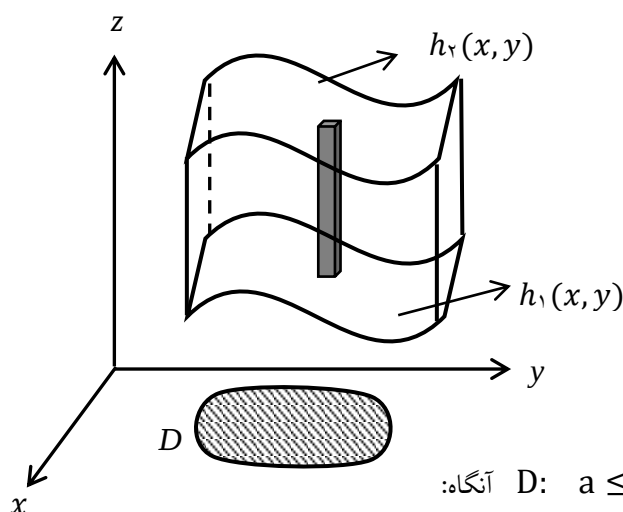
فرض کنیم E یک ناحیه در فضا و تابع $w = f(x, y, z)$ روی E پیوسته باشد.

الف) تصویر E روی صفحه xy ناحیه D باشد.

$$E: (x, y) \in D, \quad h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)$$

در این صورت:

$$\iiint_E f dV = \iint_D \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f dz \right) dA$$



و اگر $D: a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ آنگاه:

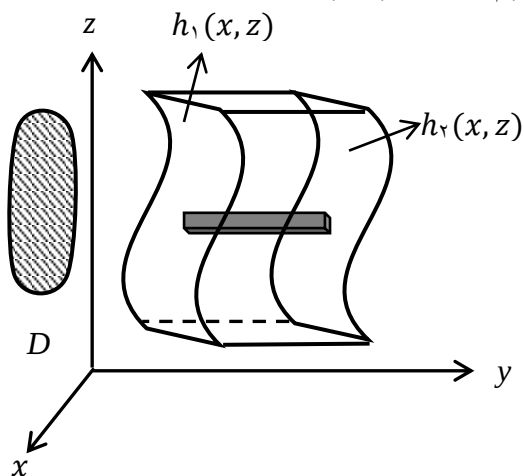
$$\iiint_E f dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f dz dy dx$$

ب) تصویر E روی صفحه xz ناحیه D باشد.

$$E: (x, z) \in D, h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)$$

در این صورت:

$$\iiint_E f dV = \iint_D \left(\int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f dy \right) dA$$



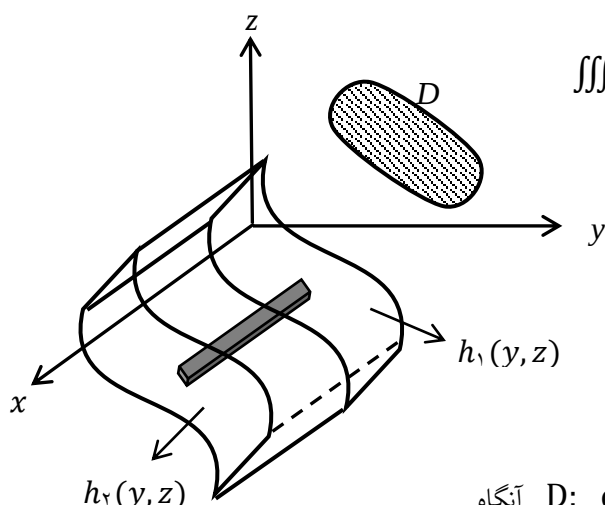
و اگر $D: a \leq x \leq b, g_1(x) \leq z \leq g_2(x)$ آنگاه:

$$\iiint_E f dz = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f dy dz dx$$

ج) تصویر E روی صفحه yz ناحیه D باشد.

$$E: (y, z) \in D, h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)$$

$$\iiint_E f dV = \iint_D \left(\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f dx \right) dA$$



و اگر $D: c \leq y \leq d, g_1(y) \leq z \leq g_2(y)$ آنگاه:

$$\iiint_E f dV = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f dx dz dy$$

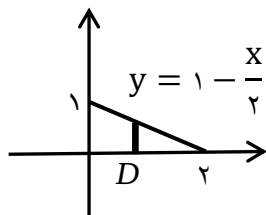
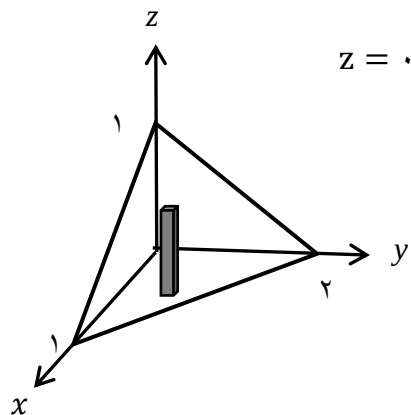
توجه: اگر E یک ناحیه در فضا باشد، داریم:

$$\iiint_E dV = \text{حجم جسم } E$$

مثال: فرض کنیم E چهار وجهی محدود به صفحه $x + 2y + z = 2$ و یک هشتم اول در مختصات قائم در فضا باشد. حجم جسم E را حساب کنید.

حل: تصویر ناحیه را روی صفحه xy در نظر می‌گیریم.

$$z = 0 \Rightarrow x + 2y + 0 = 2 \Rightarrow y = 1 - \frac{x}{2}$$



$$D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}$$

$$E: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}, 0 \leq z \leq 2 - x - 2y$$

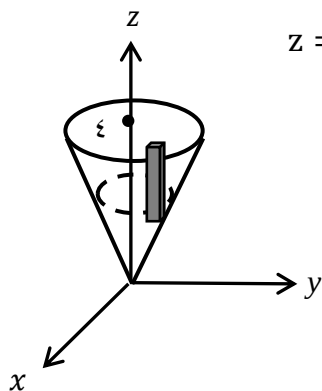
$$V = \iiint_E dV = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} dz dy dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2-x} (z) \Big|_0^{2-x-y} dy dx = \int_0^2 \int_0^{2-x} (2-x-y) dy dx = \frac{2}{3}$$

مثال: $\iiint_E xyz \, dV$ را حساب کنید، که در آن E ناحیه‌ی زیر صفحه $z = 4$ و بالای مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است.

حل: تصویر E را روی صفحه xy در نظر می‌گیریم.

$$z = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2$$



$D: x^2 + y^2 \leq 4^2$ دایره توپر است

$$D: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 4$$

$$\iiint_D xyz \, dV = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 xyz \, dz \right) dA$$

$$= \iint_D (xz^2) \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 dA = \iint_D (16x - x(x^2 + y^2)) dA$$

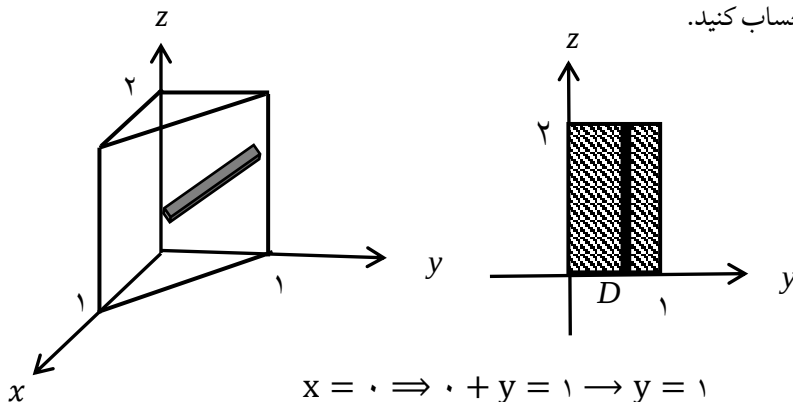
$$\iint_D x(16 - (x^2 + y^2)) dA$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^4 (r \cos \theta)(16 - r^2)r \, dr d\theta = 0$$

مثال: ناحیه‌ی محدود به دو صفحه $z = 2$ و $z = 1$ و سه صفحه مختصات در یک هشتم اول مفروض است. حجم این

جسم را با تصویر روی صفحه yz حساب کنید.

حل:



$$x = 0 \Rightarrow 0 + y = 1 \rightarrow y = 1$$

$$D: 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2 \text{ مستطیل است}$$

$$E: 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2, 0 \leq x \leq 1 - y$$

$$V = \iiint_E dV = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{1-y} dx \, dz \, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^y (x) \Big|_0^{1-y} dz \, dy = \int_0^1 \int_0^y (1-y) dz \, dy = 1$$

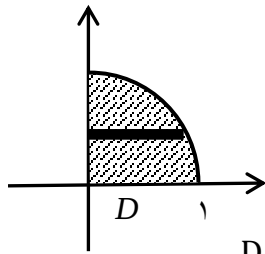
جرم یک جسم در فضا:

فرض کنیم E یک ناحیه در فضا و $\rho(x, y, z)$ چگالی جرم در واحد حجم ($\frac{\text{جرم}}{\text{حجم}}$) و m جرم جسم E باشد، داریم:

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z) dV$$

مثال: فرض کنیم E ناحیه محدود به استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $z = x$ در یک هشتم اول باشد، اگر جسم E دارای چگالی ثابت $\rho = 3$ باشد، جرم این جسم را بیابید.

حل: تصویر جسم روی صفحه xy ربع دایره $x^2 + y^2 \leq 1$ در ناحیه اول است.



$$D: 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$

$$E: 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq z \leq x$$

$$m = \iiint_E f dV = \iiint_E 3 dV = 3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^x dz \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (z) \Big|_0^x dx \, dy = 3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx \, dy = 3 \left(\frac{1}{3} \right) = 1$$

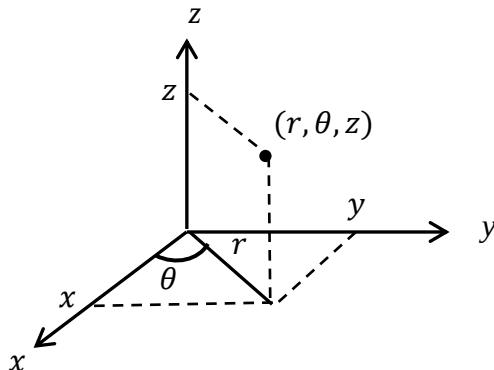
انتگرال سه گانه در مختصات استوانه‌ای

مختصات استوانه‌ای در فضا نظیر مختصات قطبی در صفحه است. اگر $A(x, y, z)$ نقطه‌ای، با مختصات قائم سه بعدی باشد. مختصات

استوانه‌ای آن (r, θ, z) است. و داریم:

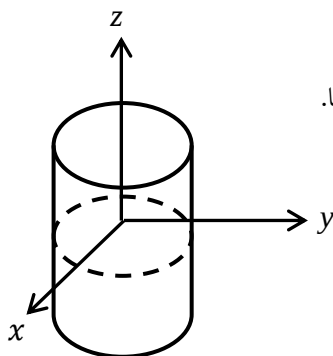
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

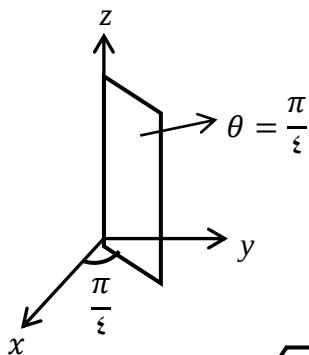


توصیف چند معادله در مختصات استوانه‌ای:

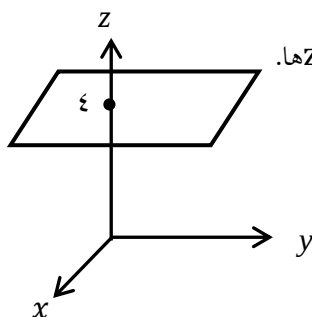
معادله $r = 3$ ، استوانه‌ای است به شعاع ۳ در امتداد محور Z ها.



