

به نام خدا

حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)

مؤلف:

محمد هاشم اعتمادزاده

عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی - واحد سبزوار

مقدمه

این کتاب برای دانشجویان فنی و مهندسی تدوین شده و بیشتر به نحوه انجام محاسبات پرداخته‌ایم. تمرینات هر فصل در آخر همان فصل آمده است و بیشتر آنها محاسباتی و با مراجعه به مثالها حل می‌شوند.

تایپ کتاب را خانم سهیلا غلامی انجام داده‌اند. از ایشان و تمام عزیزانی که در تهیه کتاب تلاش داشته‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم و امیدوارم این کتاب برای دانشجویان مفید و مقبول و حضرت حق باشد.

محمد هاشم اعتمادزاده

زمستان ۱۳۹۸

فهرست مطالب

فصل اول: مجموعه اعداد

- ۱- اعداد حقیقی ۱
- ۲- اعداد مختلط ۴
- ۳- تمرینات فصل اول ۱۱

فصل دوم: توابع مقدماتی

- ۱- آشنایی با توابع ۱۳
- ۲- توابع متعالی ۱۹
- ۳- مقاطع مخروطی ۲۹
- ۴- تمرینات فصل دوم ۳۲

فصل سوم: حد و پیوستگی

- ۱- حد تابع ۳۵
- ۲- حد و بی‌نهایت ۳۷
- ۳- پیوستگی توابع ۴۱
- ۴- تمرینات فصل سوم ۴۵

فصل چهارم: مشتق

- ۱- نسبت تغییرات ۴۷
- ۲- مشتق توابع ۵۰
- ۳- قاعده زنجیری و مشتق‌گیری ضمنی ۵۵
- ۴- دیفرانسیل ۵۹
- ۵- تمرینات فصل چهارم ۶۰

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

- ۶۳ ۱- رشد و زوال نهایی
- ۶۴ ۲- تعیین اکسترمم‌ها و قضیه مقدار میانگین
- ۷۰ ۳- رسم نمودارها و قاعده هوییتال
- ۷۵ ۴- مسائل بهینه سازی و آهنگ‌های وابسته
- ۷۸ ۵- تمرینات فصل پنجم

فصل ششم: انتگرال

- ۸۱ ۱- انتگرال معین
- ۸۵ ۲- انتگرال نامعین
- ۹۰ ۳- روش‌های انتگرال گیری
- ۹۹ ۴- انتگرال‌های ناسره (مجازی)
- ۱۰۲ ۵- تمرینات فصل ششم

فصل هفتم: کاربردهایی از انتگرال

- ۱۰۷ ۱- مساحت و حجم
- ۱۱۴ ۲- طول قوس منحنی و مساحت سطح دوار
- ۱۲۰ ۳- مرکزگونی ناحیه
- ۱۲۲ ۴- تمرینات فصل هفتم

فصل هشتم: سری‌ها

- ۱۲۵ ۱- دنباله‌ها
- ۱۲۸ ۲- سری عددی
- ۱۳۱ ۳- آزمون‌های همگرایی
- ۱۳۴ ۴- سری توانی
- ۱۳۷ ۵- سری تیلور
- ۱۴۱ ۶- تمرینات فصل هشتم

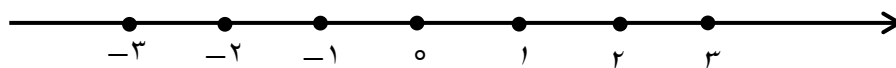
- ۱۴۵ کتابنامه

فصل اول: مجموعه اعداد

برای تعیین تعداد اشیاء، مقدار کمیتها و نسبت کمیتها از اعداد استفاده می‌شود. همچنین اعدادی داریم که کمیتها را نمی‌توان با آنها بیان کرد ولی در مفاهیم دیگر ریاضی کاربرد دارند. مانند یافتن چهار ریشه‌ی معادله‌ی $x^4 - 2x^2 + 4 = 0$.

۱- اعداد حقیقی

از آنجایی که ذهن ما می‌تواند به سادگی تعداد اشیاء را با هم مقایسه کند، اولین بار اعداد برای شمارش ظاهر شدند. مجموعه این اعداد را مجموعه اعداد طبیعی می‌نامند و با $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ نشان می‌دهند. استعمال کلمه عدد منحصر به اعداد طبیعی بود و به تدریج به سایر مجموعه‌ها گسترش یافت. برای معرفی اعداد منفی و صفر، خطی را در نظر می‌گیریم، صفر را به عنوان علامت مبدأ و اعداد طبیعی را با فاصله‌های مساوی در سمت راست و متناظر با آن اعداد منفی را در سمت چپ قرار می‌دهیم.



این اعداد را اعداد صحیح می‌نامند و آن را با $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ نشان می‌دهند. همچنین داریم: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

غالباً نسبت دو کمیت از یک جنس عدد طبیعی نیست. لذا اعداد گویا (کسری) به صورت $\frac{m}{n}$ معرفی می‌شوند که در آن m و n اعداد صحیح و $n \neq 0$ است. مجموعه اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نمایش می‌دهند.

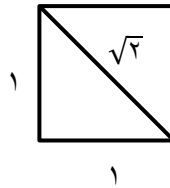
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

ریاضی‌دانان یونانی به طور شهودی بر این عقیده بودند که نسبت دو کمیت از یک جنس مانند نسبت طول دو پاره خط، همواره مقداری گویا است. فیثاغورس و هوادارانش که هستی را با اعداد

۲ فصل اول

توصیف می‌کردند، این نوع عقاید برای آنها جنبه تقدس داشت، اما به تدریج معلوم شد که پاره‌خط‌هایی هستند که طول آنها عددی گویا نیست. این کشف در ریاضیات و فلسفه آن زمان بحرانی ایجاد نمود.

اولین طول پاره خطی که گویا نبودن آن آشکار شد، طول قطر مربعی به ضلع واحد بود. قطر این مربع بنا به رابطه فیثاغورس $\sqrt{2}$ است.



قضیه. $\sqrt{2}$ عددی گویا نیست.

اثبات. فرض کنیم $\sqrt{2}$ عددی گویا باشد، پس $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ که n و m اعدادی صحیح که تا حد امکان ساده شده‌اند. (n و m هیچ مقسوم علیه مشترکی ندارند). طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم: $2 = \frac{m^2}{n^2}$ پس $2n^2 = m^2$ یعنی m^2 عددی زوج و لذا m نیز عددی زوج است. $m = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) پس $2n^2 = 4k^2$ پس $n^2 = 2k^2$ و در نتیجه n زوج است. یعنی m و n هر دو بر ۲ بخش پذیر هستند که با فرض اولیه در تناقض است از این تناقض معلوم می‌شود $\sqrt{2}$ عددی گویا نیست. ■

همچنین با یکسان گرفتن $\frac{n}{1} = n$ داریم: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. نسبت دو کمیت از یک جنس را اعداد حقیقی می‌نامند. اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نشان می‌دهند و داریم:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

اعدادی که حقیقی هستند ولی گویا نیستند را اعداد گنگ یا اصم می‌گویند و آن را با $\mathbb{Q}'$ نشان می‌دهند. داریم:

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$$

فاصله‌ها در اعداد حقیقی به صورت زیر هستند:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

مجموعه اعداد ۳

یکی از ویژگیهای مهم اعداد حقیقی اصل تمامیت (اصل کمال) است. برای توضیح این اصل مقدماتی لازم است.

تعریف. فرض کنیم $S \subseteq \mathbb{R}$ اگر عددی مانند $b \in \mathbb{R}$ باشد به طوریکه برای هر عضو $x \in S$ داشته باشیم $x \leq b$ در این صورت می‌گوییم S از بالا کراندار است و b را کران بالای S می‌نامند. مثلا عدد ۴ کران بالایی برای مجموعه $[1, 4]$ است.

تعریف. $\alpha \in \mathbb{R}$ را کوچک ترین کران بالای مجموعه S می‌نامیم هرگاه:

الف) α کران بالای برای S باشد.

ب) اگر b کران بالای برای مجموعه S باشد، آنگاه $\alpha \leq b$

گاهی این α را با علامت $\sup S = \alpha$ نشان می‌دهند. (sup مخفف Supremum است.)

اصل تمامیت. اگر زیر مجموعه ناتهی از $\mathbb{R}$ مانند S از بالا کراندار باشد، آنگاه S در $\mathbb{R}$ کوچکترین کران بالا نیز دارد.

مثال. فرض کنیم $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ اضح است که ۲ کران بالایی هم برای مجموعه A و هم مجموعه B است اکنون بنا به اصل تمامیت عددی مانند $\alpha \in \mathbb{R}$ هست که $\sup A = \alpha$ در واقع $\alpha = \sqrt{2}$ است. از طرفی با محاسبات می‌توان ثابت نمود که مجموعه B دارای کوچکترین کران بالایی در $\mathbb{Q}$ نیست (توجه کنید که $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ یعنی اصل تمامیت برای $\mathbb{Q}$ برقرار نیست).

برحسب اعشاریها، می‌توان هر عدد حقیقی را عدد اعشاری در نظر گرفت مانند

$x = a/a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ که در آن a_i ها اعدادی از ۰ تا ۹ هستند. اگر a_i ها از جایی به بعد صفر باشند، این اعداد گویا هستند.

$$2/134 = 2 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000}$$

همچنین اگر a_i ها از جای به بعد به طور تناوبی تکرار شوند باز هم این اعداد گویا می‌باشند.

مثال. نشان دهید $1/24$ عددی گویا است.

حل.

$$x = 1/24 \quad \text{پس} \quad 10x = 12/4 \quad \text{و} \quad 100x = 124/4$$

۴ فصل اول

$$۱۰۰x - ۱۰x = ۱۱۲$$

$$x = \frac{۱۱۲}{۹۰} \quad \text{لذا} \quad ۹۰x = ۱۱۲$$

بنابراین:

$$۱/۲۴ = \frac{۱۱۲}{۹۰} \in \mathbb{Q}$$

از طرفی هرگاه دو عدد صحیح را برهم تقسیم کنیم یا باقیمانده آن صفر است و یا از جایی به بعد ارقام اعشاری با دوره تناوب تکرار می‌شوند.

بنابراین اعداد اعشاری که اعشار آنها بدون دوره تناوب است اعداد گویا نیستند یعنی اعداد گنگ می‌باشند.

اعداد زیر گنگ هستند:

$$\sqrt{۲}, \quad \sqrt{۳}, \quad \pi, \quad \sqrt{۲} - \sqrt{۳}, \quad ۳/۱۲۱۲۲۱۲۲۲...$$

همچنین اگر n مربع کامل در $\mathbb{Q}$ نباشد. $(n \neq m^2, m \in \mathbb{Q})$ آنگاه $\sqrt{n}$ عددی گنگ است.

اصل تمامیت. اگر زیر مجموعه ناتهی مانند S در $\mathbb{R}^+$ از بالا کراندار باشد، آنگاه S در $\mathbb{R}^+$ کوچکترین کران بالا دارد.
کران بالای S است.

خاصیت ارشمیدسی. هرگاه $x, y \in \mathbb{R}$ و $x > 0$ آنگاه عددی صحیح مثبت مانند n هست که $nx > y$
مثلاً برای هر $y \in \mathbb{R}$ با انتخاب $x = ۱$ ، بنا به خاصیت ارشمیدسی، عددی صحیح مثبتی مانند n هست که $n > y$

۲- اعداد مختلط

ریاضدانان قرن شانزدهم، اولین بار توانستند معادله‌ی درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ را به روش جبری حل کنند. (معادله‌ی درجه‌ی سوم قبلاً توسط ریاضی‌دان ایرانی حکیم عمر خیام به طور هندسی حل شده بود). در حل بعضی از این معادله‌ها با ریشه‌هایی مواجه می‌شدند که عدد

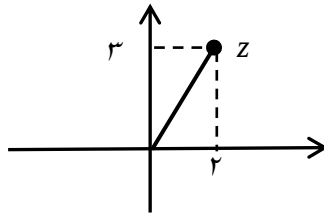
مجموعه اعداد $\mathbb{C}$

زیر رادیکال منفی بودند ولی با این حال خواص اعداد حقیقی را داشتند. و این شروعی در پیدایش اعداد مختلط بود.

عبارتی به صورت $x+iy$ را عدد مختلط می‌نامند که در آن $x, y \in \mathbb{R}$ و $i^2 = -1$ ($i = \sqrt{-1}$) مجموعه اعداد مختلط به صورت زیر است.

$$\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$$

همچنین عدد مختلط $x+iy$ را با زوج مرتب (x, y) نمایش می‌دهند. $x+iy = (x, y)$ یعنی می‌توان هر عدد مختلط را یک نقطه در صفحه در نظر گرفت. $z = 2 + 3i = (2, 3)$



اگر $z = x + iy$ ، x را قسمت حقیقی و y را قسمت موهومی z می‌نامند و با علامت زیر نشان می‌دهند:

$$y = \text{Im}(z) , \quad x = \text{Re}(z)$$

مثلاً اگر $z = -3 + 4i$ داریم: $x = \text{Re}(z) = -3$ و $y = \text{Im}(z) = 4$

هرگاه عدد حقیقی x را با زوج مرتب $(x, 0)$ یکسان بگیریم آنگاه $x = (x, 0) = x + 0i \in \mathbb{C}$ پس هر عدد حقیقی، عددی مختلط نیز می‌باشد بنابراین:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

جمع و تفاضل دو عدد مختلط با جمع یا کم کردن قسمت‌های حقیقی و قسمت‌های موهومی آنها تعریف می‌شوند.

$$(3 + 4i) + (5 - 7i) = 8 - 3i$$

$$(3 + 4i) - (5 - 7i) = -2 + 11i$$

$$3 + i - 4i + 5 + 2i = 8 - i$$

۶ فصل اول

ضرب دو عدد مختلط طوری تعریف شده است که قاعده‌های بخش‌پذیری و جابجایی در اعداد مختلط برقرار باشند.

$$(2 + 3i)(-1 + 4i) = 2(-1 + 4i) + 3i(-1 + 4i) \\ = -2 + 8i - 3i - 12 = -14 + 5i$$

اگر $z = x + iy$ مزدوج z با $\bar{z} = x - iy$ تعریف می‌شود.
مثلاً $z = 4 - i$ آنگاه $\bar{z} = 4 + i$

برای تقسیم دو عدد مختلط صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.
مثال. حاصل عبارت $\frac{5-2i}{1+2i}$ را بیابید.

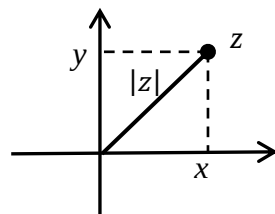
$$\frac{5-2i}{1+2i} = \frac{(5-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5-10i-2i-4}{1-2i+2i+4} = \frac{1-12i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{-12}{5}i$$

حل.

قدر مطلق عدد مختلط $z = x + iy$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$|z|$ روی شکل، فاصله نقطه‌ی z تا مبدا مختصات است.



همچنین $|z_1 - z_2|$ فاصله بین دو نقطه z_1 و z_2 است. تعریف جمع و ضرب اعداد مختلط ایجاب می‌کند که قواعد شرکت پذیری بخش‌پذیری برقرار باشند، علاوه بر این روابط زیر نیز درست هستند.

قضیه. فرض کنیم z_1 ، z_2 دو عدد مختلط باشند.

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = |z_1|^2 \quad \text{الف)}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad \text{ب)}$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \quad \text{ج)}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{د)}$$

$$|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{ه)}$$

توان‌های i

$$\begin{aligned}(i)^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = 1\end{aligned}$$

بنابراین توان‌های i دوره تناوب چهارتایی دارند.

$$i^{1000} = (i)^0 = 1, \quad i^{125} = i^1 = i$$

توجه: تمام اتحادهای اعداد حقیقی برای اعداد مختلط نیز برقرار است. اگر $a > 0$ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} i$$

مثال: تمام ریشه‌های چند جمله‌ای‌های زیر را بیابید.

$$\text{الف) } x^2 - 4x + 5 = 0 \quad \text{ب) } x^4 - x = 0$$

حل الف)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4} i}{2} = 2 \pm i$$

دو ریشه‌ی معادله $x_1 = 2 + i$ و $x_2 = 2 - i$ هستند. این دو ریشه مزدوج‌اند.

حل ب)

$$x^4 - x = x(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

دو ریشه معادله $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$ است. و از حل معادله $x^2 + x + 1 = 0$ نیز ریشه دیگر بدست می‌آیند:

$$x_3 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \text{و} \quad x_4 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

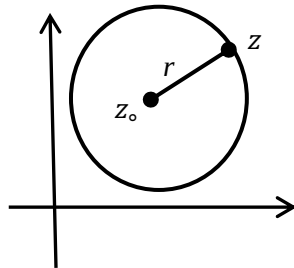
توجه. هرگاه Z_0 ریشه‌ی چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد. آنگاه $\bar{Z}_0$ نیز ریشه این چند جمله‌ای است.

قضیه اساسی جبر. هرچند جمله‌ای درجه‌ی n در حوزه اعداد مختلط دقیقاً n ریشه دارد. (با احتساب ریشه‌های تکراری)

در مثال قبل دیدید که تعداد ریشه‌ها با درجه چند جمله‌ای برابر بود. همچنین بنا به قضیه اساسی جبر معادله‌ی $x^8 + 1 = 0$ دقیقاً هشت ریشه دارد، این ریشه‌ها همگی مختلط بوده و دو به دو مزدوج هم هستند.

۸ فصل اول

فرض کنید Z متغیر مختلط و Z_0 عدد مختلط ثابتی باشد. معادله $|Z - Z_0| = r$ معادله‌ی دایره‌ای به مرکز Z_0 و شعاع r است.



مثال. روابط زیر را در صفحه توصیف کنید.

(الف) $|Z + 3 - i| = 2$ (ب) $|Z + 1| = |Z - 1|$

حل (الف) $|Z + 3 - i| = |Z - (-3 + i)| = 2$ این معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $Z_0 = (-3, 1)$ و شعاع ۲ است

حل (ب) قرار می‌دهیم: $Z = x + iy$ از معادله $|Z + 1| = |Z - 1|$

$$|x + 1 + iy| = |x - 1 + iy|$$

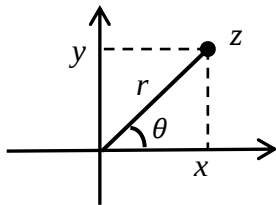
بدست می‌آید:

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

بنابر تعریف قدر مطلق: $x = 0$ یا $x = 0$ پس: $Z = (0, y)$ یا $Z = 0 + iy$ از اینجا بدست می‌آید: $x = 0$ یا $x = 0$ بنابراین Z نقاط روی محور y ها است.

نمایش قطبی اعداد مختلط

فرض کنیم $Z = x + iy = (x, y)$ مطابق شکل مقابل داریم:



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad r \geq 0$$

پس $Z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

نمایش Z بر حسب r و θ را نمایش قطبی اعداد مختلط می‌نامند.

همچنین از شکل بالا بدست می آید:

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{y}{x} \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

مثال. فرم قطبی اعداد زیر را بیابید.

$$Z_1 = 1 + \sqrt{3}i \quad (\text{الف}) \quad Z_2 = -2 - 2i \quad (\text{ب})$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \text{و} \quad r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \quad (\text{حل الف})$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ در ناحیه ی اول است. پس:

$$Z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\tan \theta = \frac{-1}{-1} = 1, \quad r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad (\text{حل ب})$$

اما Z_2 در ناحیه ی سوم قرار دارد. پس:

$$Z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

قضیه. فرض کنیم $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ فرم قطبی باشد، در این صورت:

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta), \quad n \in \mathbb{Z}$$

این رابطه را فرمول دموآور می نامند.

مثال. عبارت $(-1 + i)^{200}$ را محاسبه کنید.

حل: فرض کنیم $z = -1 + i$ فرم قطبی Z به صورت زیر است.

$$z = -1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

$$(-1 + i)^{200} = 2^{100} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right)^{200}$$

$$= 2^{100} (\cos(150^\circ) + i \sin(150^\circ)) = 2^{100}$$

ریشه‌های n ام عدد مختلط

ریشه‌ی n ام عدد مختلط $z_0 = r_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$ ، عددی مختلط مانند w است به طوری که $w^n = z_0$. این معادله بنا به قضیه اساسی جبر، دقیقاً n ریشه دارد و با استفاده از فرمول دموآور ریشه‌ها با فرمول زیر تعیین می‌شوند.

$$w_k = \sqrt[n]{r_0} \left(\cos \left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right) \right) \\ k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

توجه. ریشه‌های n ام عدد $z_0 = r_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$ روی دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع $\sqrt[n]{r_0}$ قرار دارند و دایره را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنند (چرا؟)

مثال. ریشه‌های چهارم عدد $z_0 = 1$ را بیابید.

حل. باید معادله $w^4 = 1$ را حل کنیم.

$$r = 1 \quad \theta_0 = 0 \quad \text{پس: } 1 = (\cos 0 + i \sin 0)$$

برای $k = 0, 1, 2, 3$ داریم:

$$w_0 = \sqrt[4]{1}(\cos 0 + i \sin 0) = 1$$

$$w_1 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \left(\frac{0 + 2\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2\pi}{4} \right) \right) = i$$

$$w_2 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \left(\frac{0 + 4\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 4\pi}{4} \right) \right) = -1$$

$$w_3 = \sqrt[4]{1} \left(\cos \left(\frac{0 + 6\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 6\pi}{4} \right) \right) = -i$$

مثال. ریشه‌های معادله‌ی $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ را بیابید.

حل. قرار می‌دهیم: $t = z^2$ ، از حل معادله‌ی $t^2 - 2t + 4 = 0$ بدست می‌آید:

$$t_1 = 1 + \sqrt{3}i \quad \text{و} \quad t_2 = 1 - \sqrt{3}i$$

اکنون معادله‌ی $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$ را حل می‌کنیم.

$$r = 2 \quad \theta_0 = \frac{\pi}{3} \quad \text{پس: } 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

برای $k = 0, 1$ داریم :

$$z_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

دو ریشه‌ی دیگر معادله‌ی $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ ، مزدوج‌های z_0 و z_1 هستند.

$$z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

با استفاده از بسط سری توابع می‌توان نشان داد: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ این رابطه را فرمول اویلر می‌نامند.

مثال. مقدار $e^{i\pi}$ را بیابید.

حل. $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ پس $e^{i\pi} = -1$.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

ویژگی جالب این رابطه این است که ارتباط بین پنج عدد ثابت ریاضی را نشان می‌دهد.

از فرمول اویلر روابط زیر بدست می‌آیند:

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$(e^{i\theta_1})^n = e^{in\theta_1}$$

۳- تمرینات فصل اول

۱- نشان دهید جمع عددی گویا و عددی گنگ، عددی گنگ است.

۲- ثابت کنید اعداد زیر گنگ هستند.

الف) $\sqrt{3}$ ب) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

۳- اعداد زیر را به کسر تبدیل کنید.

الف) $1/4$ ب) $2/231$ ج) $3/19$

۱۲ فصل اول

۴- اگر $z_1 = 2 - 3i$ و $z_2 = 3 + i$ مقادیر زیر را بیابید.

الف) $3z_1 - 2z_2$ ب) $\frac{z_1 z_2}{2i+1}$ ج) $\left| \frac{z_1 - 3}{z_2 + 4} \right|$

۵- محاسبه کنید .

الف) $|i^{105} + 2i^{20}|$ ب) i^{-17} ج) $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{10}$

۶- معادلات زیر را در صفحه توصیف کنید.

الف) $|z - 3| = 4$ ب) $|z - 1| \leq 2$ ج) $|3 + 4i + z| = 1$

۷- اعداد زیر را به صورت قطبی تبدیل کنید.

الف) $z = -2 + 3i$ ب) $z = \sqrt{3} - i$ ج) $z = \frac{3+9i}{1-2i}$

۸- محاسبه کنید

الف) $(-\sqrt{12} + 2i)^{50}$ ب) $\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}i} \right)^{80}$

۹- با استفاده از فرمول دموآور بسط $\sin 3x$ و $\cos 3x$ را بیابید.

۱۰- ریشه‌های چهارم $z_0 = -1$ را بیابید.

۱۱- ریشه‌های دوم $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$ را بیابید.

۱۲- چهار ریشه‌ی $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ را بیابید.

۱۳- اعداد زیر را به صورت $a + bi$ بنویسید.

الف) $-4e^{\frac{\pi i}{3}}$ ب) $e^{-\pi i}$ ج) $e^{\pi + i}$

۱۴- با استفاده از فرمول اویلر روابط زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ ب) $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

۱۵- اگر z یک ریشه‌ی n ام واحد و $z \neq 1$ ثابت کنید: $1 + z + \dots + z^{n-1} = 0$

۱۶- اگر $z = re^{i\theta}$ نشان دهید: $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$

فصل دوم: توابع مقدماتی

می توان حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطالعه‌ی کمیت‌های وابسته در نظر گرفت، وابستگی این متغیرها معمولاً با مفهوم تابع بیان می‌شود.

۱- آشنایی با توابع

فرض کنیم $A \subseteq \mathbb{R}$ ، یک تابع حقیقی مانند $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ رابطه‌ای است که به هر عضو $x \in A$ دقیقاً یک $y \in \mathbb{R}$ نسبت می‌دهد و آن را با $f(x) = y$ نشان می‌دهند.

مثلاً اگر x طول ضلع یک مربع باشد، می‌دانیم مساحت مربع x^2 است. مساحت مربع تابعی از طول یک ضلع آن است. $f(x) = x^2$ ، این تساوی را ضابطه‌ی تابع f می‌نامند.

اگر $y = f(x)$ تابعی حقیقی باشد، مجموعه‌ی تغییر است x را دامنه f و مجموعه‌ی تغییرات y را برد f می‌نامند و به ترتیب با D_f و R_f نشان می‌دهند.

تعریف. دو تابع را مساوی می‌نامند، هرگاه دامنه و ضابطه‌ی آنها مساوی باشند.

مثال. دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

$$\text{الف) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \quad \text{ب) } f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$$

حل الف) باید $3x + 1 > 0$ ، از حل این نامعادله بدست می‌آید:

$$D_f = \left] -\frac{1}{3}, +\infty \right[$$

حل ب) باید $x^2 + 5x + 6 \geq 0$ ، از حل نامعادله بدست می‌آید: $x \geq -2$ یا $x \leq -3$
(با تعیین علامت)

$$D_f =]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[\quad \text{بنابراین:}$$

مثال. دامنه و برد تابع $f(x) = x^2 - x + 1$ را بیابید.

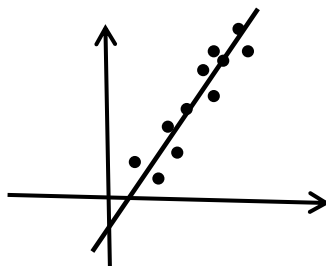
حل. واضح است $D_f = \mathbb{R}$ ، برای تعیین برد تابع قرار می‌دهیم: $y = x^2 - x + 1$ با تبدیل به مربع کامل داریم:

$$y - \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \quad \text{پس:} \quad y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

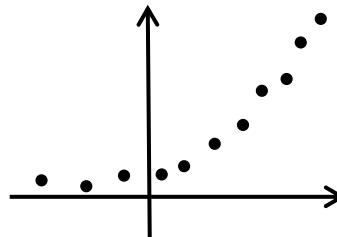
$$R_f = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[\quad \text{بنابراین:} \quad y \geq \frac{3}{4} \quad \text{لذا}$$

مدل خطی

هرگاه رابطه‌ی بین دو کمیت طوری باشد که نمودار نقطه‌ای آن تقریباً روی یک خط باشد، می‌توان ارتباط آنها را خطی در نظر گرفت.



مدل خطی



مدل غیر خطی

مدل‌های خطی با معادله‌ی خط در صفحه به صورت $y = mx + b$ نشان داده می‌شوند، که در آن m شیب خط است. مثلاً رابطه‌ی میان اندازه دما بر حسب فارنهایت (F) و سلسیوس (C) رابطه‌ی خطی است.

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

شیب و معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ عبور می‌کند به صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{و} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

توجه: اگر m_1 و m_2 شیب دو خط باشند.

الف) دو خط با هم موازی هستند. $\Leftrightarrow m_1 = m_2$

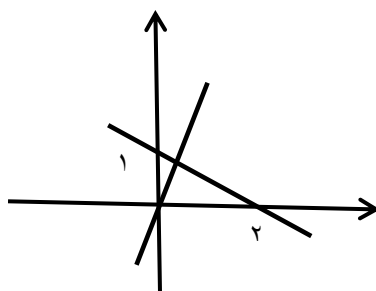
ب) دو خط بر هم عمود هستند. $\Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

توابع مقدماتی ۱۵

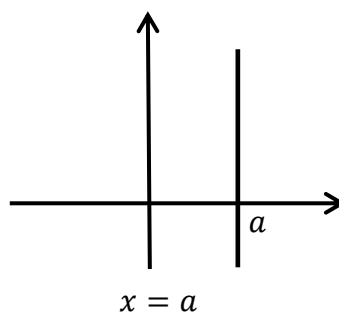
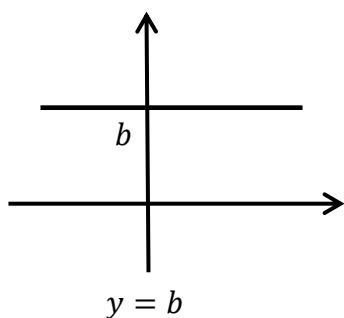
مثال. نمودار معادله $(y - 2x)(y + \frac{1}{4}x - 1) = 0$ را رسم کنید.
 حل. از معادله $(y - 2x)(y + \frac{1}{4}x - 1) = 0$ بدست می‌آید:

$$y = -\frac{1}{4}x + 1 \quad \text{یا} \quad y = 2x$$

این دو خط را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.



در حالت خاص $y = b$ و $x = a$ به ترتیب خطوط افقی و قائم هستند.



توابع جبری

این توابع شامل چند جمله‌ای‌ها همراه با اعمال جبری روی آنها مانند جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ریشه گرفتن است. چند نمونه از توابع جبری در زیر آمده است.

$$h(x) = \sqrt[3]{1-2x}, \quad g(x) = x^2 + 2x + 1, \quad f(x) = \frac{x+1}{1-x^4}$$

تعریف: فرض کنیم $x \in D_f$, $-x$ ، در این صورت:

الف) هرگاه $f(-x) = f(x)$ ، تابع f را زوج می‌نامند.

ب) هرگاه $f(-x) = -f(x)$ ، تابع f را فرد می‌نامند.

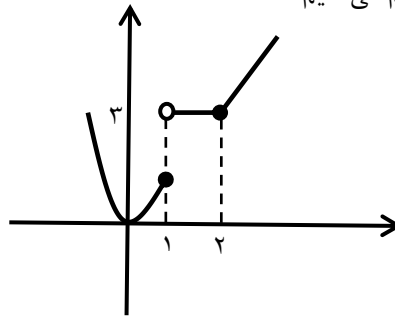
مثلاً: $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$ تابعی زوج و $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^4 + 1}$ تابعی فرد است.

۱۶ فصل دوم

اگر تابعی چند ضابطه داشته باشد، آن را تابع چند ضابطه ای می نامند.

مثال. نمودار تابع چند ضابطه ای $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 3 & 1 < x \leq 2 \\ x+1 & x > 2 \end{cases}$ را رسم کنید.

حل. برای $x \leq 1$ سهمی $y = x^2$ ، برای $1 < x \leq 2$ تابع ثابت $y = 3$ و برای $x > 2$ تابع خطی $y = x + 1$ را رسم می کنیم.



تابع قدر مطلق تابعی دو ضابطه ای است:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

چند خاصیت $|x|$

$$\begin{aligned} |x| = a &\Leftrightarrow x = \pm a & a > 0 \\ |x| \leq a &\Leftrightarrow -a \leq x \leq a & a > 0 \\ |x| > a &\Leftrightarrow x > a \text{ یا } x < -a & a > 0 \\ |x \pm y| &\leq |x| + |y| \\ |xy| &= |x| \cdot |y| \end{aligned}$$

هرگاه f و g توابعی حقیقی باشند، ترکیب آنها به صورت زیر است:

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

مثال. اگر $g(x) = |x+1|$ و $f(x) = x^2 + 3x + 4$ توابع $f \circ g(x)$ و $g \circ f(x)$ را بیابید.

$$\begin{aligned} \text{حل.} \quad f \circ g(x) &= f(g(x)) = |x+1|^2 + 3|x+1| + 4 \\ g \circ f(x) &= g(f(x)) = |(x^2 + 3x + 4) + 1| \end{aligned}$$

$$\text{تابع } \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \text{ را تابع علامت می‌نامند.}$$

مثال. ضابطه‌ی $\operatorname{sgn}(x^2)$ را بیابید.

$$\text{حل. } \operatorname{sgn}(x^2) = \begin{cases} 1 & x^2 > 0 \\ 0 & x^2 = 0 \\ 1 & x^2 < 0 \end{cases} \text{ پس از ساده شدن داریم:}$$

$$\operatorname{sgn}(x^2) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{تابع } u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \text{ را تابع پله‌ای واحد می‌نامند.}$$

مثال. نمودار تابع $u(x-1) - u(x-2)$ را رسم کنید.