معادله $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، صفحه‌ای است موازی محور Z ها.



معادله $z = 4$ ، صفحه‌ای است عمود بر محور Z ها.

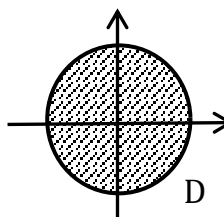
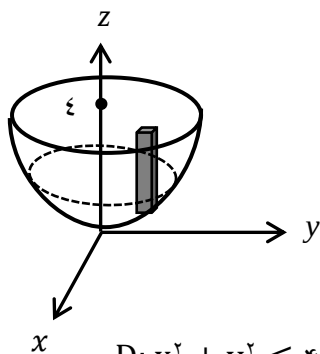


محاسبه انتگرال سه گانه در مختصات استوانه‌ای مانند محاسبه انتگرال دوگانه در مختصات قطبی است.

$$dV = r \, dz \, dr \, d\theta$$

مثال: حجم جسمی را بیابید که زیر صفحه $z = 4$ و بالای سهمی $z = x^2 + y^2$ است.

$$\text{حل: } z = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$



$$D: x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{دایره در صفحه } xy$$

توصیف این جسم به صورت زیر است.

$$E: x^2 + y^2 \leq 4, \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 4$$

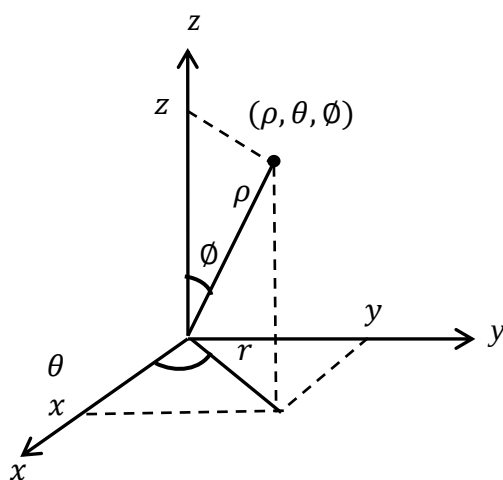
$$E: 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad r^2 \leq z \leq 4$$

$$V = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (rz) \Big|_{r^2}^4 \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^3) \, dr \, d\theta = 8\pi$$

مختصات کروی

نقطه $P(x, y, z)$ در مختصات قائم سه بعدی متناظر با نقطه (ρ, θ, ϕ) در مختصات کروی است که با شکل زیر توصیف می‌شود.



$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

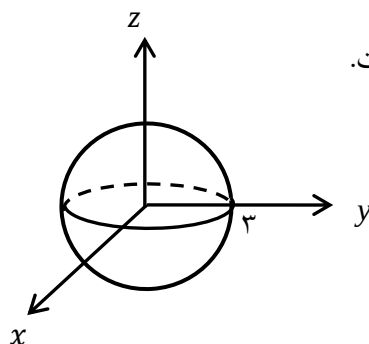
با توجه به مثلث قائم الزاویه در شکل بالا $\begin{cases} z = \rho \cos \phi \\ r = \rho \sin \phi \end{cases}$ از طرفی $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ ، بنابراین:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

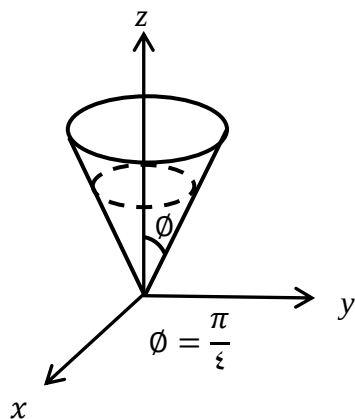
$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{همچنین داریم:}$$

توصیف چند معادله خاص در مختصات کروی

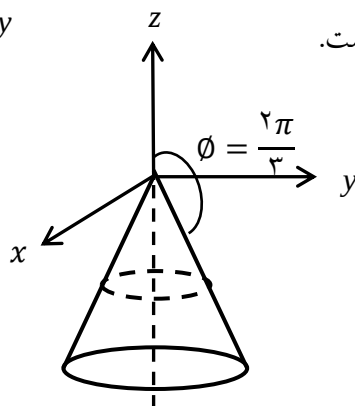
$\rho = 3$ ، معادله کره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۳ است.



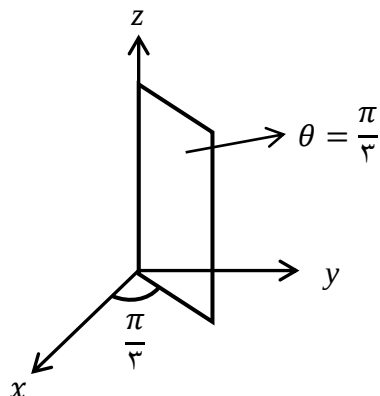
$\varphi = \frac{\pi}{4}$ ، معادله مخروط بالایی به مرکز مبدأ است.



$\varphi = \frac{2\pi}{3}$ ، معادله مخروط پایینی است.



$\theta = \frac{\pi}{3}$ ، صفحه موازی محور Z ها.



مثال: فرم دکارتی معادله کره $\varphi = \frac{\pi}{6}$ را پیدا کنید.

حل:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{\pi}{6} &\rightarrow \cos \varphi = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \rho \cos \varphi &= \frac{\sqrt{3}}{2} \rho \Rightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{z^2}{3} &= x^2 + y^2 \quad , \quad z \geq 0 \end{aligned}$$

معادله مخروط بالایی

مثال: معادله $\rho = \sin \varphi \sin \theta$ را توصیف کنید.

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \rho \sin \varphi \sin \theta \\ x^2 + y^2 + z^2 &= x \end{aligned}$$

با تبدیل به مربع کامل:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$$

معادله کره به مرکز $c\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ و شعاع $r = \frac{1}{2}$

چند ناحیه در مختصات کروی

الف) $\rho \geq 2$ ، نقاط بیرون از کره $\rho = 2$ است.ب) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ ، نقاط داخل مخروط $\varphi = \frac{\pi}{3}$ است.ج) $0 \leq \rho \leq 1$ ، $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، نیم کره بالایی است.

انتگرال سه گانه در مختصات کروی

فرض کنیم $w = f(x, y, z)$ و ناحیه E در فضا مستطیل کروی باشد.

$$E: a \leq \rho \leq b, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad c \leq \varphi \leq d$$

در این صورت:

$$\iiint_E f dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f \cdot \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

عبارت $\rho^2 \sin \varphi$ را عامل تبدیل می نامیم.مثال: $\iiint_E (x^2 + y^2 + z^2)^3 dV$ را بیابید که در آن

$$E: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \quad \text{کره توپر:}$$

حل: محاسبه این انتگرال در مختصات قائم آسان نیست.

$$E: 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \rho \leq 2$$

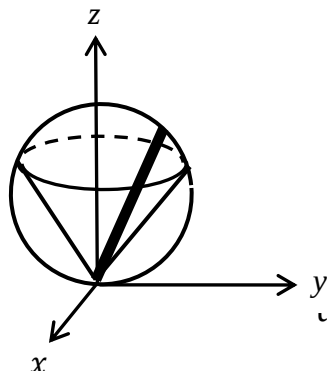
$$\iiint_E (x^2 + y^2 + z^2)^3 dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 (\rho^2)^3 \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \times \int_0^2 \rho^8 \, d\rho = \frac{2048}{9} \pi$$

معمولاً اگر ناحیه انتگرال گیری قسمتی از کره یا مخروط باشد، انتگرال گیری در مختصات کروی محاسبه آسان تری دارد.

مثال: ناحیه E بالای مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و زیر کره $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ قرار دارد، حجم جسم E را بیابید.

حل: معادله کره و مخروط را به فرم کروی تبدیل می کنیم.



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rho \cos \varphi = r \Rightarrow \rho \cos \varphi = \rho \sin \varphi$$

$$\tan \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

معادله مخروط

$$x^r + y^r + (z - 1)^r = 1 \Rightarrow x^r + y^r + z^r = rz$$

$$\rho^r = r \rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = r \cos \varphi$$

$$E: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{r}, 0 \leq \rho \leq r \cos \varphi$$

$$V = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{r}} \int_0^{r \cos \varphi} \rho^r \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{r}} \left(\frac{\rho^r}{r} \sin \varphi \right) \Big|_0^{r \cos \varphi} d\varphi d\theta$$

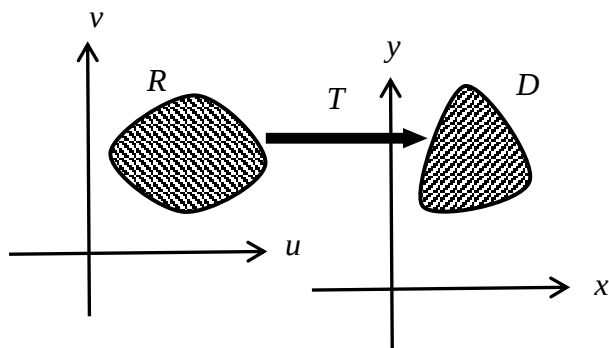
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{r}} \frac{1}{r} \cos^r \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{\frac{\pi}{r}} \frac{1}{r} \cos^r \theta \sin \theta d\theta = \pi$$

۳- تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

یک تبدیل T از صفحه uv به صفحه xy صورت زیر است

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2, \quad T(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$$

این تبدیل را به صورت $T: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ نیز نمایش می‌دهیم. در شکل زیر:



ناحیه D را تصویر ناحیه R با تبدیل T می‌نامیم و با $T(R) = D$ نشان می‌دهیم.

مثال: فرض کنیم $T: \begin{cases} x = \frac{v-u}{r} \\ y = \frac{ru+v}{r} \end{cases}$ ، تصویر مربع $R: 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ را با تبدیل T بدست آورید.

حل: با حل دستگاه بر حسب u و v داریم:

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y + rx \end{cases} \quad \begin{cases} u = 0 \rightarrow y - x = 0 \\ u = 1 \rightarrow y - x = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} v = 0 \rightarrow y + rx = 0 \\ v = 1 \rightarrow y + rx = 1 \end{cases}$$

T مربع $R: 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ را به متوازی الاضلاع $D: 0 \leq y - x \leq 1, 0 \leq y + 2x \leq 1$ تبدیل می‌کند. $T(R) = D$

مثال: تصویر دایره $u^2 + v^2 = 1$ را با تبدیل $T: \begin{cases} x = 2u \\ y = 4v \end{cases}$ بدست آورید.
حل:

$$\begin{cases} x = 2u \\ y = 4v \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

تصویر دایره $u^2 + v^2 = 1$ با تبدیل T بیضی $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ است.

تعریف: فرض کنیم $T: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ ، ژاکوبی تبدیل T به صورت زیر است.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

مثال: فرض کنید $T: \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ همان تغییر نقطه قطبی به دکارتی باشد. داریم:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

نکته: تحت شرایط مناسب:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}$$

قضیه: فرض کنیم $T: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ و $T(R) = D$ تحت شرایط مناسب داریم:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R f \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

مثال: $\iint_D (y - 2x)(y + 2x)^3 dA$ را حساب کنید.

$$D: 0 \leq y - 2x \leq 1, 0 \leq y + 2x \leq 2$$

حل: انتگرال گیری روی این متوازی الاضلاع پر محاسبه است. بنابراین تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = y - 2x \\ v = y + 2x \end{cases} \Rightarrow R: 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2$$

$T(R) = D$ تصویر ناحیه R است.

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = -\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}\iint_D (y - vx)(y + vx)^v dA &= \iint_R uv^v \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \frac{1}{5} \int_1^2 \int_1^2 uv^v du dv = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

مثال: $\iint_D y^v dA$ را حساب کنید.

$$D: 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq xy^v \leq 2$$

$$\text{حل: قرار می‌دهیم: } \begin{cases} u = xy^v \\ v = xy \end{cases} \text{ و } R: 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2$$

$$\begin{cases} x = \frac{v^v}{u} \\ y = \frac{u}{v} \end{cases} \text{ با حل دستگاه بالا بدست می‌آید:}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{v^v}{u^2} & \frac{v^{v-1}}{u} \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{u}$$

$$\begin{aligned}\iint_D y^v dA &= \iint_R \left(\frac{u}{v} \right)^v \left(\frac{1}{u} \right) du dv \\ &= \int_1^2 \int_1^2 \frac{u}{v^v} du dv = \int_1^2 u du \times \int_1^2 \frac{1}{v^v} dv = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

۴- تمرینات

۱- حجم زیر صفحه $3x + 2y + z = 12$ و بالای مستطیل $R: 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 3$ را پیدا کنید.

۲- حجم جسمی را بیابید که در یک هشتم اول محدود به سطح استوانه‌ای $z = 16 - x^2$ و صفحه $y = 5$ می‌باشد.

۳- انتگرال مکرر $\int_1^2 \int_1^2 \frac{x^v+1}{y^v+2} dx dy$ را حساب کنید.

۴- محاسبه کنید.

$$D: 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x \quad , \quad \iint_D x^v dA \quad (\text{الف})$$

$$D: \text{ ناحیه مثلث با رأس‌های } A(-1, 0), B(0, 2), C(2, 0) \text{ است.} \quad \iint_D (x + 2y) dA \quad (\text{ب})$$

$$D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^v \quad , \quad \iint_D \frac{y}{x^v+1} dA \quad (\text{ج})$$

۵- حجم چهار وجهی محدود به صفحه $3x + 2z + y = 6$ و سه صفحه مختصات را بیابید.

۶- $\iint_D y dA$ را بیابید که در آن D ناحیه داخل دایره $x^2 + y^2 = 4$ و بالای خط $x + y = 2$ است.

۷- حجم محدود به استوانه‌های $x^2 + y^2 = 1$ و $y^2 + z^2 = 1$ را حساب کنید.

۸- حجم محدود به سطح استوانه‌ای $z = x^2$ و سطح استوانه‌ای $y = x^2$ و دو صفحه $z = 0$ و $y = 4$ را پیدا کنید.

۹- با تعویض ناحیه انتگرال گیری، انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\text{الف) } \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^2} dy dx \quad \text{ب) } \int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}} dy dx$$

$$\text{ج) } \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) dx dy$$

۱۰- انتگرال $\iint_D y^2 dA$ را به دوروش حل کنید. $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x$

در تمرینات ۱۱ تا ۱۴ انتگرال بگیرید.

$$\text{۱۱- } \iint_D ye^x dA, \quad D: x^2 + y^2 \leq 4, \quad x, y \geq 0$$

۱۲- $\iint_D (4 - x^2 - y^2) dA$, D ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = 4$ و زیر خط $y = x$ در ربع اول است.

$$\text{۱۳- } \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$$

$$\text{۱۴- } \iint_D e^{-x^2-y^2} dA, \quad D: x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \leq 0, y \geq 0$$

۱۵- حجم جسم سه بعدی درون کره $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ و بیرون استوانه $x^2 + y^2 = 4$ را پیدا کنید.

۱۶- مساحت یک حلقه گل سه برگی $r = \cos 3\theta$ را پیدا کنید.

۱۷- ورقه مثلثی محدود به سه خط $x + y = 6$ و $x = 0$ و $y = x$ است، اگر چگالی سطحی این ناحیه $\rho = x^2$ باشد، جرم این ورقه را بدست آورید.

۱۸- جرم ورقه محدود به ناحیه $y = \sqrt{x}$ و $x = 0$ و $y = 1$ را با چگالی $\rho = x$ حساب کنید.

۱۹- چگالی ورقه دایره توپر $x^2 + y^2 \leq 1$ در هر نقطه متناسب با مربع فاصله اش تا مبدأ مختصات است. جرم آن را حساب کنید.

۲۰- محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \int_0^1 \int_1^2 \int_0^3 x^2 y z^3 dz dx dy \quad \text{ب) } \int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} xz dy dx dz$$

۲۱- $\iiint_E 2y dv$ را حساب کنید.

$$E: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y < \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq z \leq x$$

۲۲- حجم جسم محدود به استوانه $x^2 + y^2 = 9$ و دو صفحه $y + z = 5$ و $z = 1$ را پیدا کنید.

۲۳- $\iiint_E x dv$ را بیابید که در آن E محدود به سهمی گون $x = 4y^2 + 4z^2$ و صفحه $x = 4$ است.

۲۴- حجم جسم محدود به سطح استوانه‌ای $y = x^2$ و صفحه‌های $z = 0$ و $z = 4$ و $y = 9$ را بدست آورید.

۲۵- حجم جسم محدود به دو سهمی $z = x^2 + y^2$ و $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$ را پیدا کنید.

۲۶- حجم ناحیه بین کره $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ و سهمی $z = x^2 + y^2$ را بیابید. (از مختصات استوانه‌ای استفاده کنید.)

۲۷- انتگرال $\iiint_E (x^2 + y^2 + z^2)^4 dv$ را بیابید.

$$E: x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$$

۲۸- $\iiint_E (9 - x^2 - y^2) dv$ را بیابید.

$$E: x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0.$$

۲۹- حجم جسمی را بیابید که درون کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و محدود به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ می‌باشد.

۳۰- حجم جسمی را بیابید که بالای مخروط $\varphi = \frac{\pi}{3}$ و پایین کره $\rho = 4 \cos \varphi$ می‌باشد.

۳۱- جرم نیم کره توپر $0 \leq z \leq 4, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ را بیابید که چگالی آن در هر نقطه متناسب با فاصله اش تا مبدأ مختصات است.

۳۲- جرم داخل چهار وجهی محدود به صفحه $x + y + z = 1$ و صفحه مختصات در یک هشتم اول را با چگالی $\rho = y$ بیابید.

۳۳- $\iint_D (x - 3y) dA$ را با تغییر متغیر $\begin{cases} x = 2u + v \\ y = u + 2v \end{cases}$ بدست آورید که در آن D مثلثی با رأس‌های $(0, 0)$ و $(1, 2)$ و $(2, 1)$ است.

۳۴- انتگرال $\iint_D (x - y)^2 e^{2x+3y} dx dy$ را پیدا کنید که در آن D متوازی الاضلاع محدود به خطوط زیر است.

$$D: \begin{cases} x - y = 1, & 2x + 3y = 0 \\ x - y = 2, & 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

۳۵- مساحت بیضی $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$ را با تغییر متغیر مناسب بیابید.

۳۶- $\iint_D xy dA$ را بیابید که در آن D ناحیه‌ای در ربع اول محدود خطوط و منحنی‌های زیر است.

$$D: \begin{cases} y = x, & xy = 1 \\ y = 3x, & xy = 3 \end{cases}$$

فصل نهم

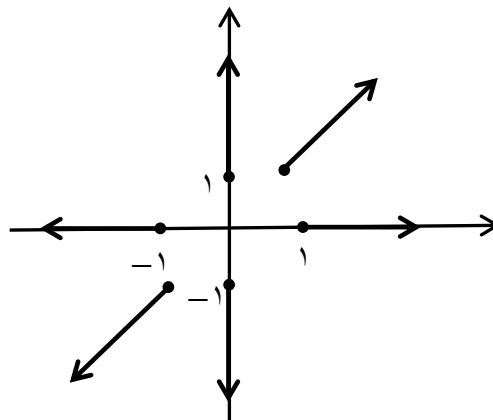
میدان برداری و انتگرال خطی

میدان برداری به هر نقطه از صفحه یا فضا یک بردار نسبت می‌دهد. جریان سیال، جاذبه زمین نمونه‌هایی از میدان‌های برداری هستند. انتگرال خطی روی یک مسیر در صفحه یا فضا تعریف می‌شود و با استفاده از آن انتگرال خطی روی میدان برداری بیان می‌شود.

۱- میدان‌های برداری

هر تابع به صورت $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow V_2$ یک میدان برداری است که به هر نقطه از صفحه یک بردار در صفحه نسبت می‌دهد. مثال: اگر $F(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ ، میدان برداری F روی چند نقطه محاسبه شده است.

$$\begin{array}{ll} F(1, 0) = \vec{i} & , \quad F(-1, 0) = -\vec{i} \\ F(0, 1) = \vec{j} & , \quad F(0, -1) = -\vec{j} \\ F(1, 1) = \vec{i} + \vec{j} & , \quad F(-1, -1) = -\vec{i} - \vec{j} \end{array}$$



به طور مشابه $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow V_3$ میدان برداری است که به هر نقطه از فضا یک بردار در فضا را نسبت می‌دهد. نیروی جاذبه، سرعت جریان آب نمونه‌هایی از میدان‌های برداری هستند.

میدان‌های پایستار

تعریف: میدان دو بعدی یا سه بعدی F را پایستار می‌نامیم، هرگاه تابعی اسکالر مانند f باشد که: $\nabla f = F$

فرض کنیم $f = x^2 y^4$ ، داریم: $\nabla f = 2xy^4 \vec{i} + 4x^2 y^3 \vec{j}$ بنابراین میدان $F = 2xy^4 \vec{i} + 4x^2 y^3 \vec{j}$ پایستار است. اکنون این سوال مطرح است اگر F میدان برداری دلخواهی باشد، چگونه تشخیص دهیم F پایستار است و f چگونه محاسبه می شود؟ توجه. در رابطه $F = \nabla f$ ، f را تابع پتانسیل F می نامیم.