حل.

$$u(x-1) - u(x-2) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} - \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < 1 \text{ یا } x \geq 2 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

فرض می‌کنیم x عددی حقیقی تابع جزء صحیح x را با $[x]$ نشان می‌دهند و بنا به تعریف، بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است به زبان ریاضی:

$$[x] = n \iff n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$$

چند خاصیت $[x]$

$$\begin{aligned} x-1 &< [x] \leq x \\ [x+n] &= [x] + n, n \in \mathbb{Z} \\ [n] &= n \iff n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

مثال. دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{2[x]-4}$ را بیابید.

$$\text{حل. از } 2[x]-4 = 0 \text{ بدست می‌آید: } [2x] = 2$$

$$\text{لذا: } 2 \leq 2x < 3 \text{ یا } 1 \leq x < \frac{3}{2}$$

بنابراین:

$$D_f = \mathbb{R} - \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

تعریف. تابع حقیقی $y = f(x)$ مفروض است، هرگاه برای هر $y \in R_f$ دقیقاً یک $x \in D_f$ باشد به طوریکه $y = f(x)$ ، آنگاه f را تابع یک به یک می‌نامند.

تعریف. فرض کنیم $y = f(x)$ تابعی یک به یک باشد. وارون تابع f ، تابعی مانند f^{-1} است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$$

خواص زیر برای f^{-1} برقرار است.

$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x & , x \in D_{f^{-1}} \\ f^{-1} \circ f(x) = x & , x \in D_f \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad \begin{cases} D_{f^{-1}} = R_f \\ R_{f^{-1}} = D_f \end{cases} \quad (\text{الف})$$

(ج) نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ متقارن است.

مثال. وارون توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (\text{الف}) \quad g(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad , \quad -1 < x \leq 1 \quad (\text{ب})$$

حل الف) $y = \frac{x+1}{x}$ یا $x = \frac{1}{y-1}$ با تعویض x با y داریم:

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$$

حل ب) اگر $y = \frac{1}{x^2+1}$ ، آنگاه $x^2 + 1 = \frac{1}{y}$ یا $x = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$ با تعویض x با y بدست می‌آید:

$$y = g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$$

برای تعیین دامنه g^{-1} ، برد تابع g را می‌یابیم.

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^2+1} = y \quad \text{یا} \quad 0 < x^2 + 1 \leq 2 \quad \text{داریم:} \quad -1 < x \leq 1$$

بنابراین:

$$D_{g^{-1}} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$$

توابع مقدماتی ۱۹

تعریف. تابع $y = f(x)$ مفروض است اگر عددی مانند $T \neq 0$ وجود داشته باشد به طوریکه:
 $f(x + T) = f(x)$ ، $x \in D_f$ آنگاه f را تابع متناوب می‌نامند و T را دوره‌ی تناوب f و کوچکترین T مثبت را دوره‌ی تناوب اصلی f می‌نامند.

توجه. اگر T دوره‌ی تناوب f باشد، nT ($n \in \mathbb{Z}$) نیز دوره‌ی تناوب f است.

نکته. نمودار توابع متناوب، در فاصله دوره‌های تناوب اصلی تکرار می‌شود.

مثال. تابع $f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ با شرط $f(x + 2) = f(x)$ تابعی متناوب است. مقادیر $f(2)$ ، $f(12/3)$ و $f(13/2)$ را محاسبه و سپس نمودار تابع f را رسم کنید.

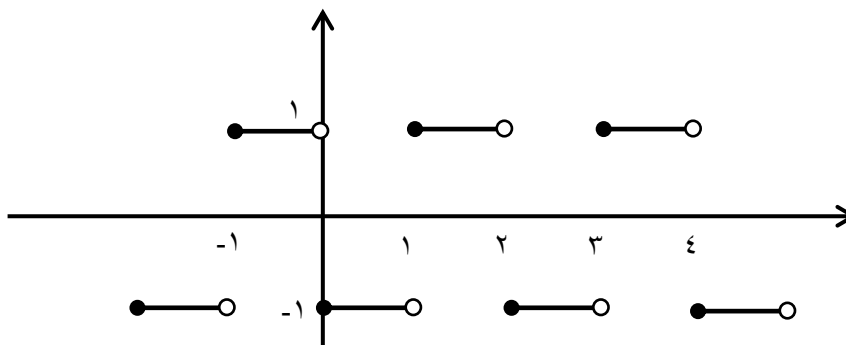
حل.

$$f(2) = f(0) = -1$$

$$f(12/3) = f(4) = -1$$

$$f(13/2) = f(1/2) = 1$$

نمودار f را در دوره تناوب $0 \leq x < 2$ رسم و آن را تکرار می‌کنیم.

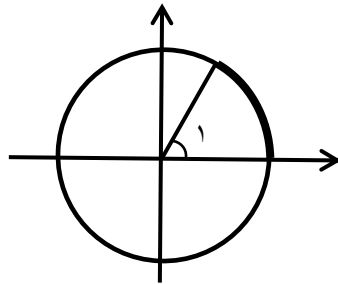


۲- توابع متعالی

در قسمت قبل توابع جبری معرفی شدند، توابعی را که جبری نباشند، توابع متعالی می‌نامند، توابع مثلثاتی، معکوس مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی و توابع هیپربولیک نمونه‌هایی از توابع متعالی هستند.

توابع مثلثاتی

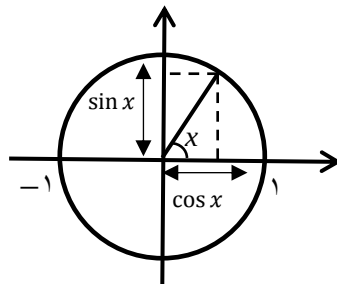
در مثلثات اندازه‌ی زاویه معمولاً بر حسب رادیان می‌باشد بنا بر تعریف: یک رادیان اندازه‌ی طول کمان مقابل به زاویه مرکزی است که برابر با شعاع دایره باشد.



تبدیل رادیان به درجه با رابطه زیر است.

$$\pi \text{ رادیان} \equiv 180^\circ$$

در شکل زیر دایره‌ای به شعاع واحد و به مرکز مبدا مفروض است.



$\cos x$ روی محور x ها و $\sin x$ روی محور y ها تعریف می‌شوند. (x در جهت پاد ساعتگرد مثبت و در جهت ساعتگرد منفی است) داریم:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

چهار تابع دیگر مثلثاتی در زیر آمده است.

$$\begin{aligned} \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} & , & & \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \csc x &= \frac{1}{\sin x} & , & & \sec x &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

چند رابطه‌ی مثلثاتی:

رابطه بین مقادیر مثلثاتی:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \\ 1 + \cot^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x \end{aligned}$$

مقادیر مثلثاتی زاویه‌های منفی:

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \\ \tan(-x) &= -\tan x \\ \cot(-x) &= -\cot x\end{aligned}$$

دوره تناوب (اصلی) توابع مثلثاتی:

$$\begin{aligned}\sin(x + 2\pi) &= \sin x, & T &= 2\pi \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x, & T &= 2\pi \\ \tan(x + \pi) &= \tan x, & T &= \pi \\ \cot(x + \pi) &= \cot x, & T &= \pi\end{aligned}$$

مقادیر مثلثاتی جمع دو زاویه:

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \tan(x + y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \\ \cot(x + y) &= \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}\end{aligned}$$

مقادیر مثلثاتی دو برابر زاویه:

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

تبدیل ضرب مقادیر مثلثاتی به جمع:

$$\begin{aligned}\sin x \sin y &= \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)) \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))\end{aligned}$$

مربع مقادیر مثلثاتی:

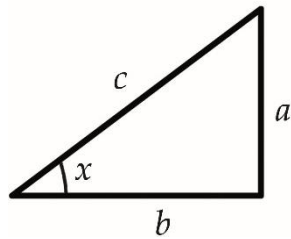
$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}\end{aligned}$$

توجه. توابع $\sin nx$ و $\cos nx$ دوره تناوب اصلی $T = \frac{2\pi}{n}$ و توابع $\tan nx$ و $\cot nx$ دوره تناوب اصلی $T = \frac{\pi}{n}$ دارند.

مثال. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\cos x}$ را بیابید.

حل. باید $\cos x \geq 0$ ، لذا انتهای کمان در ناحیه‌ی اول یا در ناحیه‌ی چهارم است.

$$D_f = \left\{ x \mid 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$



بنا به تعریف توابع مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه داریم:

$$\sin x = \frac{a}{c}, \quad \cos x = \frac{b}{c}$$

$$\tan x = \frac{a}{b}, \quad \cot x = \frac{b}{a}$$

وارون توابع مثلثاتی

هیچ کدام از توابع مثلثاتی یک به یک نیستند، ولی می‌توان با محدود کردن دامنه، (بطور قراردادی) آنها را یک به یک نمود.

تابع $f(x) = \sin x$ روی فاصله $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ یک به یک است. وارون آن را با $\sin^{-1} x$ نشان می‌دهند و داریم:

$$\sin^{-1} \alpha = \beta \Leftrightarrow \sin \beta = \alpha$$

همانطور که دیدیم در توابع وارون جای دامنه و برد عوض می‌شود

$$y = \sin^{-1} x, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

با استفاده از تعریف $\sin^{-1}$ مقادیر زیر بدست می‌آیند:

$$\sin^{-1} 0 = 0, \quad \sin^{-1} \frac{-1}{2} = -\frac{\pi}{6}, \quad \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

به طور مشابه وارون توابع مثلثاتی دیگر تعریف می‌شوند.

$$y = \cos^{-1} x, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi$$

$$y = \tan^{-1} x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$y = \cot^{-1} x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < \pi$$

$$y = \sec^{-1} x, \quad |x| \geq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad y \neq \frac{\pi}{2}$$

$$y = \csc^{-1} x, \quad |x| \geq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad y \neq 0$$

مثال. محاسبه کنید.

$$\sin^{-1}\left(\sin\frac{\sqrt{\pi}}{\lambda}\right) \quad \text{ب) ,} \quad \cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \quad \text{الف)}$$

حل الف) داریم: $\cos(\cos^{-1}(x)) = x$ بنابراین: $\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \frac{1}{\lambda}$

حل ب) $\sin\frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{\lambda}\right) = \sin\frac{\pi}{\lambda}$ اما $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{\lambda} < \frac{\pi}{2}$ بنابراین:

$$\sin^{-1}\left(\sin\frac{\sqrt{\pi}}{\lambda}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{\lambda}$$

چند رابطه:

$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sec^{-1}x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\csc^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

مثال. تساوی $\sec^{-1}x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ را ثابت کنید.

اثبات. فرض کنیم $\sec^{-1}x = \alpha$ پس: $\sec\alpha = x$

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{1}{x} \quad \text{پس:} \quad \cos\alpha = \frac{1}{x} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\cos\alpha} = x$$

بنابراین:

$$\blacksquare \quad \sec^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{x}$$

توابع نمایی و لگاریتمی

بسیاری از روابط بین دو کمیت مدل‌های غیر خطی هستند. یکی از مهمترین آنها مدل نمایی است. هر

تابع به صورت $f(x) = a^x$ را یک تابع نمایی با پایه‌ی a می‌نامند که در آن $a > 0$ و $a \neq 1$

است. تابع a^x را به ازای x های مختلف بررسی می‌کنیم.

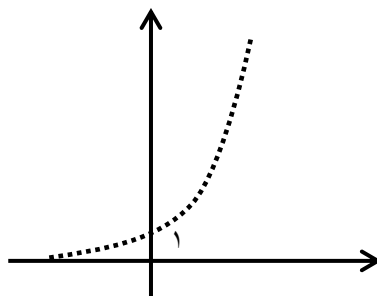
$$a^0 = 1$$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ بار}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

حال این سوال مطرح است که اگر x عددی گنگ باشد، a^x چگونه است؟
برای سادگی تابع 2^x را در نظر می‌گیریم، نمودار نقطه‌ای برای اعداد گویا رسم شده است.



برای x های گنگ به طور شهودی 2^x را طوری تعریف می‌کنیم که نمودار متصل گردد

$$2^{\sqrt{2}} \cong 2^{1/41} = 2^{\frac{141}{100}} \cong 2/65 \quad \text{مثلا:}$$

خواص تابع نمایی:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

تعریف. تابع حقیقی $f(x)$ روی فاصله‌ی I مفروض است.

(الف) اگر نابرابری $x_1 < x_2$ ، ایجاب کند $f(x_1) < f(x_2)$ ، آنگاه f روی فاصله‌ی I صعودی است.

(ب) اگر نابرابری $x_1 < x_2$ ، ایجاب کند $f(x_1) > f(x_2)$ ، آنگاه f روی فاصله‌ی I نزولی است.

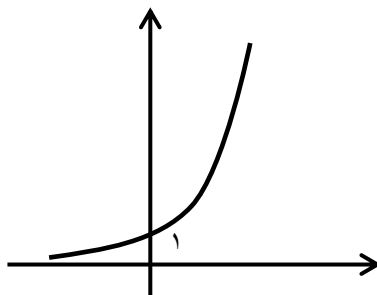
(ج) اگر تابع f روی فاصله‌ی I نزولی یا صعودی باشد، f را روی فاصله‌ی I یکنوا می‌نامند.

توابع مقدماتی ۲۵

یکی از پایه های مهم عدد ثابت e است این عدد گنگ می باشد و برابر است با:

$$e = ۲/۷۱۸۲ \dots$$

تابع e^x مهمترین تابع نمایی است. نمودار آن در زیر رسم شده است.



$$D_{e^x} = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad R_{e^x} =]0, +\infty[$$

توجه. تابع e^x را با $\exp(x)$ نیز نشان می دهند.

وارون تابع $f(x) = a^x$ را با $f^{-1} = \log_a x$ نشان می دهند، و آن را **لگاریتم** x در پایه a می نامند. به عبارت دیگر:

$$a^t = z \Leftrightarrow \log_a z = t$$

$$D_{\log} =]0, +\infty[\quad , \quad R_{\log} = \mathbb{R}$$

خواص تابع $\log x$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad (\text{الف})$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (\text{ب})$$

$$\log_a x^r = r \log_a x \quad (\text{ج})$$

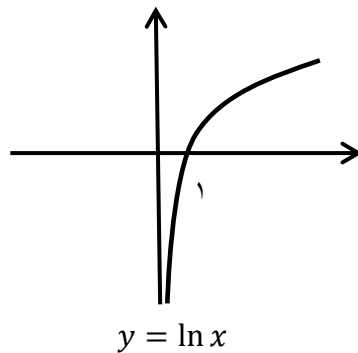
$$\begin{cases} \log_a 1 = 0 \\ \log_a a = 1 \end{cases} \quad (\text{د})$$

$$a^{\log_a x} = x \quad , \quad x > 0 \quad (\text{ه})$$

$$\log_a (a^x) = x \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{و})$$

۲۶ فصل دوم

لگاریتم در پایه e را لگاریتم طبیعی می‌نامند و با علامت $\ln$ نشان می‌دهند.



$$\log_e x = \ln x$$

$$D_{\ln} =]0, +\infty[$$

مثال. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\ln(4x + 2) < 0 \quad (\text{ب}) \quad e^{2x+1} = 3 \quad (\text{الف})$$

حل الف) از طرفین $\ln$ می‌گیریم:

$$x = \frac{\ln 3 - 1}{2} \quad \text{پس:} \quad 2x + 1 = \ln 3$$

$$\ln(4x + 2) < 0 = \ln 1 \quad (\text{حل ب})$$

$$x < -\frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad 4x + 2 < 1$$

$$x > -\frac{1}{2} \quad \text{پس:} \quad 4x + 2 > 0 \quad \text{از طرفی:}$$

بنابراین:

$$-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{4}$$

روابط زیر برقرارند:

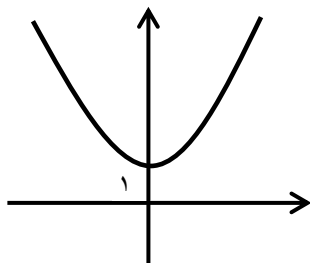
$$a^x = e^{x \ln a} \quad (\text{ب}) \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (\text{الف})$$

توابع هذلولوی (هیپربولیک)

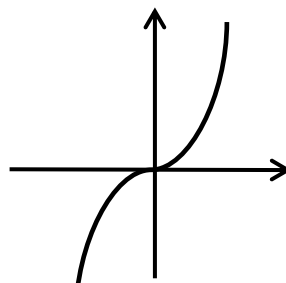
به دلیل اهمیت تابع e^x توابع هذلولوی بر حسب e^x تعریف می‌شوند.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{و} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

توابع مقدماتی ۲۷



$$y = \cosh x$$



$$y = \sinh x$$

با توجه به شکل بالا، برد تابع $\cosh$ برابر است با: $R_{\cosh} = [1, +\infty[$

با همانند سازی با توابع مثلثاتی، چهار تابع هذلولوی دیگر به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} & , & & \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \\ \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} & , & & \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} \end{aligned}$$

چند رابطه:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ 1 - \tanh^2 x &= \operatorname{sech}^2 x \\ \coth^2 x - 1 &= \operatorname{csch}^2 x \end{aligned}$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

مثال. اگر $\sinh x = 4$ سایر مقادیر هذلولوی را بیابید.