پایستاری میدان دو بعدی

فرض کنیم $F = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ تحت شرایط معین:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Leftrightarrow F \text{ پایستار است}$$

و در صورت پایستار بودن F یک f هست که $F = \nabla f$ و f به صورت زیر محاسبه می شود.

$$f = \int P dx \cup \int Q dy$$

علامت اجتماع به این معنی هست که جملات مشترک در هر دو انتگرال یک بار محاسبه می شود. میدان $F = x^2 y \vec{i} + xy^3 \vec{j}$ پایستار نیست.

$$\begin{cases} P = x^2 y \\ Q = xy^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

مثال: نشان دهید $F = y^2 \cos x \vec{i} + 2y \sin x \vec{j}$ پایستار است و تابع اسکالر f را طوری بیابید که $F = \nabla f$ حل:

$$\begin{cases} P = y^2 \cos x \\ Q = 2y \sin x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y \cos x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$f = \int P dx \cup \int Q dy = \int y^2 \cos x dx \cup \int 2y \sin x dy$$

$$f = (y^2 \sin x) \cup (y^2 \sin x) = y^2 \sin x$$

$$f = y^2 \sin x$$

پایستاری میدان سه بعدی

تعریف: فرض کنیم $F = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ و $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ عملگر باشد. میدان کرل یا تاو F به صورت زیر است.

$$\text{curl} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

با محاسبه ترمینال داریم:

$$\text{curl} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

فرض کنیم $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ تحت شرایط معین: $\text{curl} F = \vec{0} \iff F$ پایستار است
در صورت پایستار بودن F داریم:

$$f = \int P dx \cup \int Q dy \cup \int R dz$$

توجه: در حالتی که $F = P\vec{i} + Q\vec{j}$ ، با قرار دادن $R = 0$ شرط پایستاری F همان $\text{curl} F = \vec{0}$ است.

مثال: اگر $F = xyz^2\vec{i} + x^2z^2\vec{j} + x^2yz^2\vec{k}$ نشان دهید F پایستار است و تابع f را طوری بیابید که $F = \nabla f$

$$\text{curl} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz^2 & x^2z^2 & x^2yz^2 \end{vmatrix}$$

حل:

$$= (x^2z^2 - x^2z^2)\vec{i} - (xyz^2 - xyz^2)\vec{j} + (x^2z^2 - x^2z^2)\vec{k} = \vec{0}$$

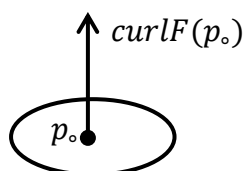
$$f = \int P dx \cup \int Q dy \cup \int R dz$$

$$f = \int (xyz^2) dx \cup \int x^2z^2 dy \cup \int x^2yz^2 dz$$

$$= (x^2yz^2) \cup (x^2yz^2) \cup (x^2yz^2) = x^2yz^2$$

$$f = x^2yz^2$$

تعبیر فیزیکی کرل: اگر F میدان سرعت سیالی مانند آب باشد، دوران سیال نقطه p حول محوری است که در جهت بردار $\text{curl} F(p)$ است.



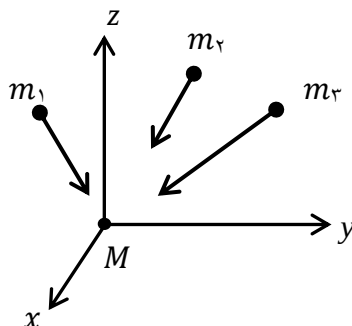
در حالی که $\text{curl} F(p) = 0$ ، در نقطه p سیال دوران ندارد.

مثال: قانون گرانشی نیوتن بین دو جسم با جرم‌های m و M با قرار دادن M در مبدأ مختصات برابر است با:

$$F(x, y, z) = -\frac{mMG}{r^3} \cdot \langle x, y, z \rangle$$

که در آن G ثابت گرانشی و r فاصله بین دو جرم است: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

به‌خصوص در حالتی که M جرم کره زمین باشد F نیروی میدان جاذبه زمین به جسمی به جرم m است.



با محاسبه معلوم می‌شود F میدان پایستار است، یعنی $F = \nabla f$ و داریم:

$$f = -\frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

۲- انتگرال خط

انتگرال خط نسبت به طول قوس

فرض کنیم منحنی $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ، $a \leq t \leq b$ پیوسته باشد. طول منحنی برابر است با:

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

قرار می‌دهیم:

$$S(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du$$

در این صورت:

$$dS = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

انتگرال خط تابع $f(x, y)$ روی مسیر C نسبت به طول قوس به صورت زیر است:

$$\int_C f(x, y) dS = \int_a^b f. \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

مثال: انتگرال خط $\int_C \frac{y}{x} dS$ را بیابید. $C: \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ ، $1 \leq t \leq 2$

حل:

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \sqrt{4 + 9t^2} dt \\ \int_C \frac{y}{x} dS &= \int_1^2 \frac{t^3}{t^2} \sqrt{4 + 9t^2} dt = \int_1^2 \sqrt{1 + t^2} \cdot t dt = \frac{(20)^{\frac{3}{2}} - (8)^{\frac{3}{2}}}{12} \end{aligned}$$

جرم یک سیم نازک

فرض کنیم سیم نازکی به معادله پارامتری C در صفحه باشد و $\rho(x, y)$ چگالی جرم در واحد طول $\left(\rho = \frac{\text{جرم}}{\text{طول}}\right)$ و m جرم این سیم

باشد در این صورت:

$$m = \int_C \rho(x, y) ds$$

مثال: سیم نازکی به شکل منحنی $x = y^3$ ، $0 \leq y \leq 1$ است و چگالی آن $\rho(x, y) = x$ می‌باشد. جرم این سیم را پیدا کنید.

حل: معادله پارامتری منحنی:

$$\begin{aligned} C: \begin{cases} x = t^3 \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ ds &= \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \sqrt{9t^4 + 1} dt \end{aligned}$$

$$m = \int_C \rho(x, y) ds = \int_C x ds = \int_1^1 t^2 \sqrt{4t^2 + 1} dt = \frac{\sqrt{10}}{54}$$

انتگرال خط روی مسیر

فرض کنیم $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, a \leq t \leq b$ منحنی جهت دار در صفحه، انتگرال خط $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ روی منحنی C به صورت زیر است:

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b P(x'(t)) dt + Q(y'(t)) dt$$

مثال: انتگرال خط $\int_C y dx + x dy$ را بیابید.

$$C: \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

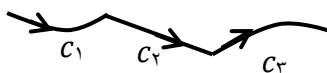
حل:

$$\begin{cases} dx = 2t dt \\ dy = 2 dt \end{cases}$$

$$\int_C y dx + x dy = \int_0^1 (2t)(2t) dt + (t^2)(2) dt = 2$$

نکته:

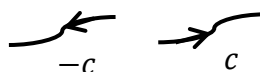
الف) فرض کنیم C از چند منحنی تشکیل شده باشد. $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ در این صورت:



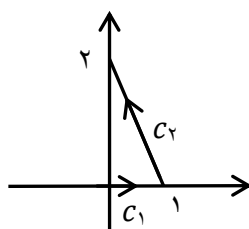
$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

ب) اگر $-C$ عکس جهت منحنی C باشد، داریم:

$$\int_{-C} P dx + Q dy = - \int_C P dx + Q dy$$



مثال: انتگرال خط $\int_C x^2 dx + y dy$ را بیابید. که در آن C دو ضلع مثلث زیر است.



حل:

$$C_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{C_1} x^2 dx + y dy = \int_0^1 (t)(t) dt = \frac{1}{3}$$

معادله خطی که از $(0, 2)$ و $(1, 0)$ عبور می‌کند $x + \frac{y}{2} = 1$ است.

$$-C_2: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$-C_2$ عکس جهت منحنی C_2 در شکل است.

$$\int_{C_2} x^2 dx + y dy = - \int_{-C_2} x^2 dx + y dy = - \int_1^0 (t^2) dt + (2 - 2t)(-2 dt) = \frac{5}{6}$$

بنابراین:

$$\int_C x^2 dx + y dy = \int_{C_1} x^2 dx + y dy + \int_{C_2} x^2 dx + y dy = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$$

انتگرال خط روی مسیر در فضا

اگر $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$ منحنی جهت دار در فضا باشد، انتگرال خط در فضا به طور مشابه تعریف می‌شود.

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = \int_a^b P \cdot x'(t) dt + Q \cdot y'(t) dt + R \cdot z'(t) dt$$

مثال: انتگرال $\int_C z dx + y dy + x dz$ را محاسبه کنید.

$$C: \begin{cases} x = 4 \\ y = t^2 \\ z = -4t \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 2$$

حل:

$$\begin{cases} dx = 0 \\ dy = 2t dt \\ dz = -4 dt \end{cases}$$

$$\int_C z dx + y dy + x dz = \int_1^2 0 + (t^2)(2t) dt + (4)(-4) dt = -\frac{17}{2}$$

انتگرال خط میدان برداری

فرض کنیم $F = P\vec{i} + Q\vec{j}$ میدان برداری دو بعدی و $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ تابع برداری با منحنی C باشد.

انتگرال خط F روی C برابر است با:

$$\int_C F \cdot dr = \int_C F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_C P dx + Q dy$$

به طور مشابه: اگر $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ و $r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ تابع برداری با منحنی C باشد، انتگرال

خط میدان F روی C برابر است با:

$$\int_C F \cdot dr = \int_C F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_C P dx + Q dy + R dz$$

تعبیر فیزیکی انتگرال خط

بنا به فیزیک مقدماتی کار انجام شده با نیروی ثابت $\vec{F}$ روی خط مستقیم از نقطه A تا B برابر است با:

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

اکنون اگر $\vec{F}$ میدان برداری دوبعدی یا سه بعدی باشد، کار انجام شده با نیروی $\vec{F}$ روی مسیر C که تابع برداری $\vec{r}(t)$ معلوم شده است برابر است با:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

مثال: اگر $\vec{F} = y^2\vec{i} + xy\vec{j}$ ، انتگرال خط $\vec{F}$ را روی $\vec{r}(t) = -t\vec{i} + 2t^2\vec{j}$ ، $0 \leq t \leq 1$ بیابید.
حل: فرض کنیم C منحنی $\vec{r}(t)$ باشد.

$$C: \begin{cases} x = -t \\ y = 2t^2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C Pdx + Qdy = \int_C y^2 dx + xy dy \\ &= \int_0^1 (2t^2)(-1)dt + (2t^2)(2t)dt = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

مثال: کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ بر روی ذره‌ای که روی نیم دایره پایین $x^2 + y^2 = 1$ ، $y \leq 0$ حرکت می‌کند را بیابید. (در جهت پاد ساعت گرد)
حل: فرض کنیم C نیم دایره پایینی باشد.

$$C: \vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}, \quad \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \pi \leq t \leq 2\pi \\ W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy = \int_{\pi}^{2\pi} -\sin^2 t dt - \cos^2 t dt = -\pi \end{aligned}$$

کار منفی به این معنی است که برآیند جمع نیروی $\vec{F}$ روی نیم دایره پایینی در جهت حرکت جسم نیست.

مثال: کار انجام شده با نیروی $\vec{F} = x\vec{i} + yz\vec{k}$ روی ذره‌ای را بیابید که از نقطه $A(0, 1, 0)$ تا $B(1, 2, 3)$ روی خط مستقیم حرکت می‌کند.

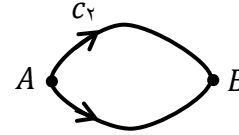
$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \langle 1, 1, 3 \rangle$$

معادله پاره خطی که از A تا B برابر است با:

$$C: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 3t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C xdx + yzdz = \int_0^1 tdt + (1+t)(3t)(3)dt = 8$$

تعریف: گوئیم $\int_C F \cdot dr$ مستقل از مسیر است، هرگاه برای هر دو مسیر C_1 و C_2 از نقطه A به نقطه B داشته باشیم:

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr$$


توجه: $\int_C F \cdot dr$ مستقل از مسیر است $\Leftrightarrow$ روی مسیر بسته $\cdot$ $\int_C F \cdot dr = 0$

قضیه اساسی انتگرال خط

فرض کنیم منحنی C با تابع برداری $a \leq t \leq b$, $r(t)$ مشخص باشد و $A = r(a)$ و $B = r(b)$ و f تابعی دو یا سه متغیره باشد، تحت شرایط معین:

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a)) = f(B) - f(A)$$



اثبات در حالتی که F دو بعدی است:

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f \cdot dr &= \int_C \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_a^b f'(r(t)) dt = f(r(b)) - f(r(a)) \end{aligned}$$

توجه: فرض کنیم F پایستار باشد پس یک f هست که $F = \nabla f$ و بنا به قضیه اساسی، $\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr$ مستقل از مسیر است.

مثال: اگر $F = \frac{yx}{1+y} \vec{i} - \left(\frac{x^2}{(1+y)^2} \right) \vec{j}$ انتگرال $\int_C F \cdot dr$ را حساب کنید.

$$C: r(t) = t^2 \vec{i} + (t^2 + 1) \vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

حل: محاسبه مستقیم این انتگرال پر محاسبه و یا مشکل است. در اینجا از قضیه اساسی استفاده می‌کنیم.

نشان می‌دهیم، F پایستار است.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{yx}{(1+y)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

پس یک f هست که: $F = \nabla f$

$$f = \int P dx \cup \int Q dy = \int \frac{yx}{1+y} dx \cup \int \frac{-x^2}{(1+y)^2} dy$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{x^2}{1+y} \right) \cup \left(\frac{x^2}{1+y} \right) = \frac{x^2}{1+y} \\ &f = \frac{x^2}{1+y} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} r(0) = (0, 1) \\ r(1) = (1, 2) \end{cases} \quad \text{از طرفی:}$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f \Big|_{(0,1)}^{(1,2)} = f(1,2) - f(0,1) = \frac{1}{2}$$

مثال: اگر $F = \frac{yx}{1+y} \mathbf{i} - \frac{x^2}{(1+y)^2}$ ، انتگرال $\int_C F \cdot dr$ را پیدا کنید. $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (بیضی در جهت پاد ساعت گرد)

حل: در مثال قبل دیدیم که F پایستار، و لذا $\int_C F \cdot dr$ مستقل از مسیر و C مسیری بسته است، بنابراین:

$$\int_C F \cdot dr = 0$$

مثال: محاسبه کنید.

$$\int_{(1,1)}^{(1,2)} (yx + y^2)dx + (2xy)dy$$

حل: این نوع سوال یعنی انتگرال مستقل از مسیر است (در غیر این صورت، صورت سوال غلط است) و C مسیری دلخواه از $A(1,1)$ تا $B(1,2)$ است.

$$F = yx + y^2 \mathbf{i} + 2xy \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y = \frac{\partial P}{\partial y} \quad F \text{ پایستار است.}$$

$$f = \int Pdx \cup \int Qdy = x^2 + xy^2$$

$$\int_{(1,1)}^{(1,2)} (yx + y^2)dx + (2xy)dy = \int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr$$

$$= f \Big|_A^B = f(1,2) - f(1,1) = 3$$

مثال: کار انجام شده با نیروی $F = y^2 \mathbf{i} + (2xy + z^2) \mathbf{j} + 2yz \mathbf{k}$ بر روی ذره‌ای که روی مسیر دلخواه از $A(0,0,0)$ تا $A(1,-1,0)$ حرکت می‌کند را پیدا کنید.

حل: نشان می‌دهیم، F پایستار است.

$$\text{curl} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & 2xy + z^2 & 2yz \end{vmatrix} = (yz - yz) \mathbf{i} + (0 - 0) \mathbf{j} + (2y - 2y) \mathbf{k} = \vec{0}$$

$$F = \nabla f$$

$$f = \int Pdx \cup \int Qdy \cup \int Rdz$$

$$f = \int y^2 dx \cup \int (2xy + z^2) dy \cup \int 2yz dz$$

$$f = (xy^z) \cup (xy^z + yz^z) \cup (yz^z) = xy^z + yz^z$$

$$f = xy^z + yz^z$$

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f \Big|_{(0,0,0)}^{(1,-1,0)} = f(1,-1,0) - f(0,0,0) = -1$$

مثال: انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,\frac{\pi}{4},\pi)} \sin y \, dx + (x \cos y + \cos z) \, dy - y \sin z \, dz$$

$$F = \sin y \vec{i} + (x \cos y + \cos z) \vec{j} - y \sin z \vec{k} \quad \text{حل: قرار می دهیم:}$$

$$\text{curl} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin y & x \cos y + \cos z & -y \sin z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$F = \nabla f$$

$$f = \int P \, dx \cup \int Q \, dy \cup \int R \, dz$$

$$f = \int \sin y \, dx \cup \int (x \cos y + \cos z) \, dy \cup \int -y \sin z \, dz$$

$$f = (x \sin y) \cup (x \sin y + y \cos z) \cup (y \cos z)$$

$$f = x \sin y + y \cos z$$

اگر C منحنی $r(t)$ از $A(0,0,0)$ تا $B(1, \frac{\pi}{4}, \pi)$ باشد، داریم:

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,\frac{\pi}{4},\pi)} \sin y \, dx + (x \cos y + \cos z) \, dy - y \sin z \, dz = \int_C F \cdot dr$$

$$= \int_C \nabla f \cdot dr = f \Big|_A^B = f(B) - f(A) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

۳- تمرینات

کدامیک از میدانهای زیر پایستار است، در صورتی که F پایستار باشد تابع پتانسیل f را بیابید.

$$F = x^z \vec{i} + y^z \vec{j} \quad (\text{ب})$$

$$F = x^z \vec{i} + xy^z \vec{j} \quad (\text{الف})$$

$$F = z^z \vec{i} + xy \vec{j} + y^z z \vec{k} \quad (\text{د})$$

$$F = (xz + y) \vec{i} + x \vec{j} \quad (\text{ج})$$

$$F = xz \vec{i} + x^z \vec{k} \quad (\text{و})$$

$$F = yz \vec{i} + xz \vec{j} + (xy + yz) \vec{k} \quad (\text{ه})$$

۲- اگر $F = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ با قرار دادن $R = \bullet$ نشان دهید شرط پایداری F معادل است با $\text{curl} F = \bullet$

۳- اگر $F = -\frac{mMG}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \cdot \langle x, y, z \rangle$ نیروی گرانشی بین دو جسم با جرم‌های m و M باشند، نشان دهید F پایستار است و تابع پتانسیل F را بیابید. (G ثابت گرانشی است)

۴- انتگرال خط $\int_C x^3 ds$ را حساب کنید. $C: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$

۵- $\int_C x e^y ds$ را حساب کنید.

$$C: \begin{cases} x = e^t \\ y = t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

۶- انتگرال‌های خط زیر را حساب کنید.

الف $C: \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$ ، $\int_C y^2 x dx$

ب $C: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t + 1 \end{cases}, 1 \leq t \leq 2$ ، $\int_C xy dx + x^2 dy$

ج $C: \begin{cases} x = 5 \\ y = t^2 \\ z = t^4 \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$ ، $\int_C z dx + x dy + y dz$

۷- انتگرال خط $\int_C -x^2 dx + yx dy$ را بیابید که در آن C مسیری است از پاره خط $A(0, 0)$ تا $B(1, 2)$ و از $B(1, 2)$ تا $C(0, 3)$ است.

۸- سیم نازکی به شکل نیم دایره پایینی $y \leq 0, x^2 + y^2 = 1$ با چگالی $\rho(x, y) = y^2$ می‌باشد، جرم این سیم را پیدا کنید.

۹- انتگرال خط $\int_C F \cdot dr$ را بیابید.

الف $C: r(t) = t^2 \vec{i} + t^3 \vec{j}, 0 \leq t \leq 1$ ، $F = x^2 y \vec{i} - x \vec{j}$

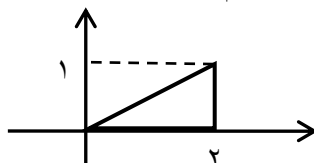
ب $C: r(t) = t \vec{i} + (t+1) \vec{j}, 1 \leq t \leq 2$ ، $F = (x+y) \vec{i} + y^2 \vec{j}$

ج $C: r(t) = t^2 \vec{i} - t^2 \vec{j} + t \vec{k}, 0 \leq t \leq 1$ ، $F = \sin x \vec{i} + \cos y \vec{j} + xz \vec{k}$

۱۰- کار انجام شده با نیروی $F = x \vec{i} + (x+y) \vec{j}$ را هنگام حرکت ذره‌ای روی منحنی چرخزاد زیر را بدست آورید.

$$r(t) = (t - \sin t) \vec{i} + (1 - \cos t) \vec{j}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

۱۱- اگر $F = y^2 \vec{i} + xy \vec{j}$ ، کار انجام شده با نیروی F هنگام حرکت ذره‌ای روی مثلث زیر در جهت ساعت گرد را بدست آورید.



۱۲- اگر $F = e^x \vec{i} + e^y \vec{j}$ ، کار انجام شده حرکت ذره‌ای روی نیمه بالایی بیضی $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, y \geq 0$ را حساب کنید.

۱۳- $\int_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$ را حساب کنید.

۱۴- کار انجام شده با نیروی $F = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ بر روی ذره‌ای که روی پاره خط $A(1, 0, 0)$ تا $B(2, 0, 3)$ حرکت می‌کند را حساب کنید.

۱۵- نشان دهید $F = y\vec{i} + (x+2y)\vec{j}$ پایستار است و سپس $\int_C F \cdot dr$ را بیابید.

$$C: r(t) = \frac{1}{t^2+1}\vec{i} + \sqrt{t^3+1}\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

۱۶- اگر $F = (2x+y^3)\vec{i} + (3y^2x)\vec{j}$ ، نشان دهید $\int_C F \cdot dr$ روی مرز مربع با رأس $(0, 0)$ های $(0, 1)$ و $(1, 0)$ و $(1, 1)$ صفر است.