حل. از رابطه $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ بدست می‌آید: $\cosh^2 x = 17$

پس: $\cosh x = \pm\sqrt{17}$ اما $\cosh x \geq 1$ لذا $\cosh x = +\sqrt{17}$

همچنین:

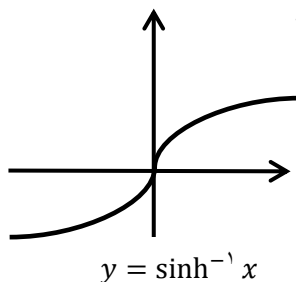
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\sqrt{17}}{4} \text{ و } \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

توابع وارون هذلولوی

تابع $f(x) = \sinh x$ روی دامنه‌ی خود یک به یک است وارون این تابع را با $\sinh^{-1} x$ نشان می‌دهند.

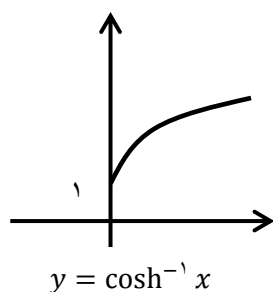
$$\sinh^{-1} \alpha = \beta \Leftrightarrow \sinh \beta = \alpha$$

دامنه و برد تابع $\sinh^{-1} x$ ، $\mathbb{R}$ است.



با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = \cosh x$ روی فاصله‌ی $[0, +\infty[$ تابع f یک به یک می‌شود. وارون این تابع را با $\cosh^{-1} x$ نشان می‌دهند.

$$\cosh^{-1} \alpha = \beta \Leftrightarrow \cosh \beta = \alpha$$



$$\cosh^{-1} 1 = 0 \Leftrightarrow \cosh 0 = 1 \quad \text{مثلاً}$$

سایر توابع وارون هذلولوی به طور مشابه تعریف می‌شوند.

روابط زیر برقرارند.

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{الف})$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1 \quad (\text{ب})$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad -1 < x < 1 \quad (\text{ج})$$

تابع ضمنی و انتقال نمودارها

معادله $f(x, y) = 0$ رابطه‌ی بین دو متغیر x و y را نشان می‌دهد، اگر y تابعی از x باشد گوییم y تابعی ضمنی از x با رابطه‌ی $f(x, y) = 0$ است.

مثلاً معادله‌ی $x^2 + y^2 = 1$ معادله‌ی ضمنی است و y به صورت دو تابع از x بدست می‌آید:

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

توجه. هرگاه $y = g(x)$ باشد. می‌توان آن را با رابطه‌ی زیر به تابع ضمنی تبدیل نمود.

$$f(x, y) = y - g(x) = 0$$

چند خاصیت انتقال نمودارها

فرض کنیم a و b اعدادی ثابت باشند.

۱- برای رسم نمودار $f(x - a, y) = 0$ ، نمودار $f(x, y) = 0$ را به اندازه $|a|$ در راستای محور x ها انتقال می‌دهیم. $a > 0$ به سمت راست و $a < 0$ به سمت چپ.

۲- برای رسم نمودار $f(x, y - b) = 0$ ، نمودار $f(x, y) = 0$ را به اندازه $|b|$ در راستای محور y ها انتقال می‌دهیم. $b > 0$ به سمت بالا و $b < 0$ به سمت پایین.

۳- برای رسم نمودار $f(-x, y) = 0$ ، قرینه نمودار $f(x, y) = 0$ را نسبت به محور y ها رسم می‌کنیم.

۴- برای رسم نمودار $f(x, -y) = 0$ ، قرینه نمودار $f(x, y) = 0$ را نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم.

۵- برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ ، قسمتی از نمودار $y = f(x)$ که بالای x ها قرار دارد را رسم و سپس قسمتی دیگر از نمودار $y = f(x)$ را که زیر محور x ها قرار دارد قرینه‌ی آن را نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم. (نمودار زیر محور x ها حذف می‌شود).

۶- برای رسم نمودار $f(y, x) = 0$ ، قرینه نمودار $f(x, y) = 0$ را نسبت به خط $y = x$ رسم می‌کنیم.

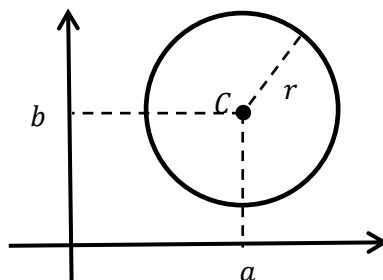
۴- مقاطع مخروطی

اشکال دایره، سهمی، بیضی و هذلولی از تقاطع صفحه با مخروط کامل بدست می‌آیند، بدین جهت اینها را مقاطع مخروطی می‌نامند و معادلات آنها در صفحه به صورت زیر است:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

۳۰ فصل دوم

دایره. معادله $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ دایره‌ای به مرکز $C(a, b)$ و شعاع r است.



مثال. معادلات زیر را در صفحه توصیف کنید.

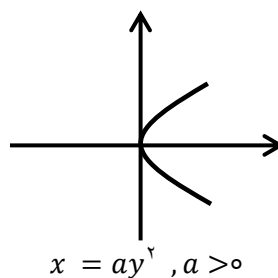
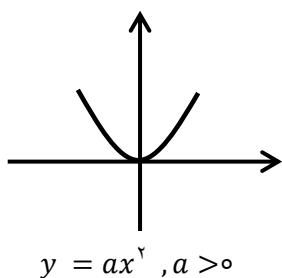
الف) $x^2 + y^2 = 4$ ب) $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 3 = 0$

حل الف) معادله دایره‌ای به مرکز $C(0, 0)$ و شعاع $r = 2$ است.

حل ب) با تشکیل مربع کامل داریم: $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 7$ و این معادله دایره‌ای به مرکز $C(-3, 1)$ و شعاع $r = \sqrt{7}$ است.

سهمی. معادله $y = ax^2$ یا $x = ay^2$ معادله یک سهمی در صفحه است.

با استفاده از انتقال، این معادلات به صورت $y = ax^2 + bx + c$ یا $x = ay^2 + by + c$ تبدیل می‌شوند.



مثال. معادلات زیر را در صفحه توصیف کنید.

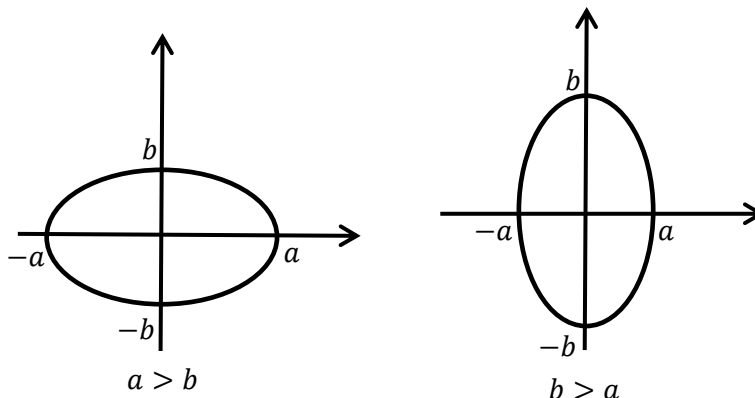
الف) $y = -x^2 + 4x - 3$ ب) $x = y^2 + 2y + 1$

حل الف) با تشکیل مربع کامل: $y = -(x - 2)^2 + 1$

لذا یک سهمی به راس $A(2, 1)$ می‌باشد که دهانه‌ی آن به سمت پایین باز می‌شود.

حل ب) با تشکیل مربع کامل: $x = (y + 1)^2$ می باشد که دهانه‌ی آن به سمت راست باز می شود. لذا یک سهمی به راس $A(0, -1)$ می باشد.

بیضی. معادله‌ی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ یک بیضی در صفحه به مرکز $C(0, 0)$ و قطرهای $2a$ و $2b$ است.



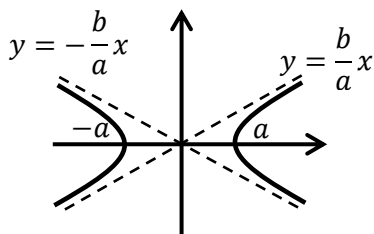
مثال. معادلات زیر را در صفحه توصیف کنید.

الف) $x^2 + 4y^2 = 4$ ب) $9(x-1)^2 + y^2 + 2y - 8 = 0$

حل الف) معادله‌ی $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ یک بیضی به مرکز $C(0, 0)$ و قطر بزرگ $2a = 4$ و قطر کوچک $2b = 2$ است.

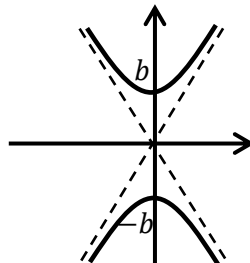
حل ب) با تشکیل مربع کامل: $\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ معادله‌ی یک بیضی به مرکز $C(1, -1)$ و قطر بزرگ $2b = 6$ و قطر کوچک $2a = 2$ است.

هذلولی. معادله‌ی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ یک هذلولی در صفحه به مرکز $C(0, 0)$ و با دو راس $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ می باشد. هذلولی از دو قسمت تشکیل شده است که آنها را شاخه‌های هذلولی می نامند. می توان نشان داد $y = \frac{b}{a}x$ و $y = -\frac{b}{a}x$ مجانب‌های هذلولی هستند.



۳۲ فصل دوم

همچنین $1 = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ یک هذلولی است که دهانه‌ی آن به سمت بالا و پایین باز می‌شود.



مثال. معادلات زیر را در صفحه توصیف کنید.

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1 \quad (\text{الف})$$

حل الف) معادله‌ی هذلولی است. برای $x=0$ بدست می‌آید: $y = \pm 2$ لذا دو نقطه‌ی $(0, 2)$ و $(0, -2)$ مختصات راس هذلولی هستند. (دهانه‌ی آن به سمت بالا و پایین باز می‌شود.)

حل ب) یک هذلولی انتقال یافته به مرکز $C(1, 2)$ و برای $y=2$ داریم:

$$x = -2 \quad \text{یا} \quad x = 4$$

لذا دو نقطه‌ی $(4, 2)$ و $(-2, 2)$ مختصات راس هذلولی هستند. (دهانه‌ی آن به سمت چپ و راست باز می‌شود.)

۵-تمرینات فصل دوم

نمودارهای زیر را رسم کنید.

$$1 - y = -3x + 4$$

$$2 - x^2 + y^2 - 2xy = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & x > 0 \\ 3 & x = 0 \\ x^3 & x < 0 \end{cases} \quad -3$$

$$4 - x = -2y + 1$$

۵- نامساوی مثلث $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ را ثابت کنید.

۶- با استفاده از نامساوی مثلث، نشان دهید $|x - y| \geq ||x| - |y||$

توابع مقدماتی ۳۳

۷- خطی قائم بر خط $2x + 4y = 1$ بیابید که از نقطه‌ی $A(0, 1)$ عبور کند.

۸- دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sqrt{\frac{-2x+1}{-x^2+x-3}} \quad (\text{الف}) \quad g(x) = \sqrt{4 - |2x - 6|} \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = \sqrt{[x] - x} \quad (\text{ج}) \quad g(x) = \frac{1}{u(x)-1} \quad (\text{د})$$

نمودارهای زیر را رسم کنید.

$$y = x \operatorname{sgn}(x) + 2 \quad -9$$

$$y = \operatorname{sgn}(|x|) \quad -10$$

$$y = \operatorname{sgn}(u(x)) \quad -11$$

۱۲- اگر f روی فاصله‌ی $[0, 1]$ تعریف شده باشد، دامنه تابع $f(4x^2 + 1)$ را بیابید.

وارون توابع یک به یک زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \quad -13$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4}, \quad x < 0 \quad -14$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} \quad (x \geq 1) \quad -15$$

۱۶- دوره‌ی تناوب توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sin^2 x \quad (\text{ب}) \quad f(x) = [x] - x \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = |\cos x| \quad (\text{د}) \quad f(x) = \cos 3x \quad (\text{ج})$$

۱۷- نشان دهید اگر f تابعی یک به یک باشد، f^{-1} نیز تابعی یک به یک است.

۱۸- تابع متناوب زیر رسم کنید.

$$f(x+1) = f(x) \quad \text{و} \quad f(x) = x, \quad 0 \leq x < 1$$

۱۹- اگر $f(x) = \sin x$ و $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ وارون توابع f را بر حسب $\sin^{-1} x$ بیابید.

۳۴ فصل دوم

۲۰- عبارات زیر را بدست آورید.

$$\cos(\sin^{-1} x) \quad \text{الف)} \quad \tan(\sin^{-1} x) \quad \text{ب)}$$

۲۱- تساوی $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ را ثابت کنید.

۲۲- معادلات زیر را حل کنید.

$$e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{الف)} \quad \ln(2x + 1) + \ln x = 0 \quad \text{ب)}$$

۲۳- نشان دهید تابع $f = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$ فرد است و سپس وارون f را بیابید.

۲۴- اگر $\tanh x = \frac{2}{5}$ سایر مقادیر هذلولوی را بدست آورید.

روابط زیر را ثابت کنید.

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad ۲۵-$$

$$\tanh(\ln x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad ۲۶-$$

۲۷- مقدار $\cosh(\ln 4)$ را بیابید.

۲۸- ثابت کنید $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

۲۹- مقاطع مخروطی های زیر را توصیف کنید.

$$y - 3 = (x + 2)^2 \quad \text{ب)}$$

$$x^2 + y^2 + y = 0 \quad \text{الف)}$$

$$y^2 - 8y = x - 1 \quad \text{د)}$$

$$4x^2 + 25y^2 = 25 \quad \text{ج)}$$

$$4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 28 = 0 \quad \text{و)}$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0 \quad \text{ه)}$$

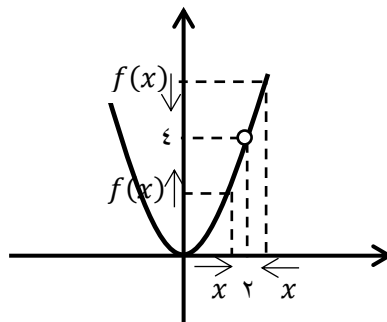
فصل سوم: حد و پیوستگی

حد مفهوم کلیدی در حساب دیفرانسیل و انتگرال و مشخصه‌ی این شاخه از ریاضیات می‌باشد که در مسائلی مانند شیب خط مماس بر منحنی، تعیین لحظه‌ی سرعت متحرک، مساحت ناحیه، جمع‌های نامتناهی و ... ظاهر می‌شود.

اگرچه یونانیان باستان برای تعیین مساحت اشکال و حجم اجسام از مفهوم حد استفاده می‌کردند (به روش افناء) ولی هیچگاه نتوانستند تعریف حد را صورت بندی نمایند. تعریف حد اولین بار هنگام ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط نیوتن مطرح شد و حدود دو قرن بعد توسط ریاضی‌دان فرانسوی آگستین-لوی کوشی و ریاضی‌دان آلمانی کارل-وایرستراس به طور دقیق بیان گردید.

۱- حد تابع

به طور ساده، حد رفتار تابع در اطراف یک نقطه است. تابع $f(x) = x^2$ با $x \neq 2$ مفروض است. با محاسبه معلوم می‌شود که با نزدیک شدن x به سمت ۲، مقدار $f(x)$ به سمت ۴ میل می‌کند



به عبارت دیگر حد تابع f در $x = 2$ برابر با ۴ است و آن را با $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ نشان می‌دهند.

تعریف. فرض می‌کنیم $f(x)$ تابعی است که در اطراف نقطه‌ی a تعریف شده باشد.

(بجز احتمالاً در a) هرگاه با نزدیک شدن x به قدر کافی به a ، مقدار $f(x)$ به دلخواه به عدد l نزدیک شود می‌گوییم حد تابع f در نقطه‌ی a برابر با l است و آن را با علامت زیر نشان می‌دهند.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

چند نکته :

- ۱- بودن یا نبودن $x = a$ در دامنه تابع f مهم نیست.
- ۲- اطراف نقطه a به این معنا است که بی‌نهایت نقطه در نزدیکی نقطه a جزو دامنه‌ی f باشند. پس هر تابعی مانند $f = \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.
- ۳- حد تابع در صورت وجود یکتا است.
- ۴- حد تابع ثابت برابر با خودش است. $\lim_{x \rightarrow 3} 8 = 8$

قضیه. فرض کنیم حد توابع f و g در $x = a$ وجود داشته باشند، این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\text{ج})$$

قضیه. توابع جبری و توابع متعالی که در فصل قبل بررسی شدند روی دامنه‌ی خود حد دارند و حد آنها در نقطه‌ی $x = a$ برابر با مقدار $f(a)$ است.

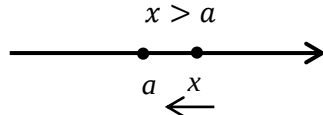
مثال. حدود زیر را در نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin^2 x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2} = \frac{2}{3}$$

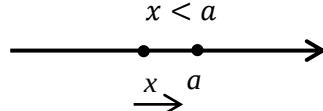
$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\tan^{-1} x} = \sqrt{\tan^{-1}(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

حد یک طرفه

اگر x فقط از سمت راست به a نزدیک می‌شود، آن را حد راست می‌نامند و با علامت زیر نشان می‌دهند.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$


اگر x فقط از سمت چپ به a نزدیک می‌شود، آن را حد چپ می‌نامند و با علامت زیر نشان می‌دهند.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$


حد و پیوستگی ۳۷

قضیه. تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a حد l دارد اگر و فقط اگر حدود چپ و راست در a وجود داشته و مساوی باشند.

مثال. حد تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ را در $a = 0$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

حل.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

بنا به قضیه بالا تابع f در $a = 0$ حد ندارد.

مثال. حد تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & x \geq 1 \\ 3x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $a = 1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x = 3 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} = 2$$

پس تابع در نقطه‌ی $a = 1$ حد ندارد.

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{[x^3] - [x^2]}{x^3 - x^2}$ را در $x = 3$ بررسی کنید.

حل. اگر x از سمت چپ به ۳ نزدیک شود، x را طوری اختیار می‌کنیم که: $\sqrt{8} \leq x < 3$

$$[x^2] = 8 \quad \text{پس:} \quad 8 \leq x^2 < 9$$

$$\sqrt[3]{26} < x < 3 \quad \text{همین طور اگر}$$

$$[x^3] = 26 \quad \text{پس:} \quad 2 < x^3 < 27$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x^3] - [x^2]}{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{26 - 8}{x^3 - x^2} = \frac{18}{18} = 1$$

به طور مشابه حد راست تابع نیز ۱ می‌شود. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x^3] - [x^2]}{x^3 - x^2} = 1$$

۲- حد و بی‌نهایت

$x \rightarrow +\infty$ به این معنا است که x از هر عدد مثبت بزرگی مانند M بزرگتر می‌شود. پس

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

یعنی هر گاه x از هر عدد مثبت بزرگی، بزرگتر شود مقدار تابع به سمت l میل می‌کند.

همچنین $x \rightarrow -\infty$ یعنی x از هر عدد منفی کوچکی، کوچکتر می‌شود. و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ معنای مشابهی دارد.

عبارت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یعنی هرگاه x به سمت a میل کند $f(x)$ از هر عدد مثبت بزرگی، بزرگتر می‌شود.

عبارت‌های زیر مفهوم حدی دارند.

$$\infty \times c = \infty \quad (c \neq 0), \quad (\infty)^n = \infty \quad n > 0$$

$$\infty + \infty = \infty, \quad \infty \times \infty = \infty$$

$$\frac{c}{0} = \infty \quad (c \neq 0), \quad \frac{c}{\infty} = 0$$

$$\sqrt[n]{\infty} = \infty, \quad \frac{\infty}{c} = \infty$$

$$e^{+\infty} = +\infty, \quad e^{-\infty} = 0$$

$$\ln(+\infty) = +\infty, \quad \ln(0) = -\infty$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty, \quad \tan\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -\infty$$

مثلاً عبارت $e^{-\infty} = 0$ به این معناست که $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ مثال. محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} \frac{x^2 + 1}{\frac{1}{4} - x} = \frac{17}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^-} \frac{x^2 + 1}{\frac{1}{4} - x} = \frac{17}{0^+} = +\infty$$

صورت‌های مبهم:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \times \infty, \quad \infty - \infty$$

$$1^\infty, \quad 0^\circ, \quad \infty^\circ$$

توجه. صورت‌های مبهم را با محاسبات از حالت مبهم خارج می‌کنیم.

مثال. محاسبه چند حد.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - x^2}{x^4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

حد و پیوستگی ۳۹

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^5 - x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \left(2 - \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^5 = +\infty$$

برای محاسبه حد چند جمله‌ای‌ها در بی‌نهایت، ($x \rightarrow \pm\infty$) می‌توان حد بزرگترین درجه‌ی چند جمله‌ای را در نظر گرفت.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 2x - 1}{5x^2 - 8x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{5x^2} = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x^2}}{x^2 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

قضیه. اگر $g(x)$ تابعی کراندار و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$

مثال. حد تابع $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ را در $x = 0$ بیابید.
 حل. تابع $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ کراندار است. ($-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$) پس بنا به قضیه قبل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

قضیه فشردگی. اگر در اطراف نقطه a داشته باشیم: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ و

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{آنگاه} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$$

مثال. حد تابع $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ را در $x_0 = 0$ بیابید.
 حل. بنا به خواص $[x]$ داریم: $\frac{1}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor < \frac{1}{x}$ اگر $x > 0$

$$1 - x \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor < 1$$

اما حد تابع اول و تابع سوم در $x_0 = 0$ با هم برابر است و بنا به قضیه فشردگی:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$$

به طور مشابه: $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$ بنابراین: $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$

۴۰ فصل سوم

مثال. نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x \in \mathbb{Q} \\ 2x + 2 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ فقط در نقطه‌ی $x = 1$ حد دارد. حل. در اطراف نقطه‌ی $x = 1$ داریم:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in \mathbb{Q}}} x + 3 = 4$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \notin \mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \notin \mathbb{Q}}} 2x + 2 = 4$$

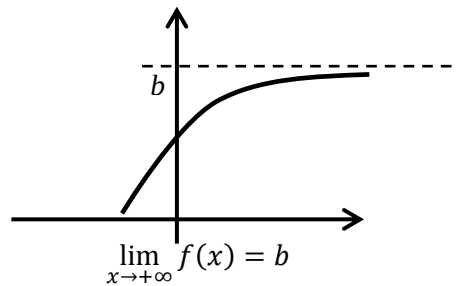
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 \quad \text{پس:}$$

از تساوی $x + 3 = 2x + 2$ فقط نقطه‌ی $x = 1$ بدست می‌آید. یعنی حد تابع در نقاط $a \neq 1$ وجود ندارد.

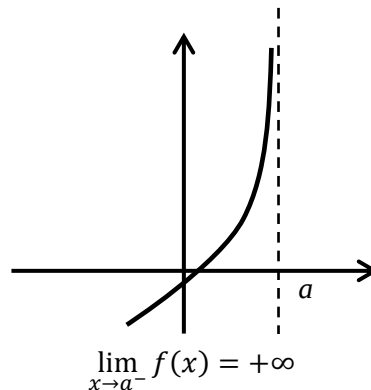
$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \notin \mathbb{Q}}} f(x)$$

مجاانب‌های تابع

فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = b$ یا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = b$ در این صورت خط $y = b$ مجانب افقی f می‌باشد.



همچنین اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ آنگاه خط $x = a$ مجانب قائم f می‌باشد.



حد و پیوستگی ۴۱

مثال. مجانب‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}$ را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{حل.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = -1$$

پس دو خط $y = \pm 1$ مجانب‌های افقی f هستند. همچنین $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+3} = \frac{\sqrt{1}}{0^+} = +\infty$

یعنی خط $x = -3$ مجانب قائم f است.

۳- پیوستگی توابع

تعریف. تابع حقیقی $f(x)$ مفروض است، اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ آنگاه تابع f را در نقطه‌ی $x = a$ پیوسته می‌نامند.

این تعریف را گاهی به صورت سه شرط بیان می‌کنند.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{الف) } a \in D_f \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ وجود داشته باشد.} \quad \text{ج) } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

پیوستگی از لحاظ مفهومی به این معنا است که هرگاه x تغییر اندکی داشته باشد، $f(x)$ نیز تغییر اندکی دارد، به عبارت دیگر توابع پیوسته تغییرات ناگهانی و جهشی ندارند.

مثال. پیوستگی توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید.

$$x_0 = 1, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \neq 1 \\ 4 & x = 1 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

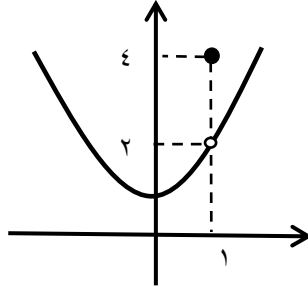
$$x_0 = 2, \quad g(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 2 \\ -x + 2 & x < 2 \end{cases} \quad \text{ب)}$$

$$x_0 = 0, \quad h(x) = \begin{cases} \ln|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{ج)}$$

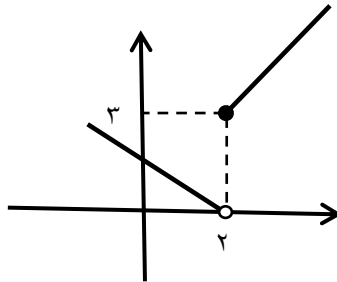
حل الف) داریم: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 1 = 2$ ، اما $f(1) = 4$ بنابراین f در

$x = 1$ حد دارد ولی $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq f(1)$ در این حالت می‌گوییم f در $x = 1$

ناپیوستگی رفع شدنی دارد.

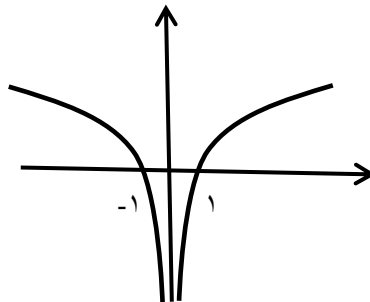


حل ب) ملاحظه می شود که تابع در $x = 2$ حد ندارد. (حد راست و چپ برابر نیستند.) در این حالت می گوییم تابع در $x = 2$ ناپیوستگی جهشی (اساسی) دارد.



حل ج) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| = -\infty$ پس $h(x)$ در $x = 0$ حد ندارد.

(حد نامتناهی دارد.) در این حالت می گوییم $h(x)$ در $x = 0$ ناپیوستگی نامتناهی دارد.

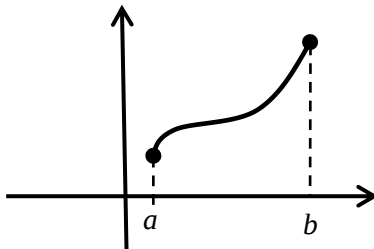


تعریف. هرگاه تابعی در هر نقطه از دامنه اش پیوسته باشد می گوییم f روی دامنه اش پیوسته است و پیوستگی f روی فاصله ی بسته $[a, b]$ به این معنا است که f روی فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد و

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

حد و پیوستگی ۴۳

از لحاظ هندسی هرگاه f روی فاصله‌ی در اعداد حقیقی پیوسته باشد، نمودار آن متصل خواهد بود.



توجه. توابع جبری و توابع متعالی که در فصل دوم بررسی شدند روی دامنه خود پیوسته هستند.

قضیه. هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ و تابع $f(x)$ در $x=b$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(b)$$

به عبارت دیگر حد از توابع پیوسته عبور می‌کند.

توجه. جمع، ضرب، تقسیم و ترکیب توابع پیوسته، پیوسته است.

مثال. توابع زیر در کجاها پیوسته اند.

الف) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$ ب) $g(x) = \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}$ ج) $h(x) = \sec x$
 حل الف) توابع $\sin x$ و $\sqrt[3]{x}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته هستند. پس ترکیب آنها یعنی $\sqrt[3]{\sin x}$ نیز روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

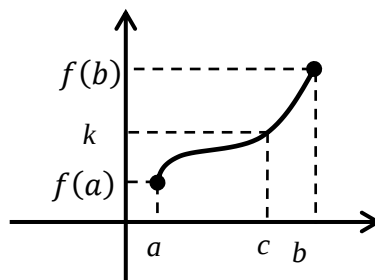
حل ب) داریم: $D_g =]-1, 1[$ پس این تابع جبری روی فاصله‌ی $] -1, 1[$ پیوسته است.

حل ج) $D_h = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ تابع متعالی $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ روی دامنه خود پیوسته است.

قضیه مقدار میانی. فرض کنیم تابع $f(x)$ روی فاصله‌ی بسته $[a, b]$ پیوسته و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد. $(f(a) \neq f(b))$ در این صورت عددی مانند c بین فاصله $[a, b]$ هست که:

$$f(c) = k$$

به طور شهودی درستی قضیه را می‌توان مشاهده نمود.



نتیجه. هر گاه در قضیه میانی $f(a)$ و $f(b)$ ، مختلف علامه باشند آنگاه یک $c \in]a, b[$ هست که:

$$f(c) = 0$$

مثال. ثابت کنید معادله‌ی $x^4 + x - 1 = 0$ حداقل یک ریشه دارد.

حل. تابع پیوسته $f(x) = x^4 + x - 1$ را در نظر می‌گیریم. $f(0) = -1 < 0$ و $f(1) = 1 > 0$ پس بنا به قضیه مقدار میانی یک $c \in]0, 1[$ هست که:

$$f(c) = 0$$

بسیاری از معادلات به صورت جبری قابل حل نیستند. مثلاً معادله‌ی $e^x = -x$ را نمی‌توان حل کرد با این حال در مثال زیر نشان می‌دهیم که این معادله جواب دارد.

مثال. نشان دهید معادله‌ی $e^x = -x$ جواب دارد.

حل. تابع پیوسته $f(x) = e^x + x$ را در نظر می‌گیریم. $f(0) = 1 > 0$ و $f(-1) < 0$ پس بنا به قضیه مقدار میانی یک $c \in]-1, 0[$ هست که:

$$f(c) = 0 \quad \text{یا} \quad e^c + c = 0 \quad \text{یا} \quad e^c = -c$$

در واقع با روش‌های محاسبات عددی می‌توان مقدار تقریبی c را با دقتی مطلوب به دست آورد.

۴- تمرینات فصل سوم

۱- حد بگیرید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[r]{1 - x^r} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^r + \Delta x + \epsilon}{x + 2} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{x^{-r}} \quad (\text{د}) \quad \lim_{x \rightarrow \epsilon} \frac{\sin(x - \epsilon)}{\epsilon - x} \quad (\text{ج})$$

$$-2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}([x]) \quad \text{را بیابید.}$$

$$-3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^r + x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{را بیابید.}$$

۴- حد بگیرید:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + r}{\epsilon - 2x} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + x^r + 1}{\Delta x^r - 2x + 2} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[r]{x^r - \epsilon x + 1}}{-\epsilon x + \Delta} \quad (\text{د}) \quad \lim_{x \rightarrow \epsilon} \frac{x - 2}{\ln x} \quad (\text{ج})$$

$$-5 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^r + 1} - x) \quad \text{را بیابید.}$$

$$-6 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^r + x + 1} - \sqrt{x^r - x + 1}) \quad \text{را بیابید.}$$

۷- مجانب‌های قائم و افقی توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = e^{-x^r} \quad (\text{ب}) \quad f(x) = \frac{x^r - \epsilon}{1 - x^r} \quad (\text{الف})$$

۸- حد توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید.

$$x = 1 \quad \text{در} \quad f(x) = \begin{cases} -3x + 1 & x \geq 1 \\ \sqrt{x} + 1 & x < 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$x = 0 \quad \text{در} \quad g(x) = u(x) + \operatorname{sgn}(x) \quad (\text{ب})$$

۴۶ فصل سوم

۹- نوع ناپیوستگی توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید.

$$\text{الف} \quad f(x) = [2x + 1] \quad \text{در} \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{x+9}}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \text{در} \quad x_0 = 0$$

$$\text{ج} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases} \quad \text{در} \quad x_0 = 0$$

۱۰- توابع زیر در کجاها پیوسته هستند.

$$\text{الف} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \quad \text{ب} \quad f(x) = \ln(\sin x) \quad \text{ج} \quad f(x) = e^{\frac{-1}{\sqrt{x}}}$$

۱۱- تابعی مثال بزنید که دامنه‌ی آن $\mathbb{R}$ و فقط در نقاط $x = 2$ و $x = 3$ ناپیوسته و در سایر نقاط پیوسته باشد.

۱۲- تابعی مثال بزنید که دامنه آن $\mathbb{R}$ و فقط در دو نقطه‌ی $x = 2$ و $x = 3$ پیوسته و در سایر نقاط ناپیوسته باشد.

۱۳- نشان دهید معادله‌ی $\sin x = x^2 - 1$ حداقل یک جواب دارد.

۱۴- با استفاده از قضیه مقدار میانی ثابت کنید هر چند جمله‌ای درجه‌ی فرد حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

۱۵- فرض کنید f روی فاصله‌ی $[a, b]$ پیوسته و یک به یک باشد، نشان دهید f روی این فاصله یکنوا است.