راهنمایی: نشان دهید F پایستار است.

۱۷- محاسبه کنید.

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} x^2 dx + y^3 dy + z^4 dz \quad \text{الف}$$

$$\int_{(0,0,0)}^{(1, \frac{\pi}{4}, \pi)} \sin y dx + (x \cos y + \cos z) dy - y \sin z dz \quad \text{ب}$$

۱۸- $\int_C F \cdot dr$ را به دست آورید.

$$F = e^y \vec{i} + xey \vec{j} + (z+1)e^z \vec{k}, \quad C: r(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

۱۹- کار انجام شده با نیروی $F = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ را روی ذره‌ای که از نقطه $A(1, 1, 1)$ تا $B(1, 2, 3)$ حرکت می‌کند را پیدا کنید.

۲۰- تابع برداری $F = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$ مفروض است.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{الف}$$

ب) اگر C دایره $C: r(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}, 0 \leq t \leq 2\pi$ باشد. به طور مستقیم نشان دهید: $\int_C F \cdot dr \neq 0$ (مبدأ مختصات داخل دایره است)

ج) اگر $f = -\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ نشان دهید $F = \nabla f$ و با استفاده از آن $\int_C F \cdot dr$ را حساب کنید.

$$C: r(t) = (t^2+1)\vec{i} + (t^4+1)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(منحنی C در ربع اول است و از مبدأ هم عبور نمی‌کند)

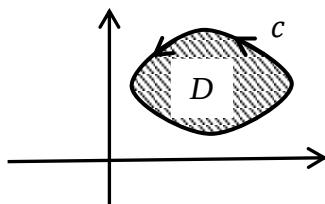
فصل دهم

سه قضیه مهم و انتگرال روی سطح

انتگرال سطحی گسترش مفهوم انتگرال روی یک سطح در فضا است. همچنین با چند قضیه ارتباط بین انتگرال روی داخل یک ناحیه و انتگرال روی مرز آن ناحیه معلوم می‌شود.

۱- قضیه گرین

در اینجا می‌خواهیم بین انتگرال روی یک ناحیه در صفحه (انتگرال دوگانه) و انتگرال روی مرز آن ناحیه (انتگرال خط) ارتباط برقرار کنیم. **تعریف:** فرض کنیم C منحنی بسته و D ناحیه داخل منحنی C در صفحه باشد، جهت C را مثبت می‌نامیم هرگاه هنگام حرکت روی مرز C ، ناحیه در سمت چپ آن قرار گیرد.



توجه: علامت $\oint_C$ به این معنی است که مسیر بسته و جهت آن مثبت است.

قضیه گرین: فرض کنیم C منحنی بسته با جهت مثبت و D ناحیه داخل آن باشد، تحت شرایط مناسب:

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

در حالت $F = P\vec{i} + Q\vec{j}$ داریم:

$$\oint_C F \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

نکته: اگر F پایستار باشد، بنا به قضیه گرین $\oint_C F \cdot d\vec{r} = 0$

مثال: محاسبه کنید. $\oint_C (y^2 + \sqrt{x^2 + 1})dx + (2x + \sin^2 y)dy$ که در آن C مرز مستطیل D است.

$$D: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$$

حل: بدون استفاده از قضیه گرین باید چهار انتگرال خط روی ۴ ضلع مستطیل را جداگانه حساب و جمع کنیم. اما با قضیه گرین، محاسبه انتگرال ساده‌تر می‌شود.

$$\oint_C (y^2 + \sqrt{x^2 + 1})dx + (2x + \sin^2 y)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

$$= \iint_D (2) - (2y) dA = \int_1^2 \int_0^1 (2 - 2y) dy dx = 1$$

مثال: کار انجام شده با نیروی $F = 2x^2\vec{i} + x^3\vec{j}$ بر روی ذره‌ای که یک دور کامل روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ حرکت می‌کند را حساب کنید. (در جهت ساعت گرد)

حل:

$$w = \int_C F \cdot dr = - \oint_C F \cdot dr = - \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

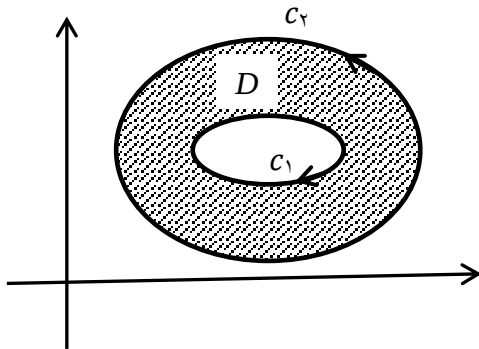
$$= - \iint_D (2x^2 - 2x^2) dA = - \iint_D x^2 dA$$

دایره توپر $D: x^2 + y^2 \leq 1$

$D: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$

$$w = - \iint_D x^2 dA = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta = - \frac{\pi}{4}$$

توجه: در حالتی که ناحیه D دارای یک حفره باشد باز هم قضیه گرین برقرار است.

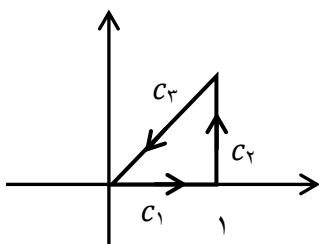


$$C = C_1 \cup C_2$$

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

مثال: درستی قضیه گرین را برای میدان $F = -2y\vec{i} + 3x\vec{j}$ روی ناحیه مثلث محدود به سه خط $y = 0$ و $x = 1$ و $y = x$ ربع اول تحقیق کنید.

حل: ابتدا انتگرال خط را روی سه ضلع مثلث به دست می‌آوریم.



$$C_1: \begin{cases} y = 0 \\ x = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_1} -2ydx + 3xdy = 0$$

$$C_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{C_r} F \cdot dr = \int_{C_r} -ry dx + rx dy = \int_0^1 0 + r dt = r$$

$$C_r: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{C_r} F \cdot dr = - \int_{-C_r} -ry dx + rx dy = - \int_1^0 (-rt + rt) dt = -\frac{1}{r}$$

$$C = C_1 \cup C_r \cup C_r$$

$$\oint_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_r} F \cdot dr + \int_{C_r} F \cdot dr = 0 + r + \left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{5}{r}$$

انتگرال دوگانه را روی مثلث حساب می‌کنیم:

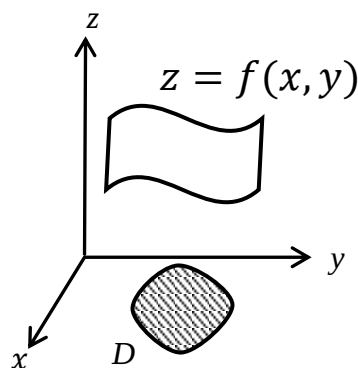
$$F = -ry\vec{i} + rx\vec{j}$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D r - (-r) dA = \iint_D 2dA = 2 \times (\text{مساحت } D) = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

۲- انتگرال روی سطح

مساحت یک سطح در فضا

فرض کنیم سطح S در فضا با معادله $z = f(x, y)$ روی ناحیه D $(x, y) \in D$ در صفحه xy معلوم شده باشد. تحت شرایط معین مساحت سطح S به صورت زیر است.



$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dA$$

مثال: مساحت قسمتی از صفحه $4 = x + y + z$ را بیابید که درون استوانه $x^2 + y^2 = 1$ قرار دارد.

$$f = z = 4 - x - y$$

حل:

$$D: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$A(S) = \iint_D \sqrt{(z_x)^2 + (z_y)^2 + 1} dA = \iint_D \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1} dA$$

$$= \sqrt{3} \iint_D dA = \sqrt{3} \times (\text{مساحت } D) = \sqrt{3} \pi$$

مثال: مساحت قسمتی از سطح $z = \frac{2}{3}\sqrt{x^2}$ را بیابید که در صفحه xy محدود به مستطیل زیر است.

$$D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

حل:

$$z = \frac{2}{3}\sqrt{x^2} \rightarrow z_x = \frac{2}{3}, z_y = 0$$

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \sqrt{(z_x)^2 + (z_y)^2 + 1} dA = \iint_D \sqrt{\frac{4}{9} + 1} dA \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{\frac{13}{9}} dx dy = \frac{2}{3}(\sqrt{13} - 1) \end{aligned}$$

انتگرال سطحی تابع اسکالر f

فرض کنیم $w = f(x, y, z)$ و S سطحی در فضا با معادله $z = g(x, y)$ محدود به ناحیه D در صفحه xy باشد. انتگرال سطحی f روی S به صورت زیر است

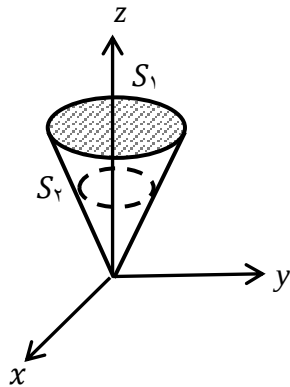
$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} dA$$

در حالت $f = 1$ ، مساحت سطح $A(S) = \iint_S dS$

مثال: $\iint_S z^2 dS$ را بیابید که در آن S سطح جسم محدود به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و صفحه $z = 2$ است.

حل: سطح S از اجتماع دو سطح S_1 و S_2 تشکیل شده است.

$$\begin{aligned} S_1: z &= 2, D: x^2 + y^2 \leq 4 \\ z_x &= 0, z_y = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \iint_{S_1} z^2 dS &= \iint_D (2)^2 \sqrt{(z_x)^2 + (z_y)^2 + 1} dA \\ &= \iint_D 4 \sqrt{1} dA = 4 (\text{مساحت } D) = 16\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2: z &= \sqrt{x^2 + y^2}, D: x^2 + y^2 \leq 4 \\ z_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} z^2 dS &= \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \sqrt{(z_x)^2 + (z_y)^2 + 1} dA = \sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2) dA \\ D: 0 &\leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{r} \iint_D (x^2 + y^2) dA = \sqrt{r} \int_0^{2\pi} \int_0^r r^2 \cdot r dr d\theta = 8\sqrt{r} \pi$$

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$\iint_S z^2 dS = \iint_{S_1} z^2 dS + \iint_{S_2} z^2 dS = 8\sqrt{r} \pi + 16\pi$$

جرم یک سطح در فضا

فرض کنیم S یک سطح در فضا و $\rho(x, y, z)$ چگالی جرم بر واحد سطح و m جرم این سطح باشد. داریم:

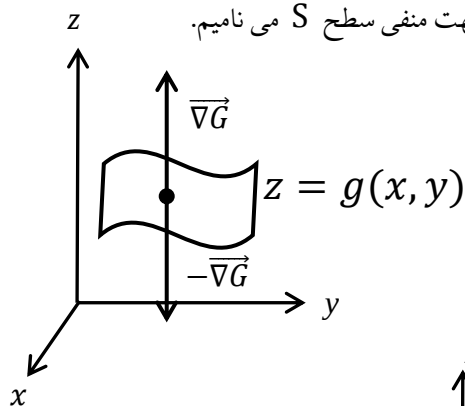
$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS$$

سطح جهت‌دار:

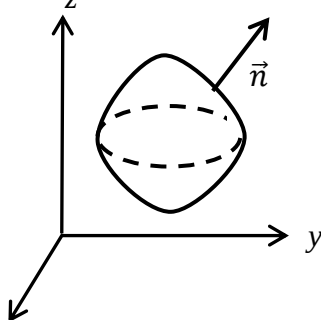
همانند منحنی‌ها می‌توان برای سطوح نیز جهت در نظر گرفت اگر S با معادله $z = g(x, y)$ مشخص باشد. قرار می‌دهیم:

$$G = z - g(x, y)$$

بردار ∇G بر سطح S عمود است و آن را جهت مثبت S و $-\nabla G$ را جهت منفی سطح S می‌نامیم.