فصل چهارم: مشتق

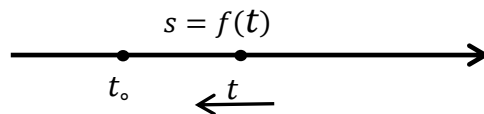
معمولاً در کتاب‌های درسی «حساب دیفرانسیل و انتگرال» مشتق به طور دقیق با حد تعریف می‌شود، اما در تاریخ ریاضیات ابتدا مشتق مطرح شد. بعد از پیدایش هندسه تحلیلی توسط دکارت مفهوم مشتق از تلاش ریاضی دانان برای حل مسائلی مانند یافتن خط مماس بر منحنی و یا سرعت لحظه‌ای یک متحرک شکل گرفت و در آثار ریاضی دانان ظاهر شد. ولی اولین صورت بندی رضایت‌مند آن در کارهای نیوتن و لایپ‌نیتس پدیدار شد.

۱- نسبت تغییرات

مفهوم مشتق بررسی تغییر یک کمیت نسبت به تغییر کمیت دیگر است، هنگامی که تغییرات بسیار اندک باشد.

سرعت لحظه‌ای

خط راست جهت داری را در نظر می‌گیریم و فرض کنیم متحرکی از یک نقطه روی این خط شروع به حرکت کند و $s = f(t)$ معادله‌ی حرکت این متحرک نسبت به زمان t باشد.



سرعت متوسط در بازه‌ی $[t_0, t]$ برابر است با مسافت طی شده، تقسیم بر زمان سپری شده یعنی $v = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ برای اینکه بدانیم سرعت در لحظه‌ی $t = t_0$ چقدر است باید فاصله‌ی $[t_0, t]$ را کوچک کنیم. به بیان ریاضی باید t به سمت t_0 میل کند. بنابراین سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه‌ی $t = t_0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

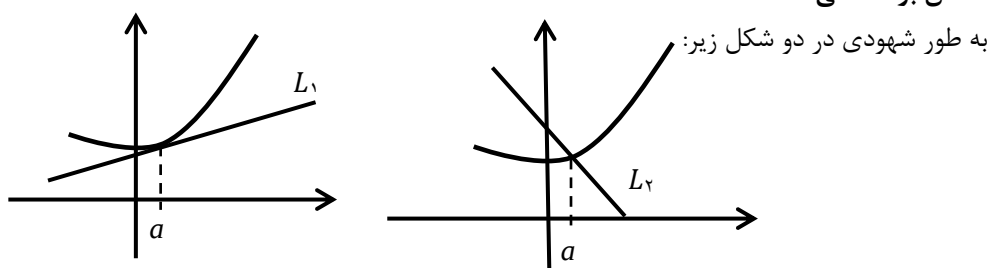
بنابراین سرعت لحظه‌ای مشتق مسافت نسبت به زمان است.

به طور کلیتر اگر کمیت y با کمیت x با ضابطه‌ی $y = f(x)$ معین شده باشد، آهنگ تغییر (لحظه‌ای) y نسبت به x در نقطه‌ی $x = a$ به صورت

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

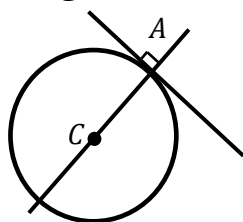
تعریف می‌شود. این عبارت مشتق $f(x)$ نسبت به x در نقطه‌ی $x = a$ نام دارد.

مماس بر منحنی



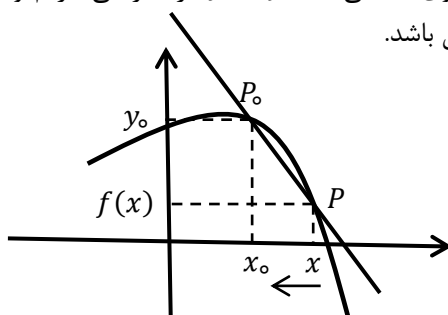
خط L_1 بر منحنی مماس است ولی خط L_2 بر منحنی مماس نیست.

خط مماس بر دایره در یک نقطه مانند A ، خطی است که از نقطه A عبور می‌کند و بر خطی که از مرکز دایره و نقطه A عبور می‌کند عمود باشد.



همچنین برای دیگر مقاطع مخروطی (بیضی - هذلولی و سهمی) با توجه به شکل هندسی آنها می‌توان خط مماس را تعریف کرد. ولی برای منحنی‌های دلخواه خط مماس چگونه باید تعریف شود؟ تلاش برای پاسخ به این سوال در قرن هفدهم میلادی منجر به تعریف مشتق شد.

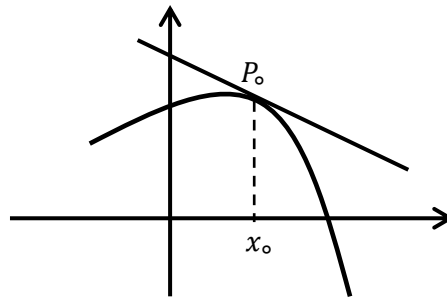
نقطه‌ی $P_0(x_0, y_0)$ را روی منحنی $y = f(x)$ در نظر می‌گیریم و فرض کنیم نقطه‌ی متحرک $P(x, f(x))$ روی منحنی باشد.



مشتق ۴۹

شیب خط گذرنده از دو نقطه P و P_0 برابر است با: $m_{\overline{P_0P}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
 اکنون با نزدیک شدن نقطه‌ی P به نقطه‌ی P_0 خط قاطع $\overline{P_0P}$ به خطی نزدیک می‌شود که آن را خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ی $P_0(x_0, x)$ می‌نامند، شیب این خط برابر است با:

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



به عبارت دیگر شیب خط مماس، مشتق $f(x)$ نسبت به x در $x = x_0$ است. همانطور که دیدیم هم سرعت لحظه‌ای و هم مماس بر منحنی با مشتق قابل بیان هستند.

تعریف مشتق. فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در اطراف نقطه‌ی $x = x_0$ تعریف شده باشد در این صورت مشتق f در نقطه‌ی x_0 به صورت زیر است:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

در صورتی که این حد عدد شود، $f(x)$ را در $x = x_0$ مشتق پذیر می‌نامند.

اگر $\Delta x = x - x_0$ مشتق f به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مثال. مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نقطه‌ی $x = 3$ بیابید.
حل.

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \frac{-1}{6} \\ f'(3) &= \frac{-1}{6} \end{aligned}$$

مثال. مشتق تابع $f(x) = x^2$ را در $x = 1$ بیابید و سپس آن را تفسیر کنید.

$$\text{حل.} \quad \dot{f}(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \quad \text{پس: } \dot{f}(1) = 2$$

فرض کنیم: $\Delta x = x - 1$ و $\Delta y = f(x) - f(1)$ بنابراین:

$$\dot{f}(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

اگر x نزدیک ۱ باشد. $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cong 2$ یا $\Delta y \cong 2\Delta x$ یعنی به ازای x های نزدیک ۱، تغییرات y تقریباً ۲ برابر تغییرات x است.

۲- مشتق توابع

قضیه. اگر تابع $f(x)$ در $x = a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در $x = a$ پیوسته است.

اثبات. باید نشان دهیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = \dot{f}(a) \times 0 = 0$$

بنابراین:

$$\blacksquare \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

قواعد مشتق گیری

فرض کنیم f و g توابعی مشتق پذیر و k عددی ثابت باشد.

$$(f(x) \pm g(x))' = \dot{f}(x) \pm \dot{g}(x)$$

$$(f(x).g(x))' = \dot{f}(x).g(x) + \dot{g}(x).f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{\dot{f}(x).g(x) - \dot{g}(x).f(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

$$(kf(x))' = k\dot{f}(x)$$

$$(k)' = 0$$

فرمول‌های مشتق

مشتق توابع جبری:

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R} \quad \text{ب) برای بعضی } n \text{ ها باید } x > 0 \text{ باشد.}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt[r]{x})' = \frac{1}{r\sqrt[r]{x^{r-1}}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

مشتق توابع مثلثاتی:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$

مشتق توابع وارون مثلثاتی:

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\cot^{-1} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

۵۲ فصل چهارم

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی:

$$\begin{aligned}(e^x)' &= e^x \\ (a^x)' &= a^x \cdot \ln a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\ln x)' &= \frac{1}{x} \\ (\log_a x)' &= \frac{1}{x \cdot \ln a}\end{aligned}$$

مشتق توابع هیپربولیک:

$$\begin{aligned}(\sinh x)' &= \cosh x \\ (\cosh x)' &= \sinh x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\tanh x)' &= \operatorname{sech}^2 x \\ (\coth x)' &= -\operatorname{csch}^2 x\end{aligned}$$

مشتق توابع وارون هیپربولیک:

$$\begin{aligned}(\sinh^{-1} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ (\cosh^{-1} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\tanh^{-1} x)' &= \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1 \\ (\coth^{-1} x)' &= \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1\end{aligned}$$

مشتق توابع چند ضابطه‌ای:

$$(|x|)' = \frac{|x|}{x}, \quad x \neq 0$$

$$([x])' = 0, \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

$$(\operatorname{sgn}(x))' = 0, \quad x \neq 0$$

$$(u(x))' = 0, \quad x \neq 0$$

مشتق ۵۳

مثال: با استفاده از قواعد و فرمول‌های مشتق، مشتق توابع زیر محاسبه شده‌اند.

$$(x^r \ln x)' = r x^{r-1} \ln x + \frac{1}{x} x^r$$

$$(\tan \cdot e^x)' = \sec^2 x \cdot e^x + e^x \tan x$$

$$\left(\frac{\sin^{-1} x}{\sin x} \right)' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sin x - \cos x \cdot \sin^{-1} x}{\sin^2 x}$$

دیدیم که شیب خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = x_0$ برابر است با:

$$m = f'(x_0)$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = x_0$ روی منحنی، به صورت زیر است:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

مثال. معادله‌ی خط مماس بر منحنی $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ را در نقطه‌ی $x = 1$ بیابید.

حل. $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$ پس: $m = f'(1) = \frac{-1}{2}$ بنابراین: $y = 1 + \frac{-1}{2}(x - 1)$ یا $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$

مثال. شیب خط مماس بر منحنی $f(x) = \sinh x$ را در نقطه‌ی $x = 0$ بیابید.

حل. $f'(x) = \cosh x$ پس $m = f'(0) = \cosh 0 = 1$

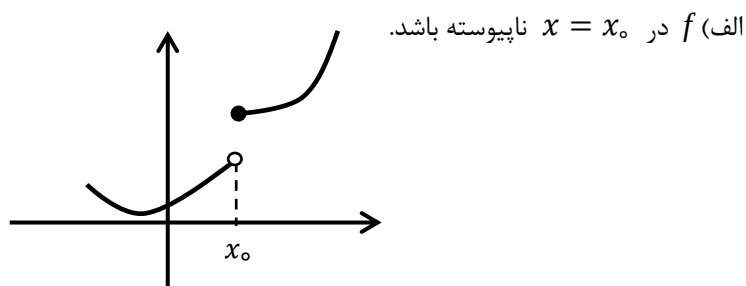
مشتق چپ و راست به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{مشتق راست}$$

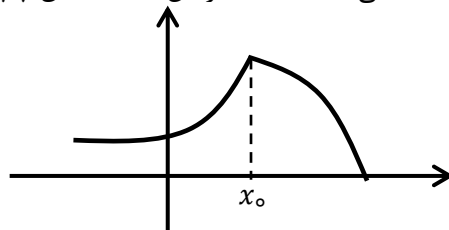
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{مشتق چپ}$$

۵۴ فصل چهارم

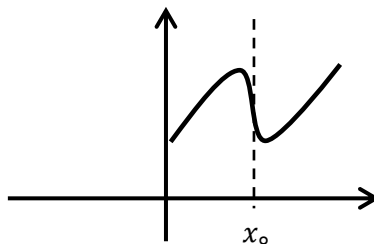
توجه. تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_0 مشتق پذیر است اگر و فقط اگر مشتق راست و مشتق چپ در x_0 وجود داشته و مساوی باشند.
در هر یک از حالت های زیر تابع f در نقطه‌ی $x = x_0$ مشتق پذیر نیست.



ب) f در $x = x_0$ شکستگی داشته باشد. در این حالت مشتق چپ و راست با هم برابر نیستند.



ج) f در $x = x_0$ مماس قائم داشته باشد. در این حالت: $f'(x_0) = \infty$



مثال. مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را بررسی کنید.

حل. $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x \neq 0$ و $\hat{f}'(0) = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\Big|_{x=0} = +\infty$ (مشتق نامتناهی دارد).

مثال. مشتق تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 2 \\ x-1 & x \geq 2 \end{cases}$ را بیابید.

حل. وجود مشتق را در نقاط مرزی بررسی می‌کنیم.

$$\dot{f}_+(\circ) = (x^2)'|_{x=\circ} = 2x|_{x=\circ} = \circ \quad \text{و} \quad \dot{f}_-(\circ) = (x^2)'|_{x=\circ} = 2x^2|_{x=\circ} = \circ$$

همچنین f در $x = \circ$ پیوسته است. پس $\dot{f}(\circ) = \circ$

در نقطه $x = 2$ تابع f ناپیوسته و لذا مشتق پذیر نیست. بنابراین:

$$\dot{f}(x) = \begin{cases} 2x^2 & x < \circ \\ 2x & \circ \leq x < 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

مثال. تابعی مثال بزنید که دامنه آن $\mathbb{R}$ و فقط در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر باشد.

حل.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 2x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

از تساوی $x^2 + 1 = 2x$ بدست می‌آید: $x = 1$ پس f در $x = 1$ پیوسته است. از طرفی

$$\dot{f}(x)|_{x \notin \mathbb{Q}} = 2 \quad \text{و} \quad \dot{f}(x)|_{x \in \mathbb{Q}} = 2x \quad \text{و از تساوی} \quad 2x = 2 \quad \text{بدست می‌آید:} \quad x = 1$$

بنابراین $\dot{f}(1) = 2$ ، اما f در نقاط $x \neq 1$ ناپیوسته و لذا در این نقاط مشتق پذیر نیست.

۳- قاعده زنجیری و مشتق‌گیری ضمنی

فرض کنیم $y = f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد، نمادهای دیگر مشتق $f(x)$ به صورت زیر است.

$$\dot{f}(x) = \dot{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}$ فقط به معنی $\dot{y}(x)$ است با این حال $\frac{dy}{dx} = \dot{y}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow \circ} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ بنابراین $\frac{dy}{dx}$ حد یک کسر است و خواهیم دید که رفتارهای کسرگونه دارد.

قاعده زنجیری.

فرض کنیم تابع $u = u(x)$ در x مشتق پذیر و تابع $f(u)$ در u مشتق پذیر باشد، آنگاه تابع

$$y = f(u(x)) \quad \text{در} \quad x \quad \text{مشتق پذیر است و داریم:}$$

$$\dot{f}(u(x)) = \dot{f}(u) \cdot \dot{u}(x)$$

به عبارت دیگر:

$$\dot{y}(x) = \dot{y}(u) \cdot \dot{u}(x)$$

با نماد لایپ نیتسی، قاعده زنجیری به صورت زیر است:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

نکته. هرگاه $y = f(u(x))$ ، بنا به قاعده زنجیری به تمام فرمول‌های مشتق، ضریب $\dot{u}(x)$ ضرب می‌شود. مثلاً

$$(\sin u)'_x = \cos u \cdot \dot{u}(x)$$

$$(\sqrt{u})'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \dot{u}(x)$$

$$(\tan^{-1} u)'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot \dot{u}(x)$$

چند مثال.

$$(\sin(\sqrt{x}))' = \cos(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (u = \sqrt{x})$$

$$\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{1}{x}} \times \frac{-1}{x^2} \quad (u = \frac{1}{x})$$

$$(\cos^2 x)' = 2 \cos x \times (-\sin x) \quad (u = \cos x)$$

$$(\tan^{-1}(x^2))' = \frac{1}{1+(x^2)^2} \times 2x \quad (u = x^2)$$

مثال. اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ، مشتق تابع $f\left(\frac{1}{x+4}\right)$ را بیابید.
حل. اگر $u = \frac{1}{x+4}$ ، بنا به قاعده زنجیری:

$$\begin{aligned} \left(f\left(\frac{1}{x+4}\right)\right)'(x) &= f'(u) \cdot \dot{u}(x) = \sqrt{u^2 + 1} \cdot \frac{-1}{(x+4)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{x+4}\right)^2 + 1} \cdot \frac{-1}{(x+4)^2} \end{aligned}$$

مشتق مراتب بالاتر. اگر $y = f(x)$ ، مشتق مراتب بالاتر f در صورت وجود به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \ddot{y}(x) = \ddot{f}(x) = (f'(x))' \\ \frac{d^3 y}{dx^3} &= y^{(3)}(x) = f^{(3)}(x) = (\ddot{f}(x))' \\ \frac{d^4 y}{dx^4} &= y^{(4)}(x) = f^{(4)}(x) = (f^{(3)}(x))' \end{aligned}$$

مثال. اگر $f(x) = xe^{3x}$ ، مشتق مرتبه‌ی پانزدهم f را در $x = 0$ بیابید.

حل. $f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = (3x + 1)e^{3x}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (3^2x + 2 \times 3)e^{3x} \\ f^{(3)}(x) &= (3^3x + 3 \times 3^2)e^{3x} \\ f^{(4)}(x) &= (3^4x + 4 \times 3^3)e^{3x} \end{aligned}$$

با ادامه این فرایند مشتق مرتبه‌ی پانزدهم برابر است با:

$$\begin{aligned} f^{(15)}(x) &= (3^{15}x + 15 \times 3^{14})e^{3x} \\ f^{(15)}(0) &= 15 \times 3^{14} \end{aligned}$$

مشتق‌گیری ضمنی

اگر y تابعی ضمنی از x با رابطه‌ی $f(x, y) = 0$ باشد، با فرض مشتق پذیر بودن y نسبت به x می‌توان از طرفین معادله مشتق گرفت، این روش را مشتق‌گیری ضمنی می‌نامند.

مثال: در معادله‌ی $x^2 + y^2 = 1$ ، $y'(x)$ را بیابید.

حل. از طرفین معادله مشتق می‌گیریم: $2x + 2y y' = 0$ لذا $y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$

فرض کنیم y تابعی ضمنی از x با رابطه‌ی $f(x, y) = 0$ باشد. تحت شرایط مناسب $y'(x)$ از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = -\frac{f_x}{f_y}$$

که در آن f_x مشتق f نسبت به x است. (y ثابت فرض می‌شود). همچنین f_y مشتق f نسبت به y است. (x ثابت فرض می‌شود).

نکته. به طور مشابه: $\frac{dx}{dy} = x'(y) = -\frac{f_y}{f_x}$

مثال. معادله‌ی خط مماس به هذلولی $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$ را در نقطه‌ی $A(1, 2)$ بیابید.

حل. اگر $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x+2y+1}{2x-2y}$ آنگاه:

$$m = y'(x) \Big|_{A(1,2)} = -\frac{2+4+1}{2-4} = \frac{7}{2}$$

بنابراین معادله خط مماس برابر است با:

$$y - 2 = \frac{7}{2}(x - 1)$$

مثال. در معادله $x^3 + y^3 = 2$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ را بیابید.

حل. $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2}{3y^2} = -\frac{x^2}{y^2}$ پس: $y' \cdot y^3 = -x^2$ از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$y'' \cdot y^3 + 3y^2 (y')^2 = -2x$$

با جایگذاری $y' = -\frac{x^2}{y^2}$ در معادله به دست می‌آید:

$$y'' = \frac{-4x}{y^5}$$

مشتق تابع وارون

قضیه. فرض کنیم تابع $f(x)$ روی فاصله I مشتق پذیر و $\hat{f}(x)$ روی I همواره مثبت (یا منفی) باشد و $f(a) = b$ در این صورت:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{\hat{f}(a)}$$

بنابراین قضیه اگر $y = f^{-1}(x)$ ، آنگاه $y'(x) = \frac{1}{\hat{x}(y)}$ و با نماد لایپ نیتسی داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

مثال. اگر $f(x) = x + e^x$ ، مشتق f^{-1} را در نقطه $x = 1$ بیابید.

حل. $\hat{f}(x) = 1 + e^x > 0$ و $f(0) = 1$ بنا به قضیه مشتق وارون:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{\hat{f}(0)} = \frac{1}{2}$$

مثال. مشتق تابع $y = \tan^{-1}x$ را بیابید.

حل. $y = \tan^{-1}x$ پس $x = \tan y$ همچنین $\hat{x}(y) = 1 + \tan^2 y$ بنا به قضیه:

$$y'(x) = \frac{1}{\hat{x}(y)} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1 + x^2}$$

بنابراین:

$$(\tan^{-1}x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

مشتق لگاریتمی

مثال. مشتق تابع $y = x^x$, $x > 0$ را بیابید.

حل. از طرفین معادله $y = x^x$ ، $\ln$ می گیریم:

$$\frac{y}{y} = \ln x + 1 \quad \text{از طرفین معادله ی اخیر مشتق می گیریم:}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \quad \text{لذا}$$

بنابراین:

$$y' = x^x (\ln x + 1)$$

این روش را که ابتدا لگاریتم و بعد مشتق گرفتیم، مشتق لگاریتمی می نامند.

مثال. مشتق تابع $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $x > 0$ را بیابید.

$$\text{حل. } y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{لذا} \quad \ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \right)$$

$$\frac{y'}{y} = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{-1}{x+1} \right)$$

بنابراین:

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\frac{-1}{x+1} + \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right)$$

۴- دیفرانسیل

فرض کنیم $y = f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد، دیفرانسیل y به صورت زیر تعریف می شود.

$$dy = f'(x)dx$$

که در آن dx ، دیفرانسیل x و متغیری مستقل می باشد. در واقع dy تابعی بر حسب دو متغیر مستقل x و dx است.

مثال: اگر $y = x^2 + 3x$ ، دیفرانسیل y را به ازای $x = 1$ و $dx = 0.1$ حساب کنید.

حل.

$$dy = y'(x)dx = (2x + 3)dx \quad \text{به ازای } x = 1 \text{ و } dx = 0.1 \text{ بدست می آید:}$$

$$dy = (2 + 3) \cdot 0.1 = 0.5$$

۶۰ فصل چهارم

در زیر دیفرانسیل چند تابع حساب شده است.

$$\begin{aligned}d(\sqrt{x}) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\d\left(\frac{1}{x} + e^x\right) &= \left(\frac{-1}{x^2} + e^x\right) dx \\d(-5x + 1) &= -5 dx\end{aligned}$$

اگر $\Delta x = x - x_0$ و $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ داریم: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
به ازای Δx های کوچک:

$$\Delta y \cong f'(x_0)\Delta x \quad \text{و یا} \quad f'(x) \cong \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

اگر $dx = \Delta x$ داریم: $\Delta y \cong f'(x_0)dx$

پس به ازای Δx های کوچک: $\Delta y \cong dy$

۵- تمرینات فصل چهارم

۱- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بیابید و عدد بدست آمده را به عنوان آهنگ تغییر دو کمیت تفسیر کنید.

الف) $x_0 = 2$, $f(x) = x^2 + x$

ب) $x_0 = 1$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$

۲- مشتق بگیرید.

الف) $f(x) = x^2 e^x$ ب) $f(x) = \sin x \cdot \ln x$

ج) $g(x) = \frac{\tan x}{x^2 + x}$ د) $g(x) = \frac{\tan^{-1} x}{x}$

۳- معادله‌ی خط مماس بر منحنی $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ را در نقطه‌ی $x = 1$ بیابید.

۴- معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = -x^2 + 2x + 3$ را طوری بیابید که موازی خط $y = 4x + 1$ باشد.

۵- مشتق بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x < 2 \\ 4x - 6 & x \geq 2 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} + 1 & x \geq 2 \\ x^2 - 2 & 1 \leq x < 2 \\ x^4 - 2x & x < 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

۶- تابعی مثال بزنید که دامنه‌ی آن $\mathbb{R}$ و فقط در دو نقطه مشتق پذیر باشد.

۷- مشتق بگیرید:

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 2x} \quad (\text{الف}) \quad g(x) = \ln(\sin x) \quad (\text{ب})$$

$$f(t) = \sin^4 t \quad (\text{ج}) \quad g(x) = \tan^{-1}(e^x) \quad (\text{د})$$

$$y = \sqrt{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} \quad (\text{ه}) \quad y = \sinh^{-1}(\sinh x) \quad (\text{و})$$

۸- اگر $\hat{f}(x) = \ln(3x)$ ، مشتق تابع $f\left(\frac{x+1}{x}\right)$ را بیابید.

۹- میزان تغییر $\sqrt{2x^2 + 4}$ را نسبت به $\frac{x^2}{1-x^2}$ در $x = 2$ بیابید.

۱۰- اگر $x > 0$ ، مشتق تابع $y = x^{\sin x}$ را بیابید.

۱۱- مشتق تابع $y = (\cosh x)^{2x+1}$ را بدست آورید.

۱۲- با استفاده از مشتق ضمنی، شیب خط مماس بر دایره‌ی $x^2 + y^2 = 25$ را در نقطه‌ی $A(3, 4)$ بیابید.

۱۳- معادله‌ی خط مماس بر بیضی $x^2 + 2xy + y^2 = 3$ را در نقطه‌ی $A(-1, 1)$ بیابید.

۱۴- در معادله‌ی $x^4 y^2 - x^3 y + 2xy^3 = 0$ ، $\frac{dx}{dy}$ را بدست آورید.

۶۲ فصل چهارم

۱۵- معادله‌ی خط مماس بر سهمی $y^2 - 2y + 2 - x = 0$ را طوری پیدا کنید که از نقطه‌ی $B\left(\frac{-9}{2}, 1\right)$ عبور کند.

۱۶- با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی در معادله‌ی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ ، $y'(x)$ را بیابید.

۱۷- با استفاده از مشتق توابع وارون، مشتق توابع زیر را ثابت کنید.

$$(f) \quad (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (ب) \quad (\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

۱۸- اگر $f(x) = 3x^5 + 2x^3$ ، مشتق تابع f^{-1} را در نقطه‌ی $x_0 = 5$ بیابید.

۱۹- اگر $y = f^{-1}(x)$ ، فرمولی برای مشتق دوم $f^{-1}(x)$ بیابید.

۲۰- مشتق مرتبه‌ی ۲۵، تابع $f(x) = \ln x$ را در نقطه‌ی $x_0 = 1$ پیدا کنید.

۲۱- مشتق مرتبه‌ی ۳۵، تابع $f(x) = x \sin x$ را پیدا کنید.

۲۲- دیفرانسیل توابع زیر را بیابید.

$$(الف) \quad y = x^4 - 3x \quad (ب) \quad y = e^{2x} + \frac{1}{x}$$

۲۳- اگر $y = \frac{2}{x}$ ، $x = 4$ و $\Delta x = 1$ مقادیر dy و Δy را حساب کنید.

فصل پنجم: کاربردهای مشتق

از آنجایی که مشتق نسبت تغییرات و تغییرات در پدیده‌ها همواره وجود دارد، از آن می‌توان در توضیح و تعیین مسائلی مانند رشد جمعیت، تغییر دمای اجسام، سود پیوسته، بهینه سازی، رسم نمودار و محاسبات دیگر استفاده کرد.

۱- رشد و زوال نهایی

فرض کنیم $y(t)$ کمیتی بر حسب زمان t باشد، به طوریکه $\frac{y'(t)}{y(t)} = k$ در این صورت می‌گوییم آهنگ رشد نسبی $y(t)$ مقدار k است. اگر معادله‌ی بالا را به صورت $y'(t) = ky(t)$ بنویسیم می‌توان این طور تغییر کرد که آهنگ تغییر y با مقدار آن متناسب است. به ازای $k > 0$ ، کمیت رو به رشد و به ازای $k < 0$ ، کمیت رو به زوال است.

می‌دانیم $(e^{kt})' = ke^{kt}$ لذا جوابی برای معادله‌ی $y'(t) = ky(t)$ است و می‌توان نشان داد هر جواب این معادله به صورت $y(t) = ce^{kt}$ است. (c عددی ثابت است). بنابراین اگر آهنگ تغییر کمیتی متناسب با مقدار کمیت باشد، آن کمیت رشد یا زوال نمایی دارد.

رشد جمعیت

مثال. آهنگ رشد جمعیت شهری متناسب با جمعیت این شهر است. جمعیت این شهر در سال ۱۳۸۵، ۲۰۰ هزار نفر و در سال ۱۳۹۰، ۲۲۰ هزار نفر بوده است. آهنگ رشد نسبی این شهر را بیابید و با استفاده از مدل بدست آمده، جمعیت این شهر را در سال ۱۳۹۵ برآورد کنید.

حل. فرض کنیم $A(t)$ اندازه جمعیت این شهر در زمان t (بر حسب سال) باشد، لذا

$$A'(t) = kA(t) \quad \text{پس:} \quad A(t) = ce^{kt}$$

اگر $A(0)$ جمعیت این شهر در سال ۱۳۸۵ باشد. داریم: $A(0) = 200000$

$$A(0) = ce^0 = c \quad \text{پس:} \quad c = 200000$$

$$A(5) = 200000 e^{5k} = 220000$$

$$e^{\Delta k} = \frac{220000}{200000} = 1/1$$

از طرفین $\ln$ می‌گیریم:

$$k \cong 0/019 \quad \text{یا} \quad \Delta k = \ln(1/1)$$

$$A(t) = 200000 e^{0/019 t}$$

به ازای $t = 10$ جمعیت این شهر در سال ۱۳۹۵ بدست می‌آید:

$$A(10) \cong 242000$$

سود پیوسته

هرگاه سود سرمایه‌گذاری به طور لحظه‌ای محاسبه شود، آن را سود پیوسته می‌نامند، اگر موجودی اولیه C و k سود سالیانه باشد، می‌توان نشان داد ارزش موجودی در زمان t به صورت $A(t) = ce^{kt}$ است. یعنی آهنگ رشد سود سرمایه‌گذاری با مقدارش متناسب است.

مثال. ۱۰۰ هزار تومان با سود پیوسته ۱۰٪ سالیانه، سرمایه‌گذاری شده است، ارزش موجودی پس از ۲ سال چقدر شده است؟

$$A(t) = 100 e^{0/1 t} \quad \text{حل. (واحد هزار تومان)}$$

به ازای $t = 2$ ، ارزش موجودی پس از ۲ سال بدست می‌آید:

$$A(2) = 100 e^{0/1 \times 2} = 122/140 \quad \text{واحد هزار تومان}$$

۲- تعیین اکسترمم‌ها و قضیه مقدار میانگین

فرض کنیم $y = f(x)$ تابعی حقیقی و $x_0 \in D_f$ باشد.

الف) اگر برای هر $x \in D_f$ ، $f(x_0) \geq f(x)$ ، آنگاه f در x_0 ماکسیمم مطلق دارد.

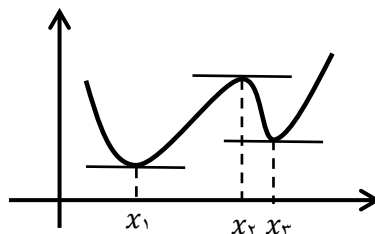
ب) اگر برای هر $x \in D_f$ ، $f(x_0) \leq f(x)$ ، آنگاه f در x_0 مینیمم مطلق دارد.

ج) اگر برای x های اطراف x_0 ، $f(x_0) \geq f(x)$ ، آنگاه f در x_0 ماکسیمم نسبی دارد.

د) اگر برای x های اطراف x_0 ، $f(x_0) \leq f(x)$ ، آنگاه f در x_0 مینیمم نسبی دارد.

کاربردهای مشتق ۶۵

فرض کنیم شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ باشد.



f در $x = x_1$ ، مینیمم مطلق و مینیمم نسبی دارد.

f در $x = x_2$ ، ماکسیمم نسبی دارد.

f در $x = x_3$ ، مینیمم نسبی دارد.

f روی دامنه خود ماکسیمم مطلق ندارد.

در نقاط اکسترمم نسبی ، یا مشتق تابع صفر است (خط شیب خط مماس صفر است) و یا f در

این نقاط مشتق پذیر نیست. (شکستگی دارد) .

قضیه. اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه ی x_0 اکسترمم نسبی داشته باشد، آنگاه f در x_0 یا مشتق پذیر

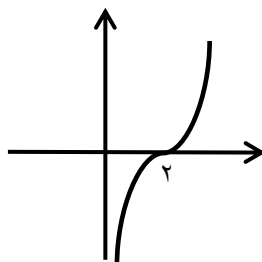
نیست و یا $f'(x_0) = 0$

تعریف. نقاطی از دامنه تابع f که در آن f مشتق پذیر نیست و یا مشتق f در آنها صفر است، نقاط

بحرانی f نامیده می شوند.

نقطه اکسترمم نسبی $f \iff$ نقطه بحرانی f است. (عکس فلش لزوماً درست نیست)

مثال. نقطه ی بحرانی تابع $g(x) = (x - 2)^3$ زیر را بیابید.



حل. $g'(x) = 3(x - 2)^2 = 0$ لذا $x = 2$ نقطه ی بحرانی g است.

با این حال $x = 2$ نقطه ی اکسترمم نسبی f نیست.

توجه. بزرگترین و کوچکترین مقادیر f در نقاط بحرانی روی یک بازه‌ی بسته و نقاط دو سر بازه به ترتیب ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق است. (f باید پیوسته باشد).