توجه: در سطوح بسته (مرز یک جسم در فضا) جهت رو به بیرون است



انتگرال سطحی میدان F

تعریف: فرض کنیم $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ میدان برداری و S سطح جهت $\vec{r}$ بردار واحد قائم بر سطح S در جهت مثبت باشد.

انتگرال سطحی میدان F روی S به صورت زیر است:

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S F \cdot \vec{n} dS$$

توجه: $F \cdot \vec{n}$ تابع اسکالر است.

فرض کنیم $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ و S با سطح $z = g(x, y)$ محدود به ناحیه D در صفحه xy باشد.

$$\vec{n} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} \quad \text{و} \quad G = z - g(x, y)$$

$\vec{n}$ بردار عمود واحد بر سطح S در جهت مثبت است. با محاسبه معلوم می‌شود:

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iint_D (-Pg_x - Qg_y + R) dA$$

تعبیر فیزیکی $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

اگر $\mathbf{F}$ میدان سرعت سیالی باشد، $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ مقدار سیالی است که در واحد زمان از سطح S خارج می‌شود. این انتگرال را شار میدان $\mathbf{F}$ از روی سطح S می‌نامند.

مثال: شار میدان $\mathbf{F} = x^2\vec{i} + z^2\vec{j} + y^2\vec{k}$ را روی صفحه $z = 1 + 2x$ محدود به مستطیل $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ را در جهت مثبت به دست آورید.

$$g = z = 1 + 2x \quad \text{حل:}$$

$$z_x = 2, z_y = 0$$

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (-Pz_x - Qz_y + R) dA \\ &= \iint_D (-2x^2 - 0 + y^2) dA = \int_0^1 \int_0^1 (-2x^2 + y^2) dy dx = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

مثال: فرض کنیم $\mathbf{F} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$ شار میدان $\mathbf{F}$ را از روی سطح کره واحد $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ به دست آورید. (جهت بردار قائم رو به بیرون است.)

$$G = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad \text{حل: قرار می‌دهیم:}$$

$$\begin{aligned} \nabla G &= 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} \\ |\nabla G| &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = \sqrt{4} = 2, \quad (x^2 + y^2 + z^2 = 1) \end{aligned}$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (\vec{n} \text{ رو به خارج کره است})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2 \\ \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S 2 \, dS \\ &= 2 \iint_S dS = 2 (\text{مساحت کره}) = 2(4\pi) = 8\pi \end{aligned}$$

مثال: اگر $\mathbf{F} = e^{xz}\vec{i} + \sin(y^2)\vec{j} + y\vec{k}$ انتگرال سطحی $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ را حساب کنید که در آن S دایره توپر $x^2 + y^2 = 4$ روی صفحه $z = 5$ (جهت S رو به بالا است)

حل: واضح است $\vec{n} = \vec{k}$ بردار عمود واحد بر سطح S و رو به بالاست.

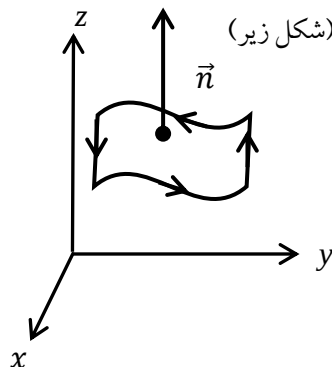
$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot \vec{k} \, dS \\ &= \iint_D y \, dS = \iint_D y \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} \, dA \quad (z = 5) \\ &= \iint_D y \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r \sin \theta) \cdot r \, dr \, d\theta = 0 \end{aligned}$$

$$(D: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2)$$

۳- قضیه استوکس

می‌خواهیم بین انتگرال روی یک سطح در فضا و انتگرال روی مرز آن سطح ارتباط برقرار کنیم.

تعریف: فرض کنیم S یک سطح جهت دار و C مرز سطح S باشد، جهت مثبت C ، جهتی است که اگر شخصی روی مرز سطح حرکت کند، سر شخص به سمت $\vec{n}$ و سطح S در سمت چپ آن قرار گیرد. (شکل زیر)



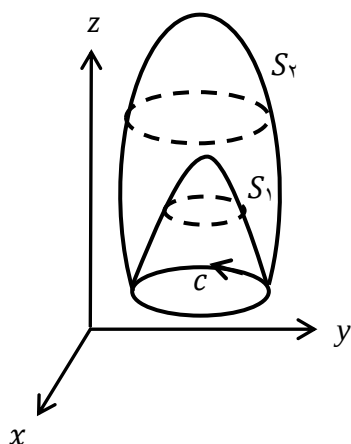
قضیه استوکس. فرض کنیم S یک سطح جهت دار و C مرز سطح S با جهت مثبت و F میدان برداری باشد تحت شرایط مناسب:

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \text{curl} F \cdot dS$$

توجه: اگر $F = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ و S یک ناحیه در صفحه xy باشد ($S = D$)، قضیه گرین به دست می‌آید. به عبارت دیگر قضیه گرین حالتی خاص از قضیه استوکس است.

تذکر: اگر S_1 و S_2 دو سطح با مرز مشترک C باشند. (با جهت یکسان)

$$\iint_{S_1} \text{curl} F \cdot dS = \iint_{S_2} \text{curl} F \cdot dS$$



مثال: اگر $F = xy\vec{i} + (y^2 - z^2)\vec{j} + yz\vec{k}$ ، انتگرال $\iint_S \text{curl} F \cdot dS$ را حساب کنید که در آن S سطح نیم کره بالایی $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ با جهت مثبت است.

حل: فرض کنیم S_1 سطح دایره $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه xy باشد. واضح است که دو سطح S_1 و S دارای مرز مشترک دایره

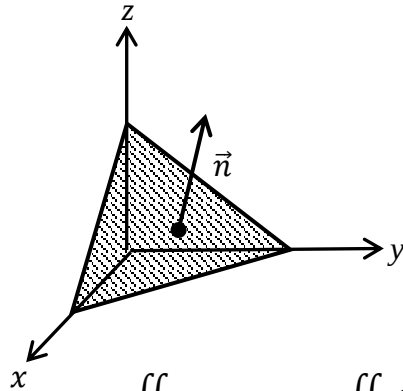
$x^2 + y^2 = 1$ است. در سطح S_1 داریم: $\vec{n} = \vec{k}$

$$\text{curl} F = 3z\vec{i} - x\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \text{curl} F \cdot dS &= \iint_{S_1} \text{curl} F \cdot dS = \iint_{S_1} \text{curl} F \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \iint_D -x \, dA = 0 \quad (S_1 = D) \end{aligned}$$

مثال: با استفاده از قضیه استوکس انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را بیابید که در آن $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$ و C مرز مثلث با رأس‌های $(0, 0, 1)$ و $(0, 1, 0)$ و $(1, 0, 0)$ است. (جهت C مثبت است)

حل: داریم: $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ که در آن S قسمتی از صفحه $x + y + z = 1$ در یک هشتم اول است.



$$z = 1 - x - y \Rightarrow \begin{cases} z_x = -1 \\ z_y = -1 \end{cases}$$

$$\text{curl} \mathbf{F} = x\mathbf{j} \Rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = x \\ R = 0 \end{cases}$$

$$\iint_S \text{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D (-P \cdot z_x - Q \cdot z_y + R) dA$$

$$D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$$

$$\iint_D x dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} x dy dx = \frac{1}{6}$$

۴- قضیه دیورژانس (واگرایی)

فرض کنیم $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ میدان برداری و $\nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$ عملگر باشد، دیورژانس $\mathbf{F}$ به صورت زیر است:

$$\text{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \cdot \langle P, Q, R \rangle$$

یا

$$\text{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

مثال: اگر $\mathbf{F} = x^2z\mathbf{i} + z^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$

$$\text{div} \mathbf{F} = 2xz + z^2 + 2xz$$

داریم:

تعبیر فیزیکی $\text{div} \mathbf{F}$

اگر $\mathbf{F}$ میدان سرعت سیالی باشد، $\text{div} \mathbf{F}(P)$ میزان فاصله گرفتن یا واگرایی سیال از نقطه P را می‌سنجد. اگر $\text{div} \mathbf{F}(P) > 0$ ، جریان در نزدیکی نقطه P رو به بیرون است. $\text{div} \mathbf{F}(P) < 0$ اگر چشمه است. $\text{div} \mathbf{F}(P) = 0$ اگر P حفره است. $\text{div} \mathbf{F}(P) = 0$ اگر P در نزدیکی ورودی و خروجی یکسان دارد. P (غیر متراکم است)

توجه: با محاسبه مستقیم معلوم می‌شود.

$$\text{div}(\text{curl} \mathbf{F}) = 0$$

مثال: نشان دهید هیچ میدانی مانند F وجود ندارد که $\text{curl} F = x^2 \vec{i} + y\vec{j} + z^2 \vec{k}$
 حل: فرض کنیم میدان F وجود داشته باشد که:

$$\text{curl} F = x^2 \vec{i} + y\vec{j} + z^2 \vec{k}$$

$$\text{div}(\text{curl} F) = 2x + 1 + 2z \neq 0$$

بنا به این تناقض چنین میدانی وجود ندارد.

قضیه دیورژانس (واگرایی) فرض کنیم E یک ناحیه در فضا و S مرز ناحیه E با جهت مثبت (رو به بیرون) و F میدان برداری باشد. تحت شرایط مناسب:

$$\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iiint_E \text{div} F \, dV$$

(ارتباط بین انتگرال سه گانه و انتگرال سطحی)

مثال: شار میدان $F = x^2 \vec{i} + e^{z^2} \vec{j} - z\vec{k}$ از روی جعبه $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ را بیابید.

حل: اگر بخواهیم انتگرال سطحی روی جعبه حساب کنیم باید روی شش وجه جعبه به طور مجزا انتگرال بگیریم. اما با استفاده از قضیه دیورژانس محاسبه کوتاه می شود.

$$\text{div} F = 2x + 0 - 1 = 2x - 1$$

$$\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iiint_E \text{div} F \, dV = \iiint_E (2x - 1) \, dV = 2 \times (\text{حجم جعبه}) - 1 = 2(1) - 1 = 1$$

مثال: با استفاده از قضیه دیورژانس $\iint_S (x + y^2 + z^2) dS$ را حساب کنید که در آن S سطح کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است.

حل: قرار می دهیم: $G = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

$\vec{n} = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ بردار عمود واحد بر سطح کره است. میدان $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ را باید طوری بیابیم که:

$$F \cdot \vec{n} = Px + Qy + Rz = x + y^2 + z^2 \Rightarrow \begin{cases} P = 1 \\ Q = y \\ R = z \end{cases}$$

با انتخاب $F = \vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ داریم:

$$\text{div} F = 0 + 1 + 1 = 2$$

$$\iint_S (x + y^2 + z^2) dS = \iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S F \cdot d\vec{S}$$

$$= \iiint_E \text{div} F \, dV = \iiint_E 2 \, dV = 2 \times (\text{حجم کره}) = 2 \left(\frac{4}{3} \pi \right) = \frac{8\pi}{3}$$

۵- تمرینات

۱- انتگرال های زیر را با قضیه گرین حساب کنید.

الف) $\oint_C xy \, dx + y^2 \, dy$ ، C مرز مثلث محدود به خطوط $y = x$ و $x = 3$ و $y = 0$ است.

ب) $\oint_C (x^2 + x^2 y) \, dx + (e^y - xy^2) \, dy$ ، C مرز دایره $x^2 + y^2 = 9$ است.

۲- با استفاده از قضیه گرین کار انجام شده با نیروی $F = x^2 \vec{i} + xy^2 \vec{j}$ موقع حرکت ذره ای روی مثلث با رأسهای $(0, 0)$ و $(2, 0)$ و $(0, 2)$ را محاسبه کنید. (در جهت مثبت)

۳- $\oint_C F \cdot dr$ را بیابید.

$F = (\sqrt{x} + y^2)\vec{i} + (\sin(y^2) + x)\vec{j}$ و C مرز ناحیه بین خط $y = x$ و سهمی $y = x^2$ است.

درستی قضیه گرین را برای تمرین ۴ و ۵ تحقیق کنید

۴- $F = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ و C مسیر بسته مرز ناحیه بین خط $y = x$ و منحنی $y = x^3$ در ربع اول است.

۵- $F = y^2\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ و C مرز مثلث با رأسهای $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ است.

۶- $\oint_C x^2 dx + xy dy$ را حساب کنید.

C مرز ناحیه بین دایره‌های $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ است.

۷- اگر C مرز ناحیه D در صفحه باشد با استفاده از قضیه گرین نشان دهید.

$$\oint_C x dy = - \oint_C y dx = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \text{مساحت ناحیه } D$$

۸- با استفاده از تمرین قبل مساحت‌های زیر را بیابید.

الف) مساحت بیضی $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ در ربع اول

ب) مساحت زیر یک قوس چرخزاد $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

۹- مساحت قسمتی از صفحه $2x + 3y + 2z = 6$ را در یک هشتم اول بیابید.

۱۰- مساحت قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را که بین دو صفحه $z = 1$ و $z = 2$ قرار دارد را بدست آورید.

۱۱- مساحت نیم کره بالایی $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ را به دست آورید.

۱۲- مساحت قسمتی از سطح $z = 1 + x + 2y^2$ را بیابید که محدود به مثلث D در صفحه xy است.

$$D: 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y$$

۱۳- مساحت قسمتی از سهمی $z = x^2 + y^2$ که محدود به صفحه $x = 4$ را پیدا کنید.

۱۴- اگر S سطح $z = 2x + y^2$ محدود به مستطیل $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ باشد. انتگرال سطحی $\int_S 3y ds$ را حساب کنید.

۱۵- جرم سطح $6 = x + 2y + z$ با چگالی $\rho(x, y, z) = z$ را که بالای مربع $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$ قرار دارد را حساب کنید.

۱۶- $\iint_S z ds$ را بیابید که در آن S قسمتی از سهمی $z = x^2 + y^2$ است که درون استوانه $x^2 + y^2 = 1$ قرار دارد.

۱۷- $\iint_S (x^2 z + y^2 z) ds$ را بیابید.

S نیم کره پایینی $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0$ است.

۱۸- انتگرال $\iint_S F \cdot d\vec{s}$ را بیابید.

$F = x^2\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$ و S قسمتی از صفحه $4 = x + 2y + 2z$ است که بالای مربع زیر است.

$$D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \quad (\text{جهت } S \text{ مثبت})$$

۱۹- شار میدان $F = x\vec{i} + y\vec{j} + z^4\vec{k}$ را روی سطح S بیابید.

۲۰- قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که زیر صفحه $z = 1$ قرار دارد. (در جهت مثبت) $\iint_S F \cdot d\vec{S}$ را بیابید.

۲۱- $F = x\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$ و S قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ در یک هشتم اول است. (در جهت مثبت) $\iint_S F \cdot d\vec{S}$ را بیابید.

۲۲- با استفاده از قضیه استوکس $\iint_S \text{curl} F \cdot d\vec{S}$ را حساب کنید. $F = 4x\vec{i} + 4y\vec{j} + 5\vec{k}$ و S مرز ناحیه محدود به سهمی گون $z = x^2 + y^2$ و صفحه $z = 1$ است. (در جهت مثبت)

الف) $F = x^2z\vec{i} + y^2z\vec{j} + xyz\vec{k}$ و S قسمتی از سهمی گون $z = x^2 + y^2$ است که داخل استوانه $x^2 + y^2 = 4$ قرار دارد (با جهت مثبت)

ب) $F = x^2yz\vec{i} + 2y\vec{j} + x^3\vec{k}$ و S نیم کره بالایی $z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 9$ است. (با جهت مثبت)

۲۳- با استفاده از قضیه استوکس، قضیه گرین را به دست آورید.

۲۴- نشان دهید

$$\iint_{S_1} \text{curl} F \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \text{curl} F \cdot d\vec{S}$$

که در آن:

سطح سهمی گون $z = 2 - x^2 - y^2$ بالای صفحه $xy: S_1$

سطح سهمی گون $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ بالای صفحه $xy: S_2$

(S_1 و S_2 جهت های یکسان دارند)

۲۵- اگر S سطح کره واحد باشد، نشان دهید

$$\iint_S \text{curl} F \cdot d\vec{S} = 0$$

۲۶- با استفاده از قضیه استوکس $\int_C F \cdot d\vec{r}$ را حساب کنید. (اگر ناظری از بالا نگاه کند جهت C پاد ساعتگرد است)

الف) $F = e^{-x}\vec{i} + e^x\vec{j} + e^{z^2}\vec{k}$ و C مرز قسمتی از صفحه $z = 2$ است که در یک هشتم اول قرار دارد.

ب) $F = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + e^{xy}\vec{k}$ و C دایره $x^2 + y^2 = 4$ در صفحه $z = 3$ است.

ج) $F = y^2\vec{i} + x\vec{j} + z^3\vec{k}$ و C مرز سهمی گون $z = x^2 + y^2$ زیر صفحه $z = 1$ است.

قضیه استوکس را برای تمرینات ۲۷ و ۲۸ تحقیق کنید.

۲۷- $F = -y^2\vec{i} + x\vec{j} + z^3\vec{k}$ و S قسمتی از صفحه $y + z = 2$ داخل استوانه $x^2 + y^2 = 1$ است.

۲۸- $F = x^2\vec{i} + xy\vec{j} + z^4\vec{k}$ و S سطح ناحیه محدود به سهمی گون $z = 1 - x^2 - y^2$ و صفحه xy است.

۲۹- فرض کنیم $F = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ و C مرز ناحیه بسته D در صفحه با جهت مثبت و $\vec{n}$ بردار عمود بر C به سمت بیرون باشد. با استفاده از قضیه گرین نشان دهید.

$$\oint_C F \cdot nd\vec{s} = \iint_D \text{div} F dA$$

در تمرینات ۳۰ تا ۳۴ $\iint_S F \cdot dS$ را با استفاده از قضیه دیورژانس حساب کنید.

۳۰- $F = e^x \cos y \vec{i} + e^x \sin y \vec{j} + xyz^2 \vec{k}$ و S سطح جعبه‌ای با رأس‌های $(\pm 1, \pm 2, \pm 3)$ است.

۳۱- $F = (y^2 + xz)\vec{i} + (xy + yz)\vec{j} - z^2 \vec{k}$ و S سطح کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ است.

۳۲- $F = 2xy\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2 \vec{k}$ و S سطح کره واحد $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است.

۳۳- $F = xy^2\vec{i} + e^z\vec{j} + x^2z\vec{k}$ و S سطح جسم محدود به سهمی گون $z = x^2 + y^2$ و صفحه $z = 4$ است.

۳۴- $F = 3xy^2\vec{i} + z^2\vec{j} + z^2 \vec{k}$ و S سطح جسم محدود به استوانه $y^2 + z^2 = 1$ و دو صفحه $x = -1$ و $x = 2$ است.

است.

۳۵- با استفاده از قضیه دیورژانس $\iint_S F \cdot dS$ را بیابید. که در آن $F = xy\vec{i} + y^2\vec{j} + yz\vec{k}$ و S پنج سطح جعبه سر باز با

رأس $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ های است.

راهنمایی: برای استفاده از قضیه دیورژانس تمام سطوح جعبه را در نظر بگیرید و سطح اضافه شده را از آن کم کنید.

۳۶- نشان دهید $\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = 0$

۳۷- نشان دهید روی سطح بسته S ، $\iint_S \operatorname{curl} F = 0$

۳۸- اگر S سطح جسم بسته E باشد و $F = 2x\vec{i} + y\vec{j} + 3z\vec{k}$ نشان دهید:

$$\iint_S F \cdot dS = 5 \left(\text{حجم جسم } E \right)$$

پنج قضیه مهم در انتگرال

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \quad (۱) \text{ قضیه اساس حساب دیفرانسیل و انتگرال}$$

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A) \quad (۲) \text{ قضیه اساسی انتگرال خط}$$

A و B نقاط دو سر منحنی C هستند.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P dx + Q dy \quad (۳) \text{ قضیه گرین}$$

C مرز ناحیه D است در صفحه

$$\iint_S \text{curl} F \cdot ds = \int_C F \cdot dr \quad (۴) \text{ قضیه استوکس}$$

C مرز سطح S است.

$$\iiint_E \text{div} F \cdot dV = \iint_S F \cdot dS \quad (۵) \text{ قضیه دیورژانس}$$

S مرز ناحیه E در فضا است.

منابع

- آدامز، رابرت: **حساب دیفرانسیل و انتگرال**، ترجمه سید حسین اورعی، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ۱۳۸۸.
- استوارت، جیمز: **حساب دیفرانسیل و انتگرال**، ترجمه ارشک حمیدی، موسسه فرهنگی فاطمی ۱۳۸۸.
- اعتمادزاده، محمد هاشم: **ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۲)**، انتشارات سخن گستر، ۱۳۹۳.
- کرایه‌چیان، محمد علی: **ریاضیات عمومی (۲)**، انتشارات آهنگ قلم، ۱۳۹۸.
- مارسدن، جرال دای؛ ترومبا، آنتونی جی: **حساب برداری**، ترجمه علی اکبر عالم زاده؛ حسین محمد داودی، موسسه نشر علوم نوین ۱۳۷۰.