مثال. اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = -2x^2 + 4x$ را روی فاصله‌ی $[0, 3]$ بیابید.
حل. $f'(x) = -4x + 4 = 0$ پس $x = 1$ تنها نقطه‌ی بحرانی f است.
 $f(3) = -6$ و $f(0) = 0$ ، $f(1) = 2$
 بنابراین f روی $[0, 3]$ در $x = 1$ ماکسیمم مطلق و در $x = 3$ مینیمم مطلق دارد.

مثال. اکسترم‌های مطلق تابع $f(x) = e^{x^2}$ را روی فاصله‌ی $[-1, 1]$ بیابید.
حل. $f'(x) = 2xe^{x^2} = 0$ پس $x = 0$ تنها نقطه‌ی بحرانی f است.
 $f(-1) = e$ و $f(1) = e$ ، $f(0) = 1$
 بنابراین f روی این فاصله در $x = 0$ مینیمم مطلق و در نقاط $x = \pm 1$ ماکسیمم مطلق دارد.

قضیه مقدار میانگین. فرض کنیم $f(x)$ روی فاصله $[a, b]$ پیوسته و روی فاصله‌ی $]a, b[$ مشتق پذیر باشد، در این صورت عددی مانند c بین a و b وجود دارد که :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

توجه. در حالت خاص که $f(a) = f(b)$ ، یک c بین a و b هست که $f'(c) = 0$ ، این حالت خاص را **قضیه‌ی رول** می‌نامند.

مثال. نشان دهید تابع $f(x) = x^5 + x^3 + x - 1$ دقیقاً یک ریشه‌ی حقیقی دارد.
اثبات. تابع f همواره پیوسته و $f(0) < 0$ و $f(1) > 0$ بنا به قضیه‌ی مقدار میانی f حداقل یک ریشه بین $0, 1$ دارد. نشان می‌دهیم این ریشه منحصر به فرد است.
 فرض کنیم x_1 و x_2 دو ریشه‌ی متمایز تابع f باشند. پس $f(x_1) = f(x_2) = 0$ بنا به قضیه‌ی رول یک c بین x_1 و x_2 هست که:
 $f'(c) = 0$
 از طرفی $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ یعنی $f'(c) > 0$
 این تناقض نشان می‌دهد که باید $x_1 = x_2$ ، یعنی f دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد. ■

مثال. ثابت کنید $a, b \in \mathbb{R}$ $|\tan^{-1} b - \tan^{-1} a| \leq |b - a|$

اثبات. فرض کنیم $f(x) = \tan^{-1} x$ بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین یک c بین a و b هست که:

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ f(b) - f(a) &= f'(c)(b-a) \quad \text{یا} \\ \tan^{-1} b - \tan^{-1} a &= \frac{1}{1+c^2} (b-a) \end{aligned}$$

اما $\frac{1}{1+c^2} \leq 1$ بنابراین:

$$|\tan^{-1} b - \tan^{-1} a| \leq |b-a|$$

نتیجه ۱. اگر تابع f روی فاصله I مشتق پذیر و $f'(x) = 0$ آنگاه f روی I ثابت است.

نتیجه ۲. اگر روی فاصله I ، $f'(x) = g'(x)$ ، آنگاه روی این فاصله، $f(x) = g(x) + k$ که در آن k عددی ثابت است.

مثال. با استفاده از مشتق نشان دهید. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 حل. تابع $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ همواره مشتق پذیر است و
 $f'(x) = 2 \sin x \cos x - 2 \sin x \cos x = 0$

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = k \quad \text{یا} \quad f(x) = k \quad (k \text{ عددی ثابت است})$$

از $x = 0$ داریم: $0 + 1 = k$

بنابراین:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

مثال. با استفاده از مشتق، نشان دهید.

$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x) \quad x, a > 0$
 اثبات. فرض کنیم $f(x) = \ln(ax)$ و $g(x) = \ln(x)$ پس $g'(x) = \frac{1}{x}$
 لذا عددی مثبت مانند k هست که:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + k \\ \ln(ax) &= \ln x + k \quad \text{یا} \\ \ln(a) &= k \quad \text{از } x = 1 \text{ بدست می‌آید:} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a$$

آزمون یکنوایی. فرض کنیم تابع f روی فاصله I مشتق پذیر باشد.
 الف) اگر روی فاصله I $f'(x) > 0$ ، آنگاه f روی I صعودی است.
 ب) اگر روی فاصله I $f'(x) < 0$ ، آنگاه f روی I نزولی است.

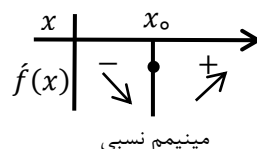
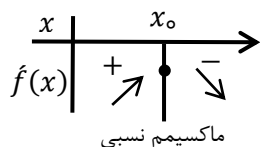
مثال. یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x) = \tan^{-1} x$ ب) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

حل الف) $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} > 0$ بنابراین این تابع همواره صعودی است.

حل ب) از طرفین تساوی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ مشتق می گیریم. $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = 0$ پس $y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} < 0$ با محاسبه معلوم می شود دامنه ی تغییرات x فاصله ی $[0, 1]$ است. بنابراین y روی $[0, 1]$ نزولی است.

آزمون مشتق اول. فرض کنیم $x = x_0$ نقطه ی بحرانی تابع پیوسته f باشد. هرگاه f' در اطراف نقطه ی $x = x_0$ تغییر علامت دهد، آنگاه f در $x = x_0$ اکسترمم نسبی دارد.

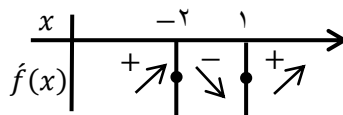


مثال. نقاط اکسترمم نسبی توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ ب) $g(x) = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$

حل الف) $f' = 6x^2 + 6x - 12 = 0$ از حل معادله نقاط بحرانی $x = 1$ و $x = -2$ بدست می آیند.

f' را تعیین علامت می کنیم.

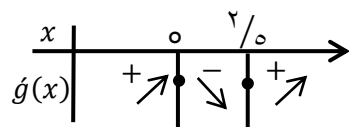


f در $x = -2$ ماکسیمم نسبی و در $x = 1$ مینیمم نسبی دارد.

$$\begin{aligned} g'(x) &= x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}(x-1) = 0 \\ g'(x) &= x^{-\frac{1}{3}}(x + \frac{2}{3}(x-1)) = \frac{5x-2}{3x^{\frac{1}{3}}} = 0 \end{aligned}$$

از حل معادله داریم: $x = \frac{2}{5}$

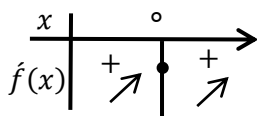
اما $g'(0) = \infty$ پس $x = 0$ و $x = \frac{2}{5}$ نقاط بحران g هستند. g در $x = 0$ مشتق ندارد



g در $x = 0$ ماکسیمم نسبی و در $x = \frac{2}{5}$ مینیمم نسبی دارد.

مثال. اکستریم‌های نسبی تابع $f(x) = \sinh(x^3)$ را بیابید.

حل. $f' = \cosh(x^3) \cdot 3x^2 = 0$ اما $\cosh(x^3) \geq 1$ پس $x = 0$ تنها نقطه‌ی بحرانی f است. ولی در $x = 0$ اکستریم نسبی ندارد.

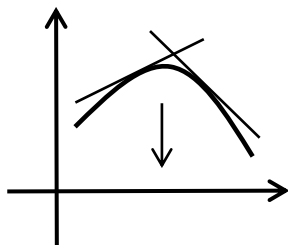


دیدیم که مشتق اول تابع، بعضی از ویژگی‌های تابع مانند یکنوایی و یا اکستریم‌ها را توضیح می‌دهد. اکنون می‌خواهیم نقش مشتق دوم را روی تابع بررسی کنیم.

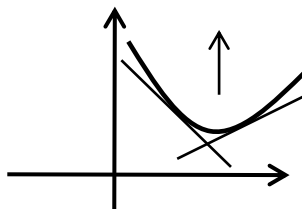
تعریف. تابع f روی فاصله I مفروض است.

الف) هرگاه نمودار f بالای خطوط مماسش در این فاصله باشد، آنگاه f روی این فاصله تقعر به سمت بالا دارد (محدب)

ب) هرگاه نمودار f زیر خطوط مماسش در این فاصله باشد، آنگاه f روی این فاصله تقعر به سمت پایین دارد (مقعر)



تابع مقعر است



تابع محدب است

۷۰ فصل پنجم

قضیه. فرض کنیم f روی فاصله I دوبار مشتق پذیر باشد.
 الف) اگر روی I ، $f'' > 0$ ، آنگاه f روی I محدب است.
 ب) اگر روی I ، $f'' < 0$ ، آنگاه f روی I مقعر است.

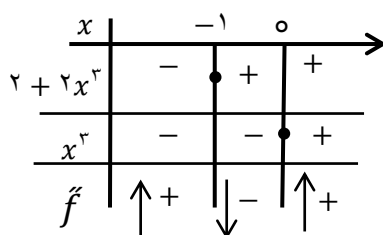
تعریف. فرض کنیم تابع f در نقطه‌ی $x = x_0$ پیوسته و در اطراف این نقطه جهت تعقر f عوض شود در این صورت $x = x_0$ را نقطه‌ی عطف f می‌نامند.

مثال. جهت تعقر و نقاط عطف تابع $f(x) = \frac{1}{x} + x^2$ را تعیین کنید.
 حل. مشتق دوم f را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'' = \frac{2}{x^3} + 2 = \frac{2 + 2x^3}{x^3} = 0 \quad \text{و} \quad f' = \frac{-1}{x^2} + 2x$$

ریشه‌های صورت و مخرج f'' برابر است با:

$$x = 0 \quad \text{و} \quad x = -1$$



جهت تعقر f در جدول مشخص شده و بنا به تعریف، $x = -1$ نقطه‌ی عطف f است ولی $x = 0$ نقطه‌ی عطف نیست. (f در $x = 0$ پیوسته نیست).

۳- رسم نمودارها و قاعده هوییتال

برای رسم نمودارها از اطلاعاتی مانند نقاط اکسترمم، جهت تعقر، مجانب‌ها و در بعضی موارد دوره تناوب، تقارن و انتقال نمودارها استفاده می‌شود.

مثال. نمودار تابع $f(x) = x^4 - x^2$ را رسم کنید.

حل. دامنه تابع تمام اعداد حقیقی است و بسادگی دیده می‌شود f تابعی زوج است.

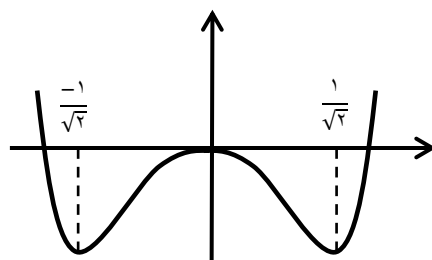
$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 0 \quad \text{پس:} \quad x = 0 \quad \text{و} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

نقاط بحرانی f هستند،
 f' را تعیین علامت می‌کنیم.

	x	$\frac{-1}{\sqrt{e}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	
$\varepsilon x^2 - 2$		+	-	-	+
x		-	-	+	+
$\hat{f}$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{-1}{e} \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

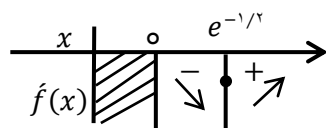
لذا f در نقطه ی $A(0,0)$ ماکسیمم نسبی و در نقاط $B(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{-1}{e})$ و $C(\frac{-1}{\sqrt{e}}, \frac{-1}{e})$ مینیمم نسبی دارد.



مثال. نمودار تابع $f(x) = x^2 \ln x$ را رسم کنید.

حل. $D_f =]0, +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

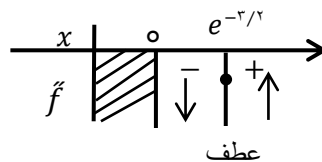
$\hat{f}(x) = 2x \ln x + x = 0$ از حل معادله بدست می آید: $x = e^{-1/2}$



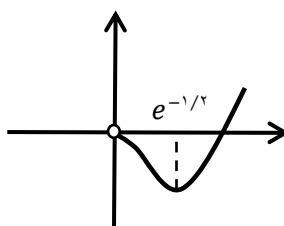
$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{-1}{2e}$$

f در نقطه ی $A(e^{-\frac{1}{2}}, \frac{-1}{2e})$ مینیمم نسبی دارد.

$$\ddot{f} = 2 \ln x + 3 = 0 \quad \text{از حل معادله بدست می‌آید:} \quad x = e^{-\frac{3}{2}}$$



$x = e^{-\frac{3}{2}}$ نقطه‌ی عطف است.



مثال. نمودار منحنی $x^3 y^2 - 1 = 0$ را رسم کنید.

حل. با تبدیل y به $-y$ معادله ثابت می‌ماند. یعنی نمودار نسبت به محور x ها متقارن است.

$$y^2 = \frac{1}{x^3} \quad \text{پس:} \quad y = \pm \sqrt{\frac{1}{x^3}}$$

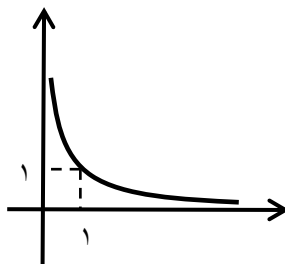
نمودار $y = f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^3}}$ را رسم می‌کنیم.
دامنه تابع فاصله $]0, +\infty[$ است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

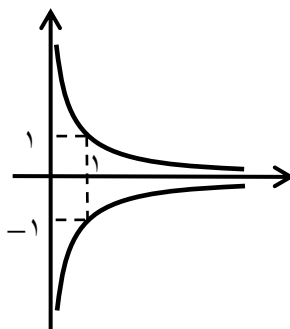
خط $x = 0$ مجانب قائم f و خط $y = 0$ مجانب افقی f است.

$$\ddot{f} = \frac{15}{4} x^{-\frac{5}{2}} > 0 \quad \text{و} \quad \ddot{f} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}} < 0$$

لذا f همواره نزولی و تقعر f همواره به سمت بالا است
 $A(1,1)$ نقطه‌ی کمکی است.



اکنون بنا به تقارن نمودار $x^2 y^2 - 1 = 0$ را رسم می‌کنیم.



قاعده هوییتال

فرض کنیم توابع f و g در اطراف نقطه‌ی x_0 مشتق پذیر و (وجود مشتق در $x = x_0$ الزامی نیست). همچنین در اطراف $x = x_0$ ، $g(x) \neq 0$ باشد. در این صورت:

(الف) هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (در صورتی که حد سمت راست وجود داشته و یا ∞ شود).

(ب) هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (در صورتی که حد سمت راست وجود داشته و یا ∞ شود).

نکته. قاعده هوییتال فقط در دو صورت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ قابل استفاده است.

مثال. در محاسبه‌ی حدهای زیر از قاعده هوییتال استفاده شده است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^4}{x^5 - 1} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4x^3}{5x^4} = -\frac{4}{5} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ حالت}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \quad \left(\frac{0}{0} \text{ حالت}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x - x}{x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \left(\frac{0}{0} \text{ حالت}\right)$$

۷۴ فصل پنجم

قاعده هوییتال هنگامی که $x \rightarrow \infty$ نیز برقرار است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 3}{x^2 - 4} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{2x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{2} = +\infty \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ حالت}\right)$$

مثال. حد تابع $f(x) = x^2 \ln x$ را در $x = 0$ بیابید.

حل. دامنه f فاصله $[0, +\infty)$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 \times \infty \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{2} = 0 \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ حالت}\right)$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ را حساب کنید.

حل. مبهم $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1^\infty$ همانند مشتق لگاریتمی عمل می‌کنیم.

$$\ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{پس:} \quad y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

از طرفین حد می‌گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (0 \times \infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = 1 \quad \left(\frac{0}{0} \text{ حالت}\right)$$

$$\ln(\lim_{x \rightarrow +\infty} y) = 1 \quad \text{پس:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = e \quad \text{لذا}$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

برای حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x - e^x}{\cos x - e^x}$ شرایط قاعده هوییتال برقرار نیست. این حد را بدون قاعده هوییتال

حساب کنید.

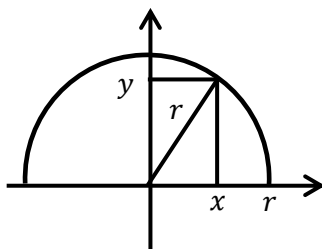
۴- مسائل بهینه سازی و آهنگ‌های وابسته

مسائل بهینه سازی معمولاً یافتن اکسترمم کمیتی تحت شرایطی خاص می‌باشد. برای حل این نوع مسائل بین متغیرها رابطه‌ای برقرار می‌کنیم و با انتخاب متغیر مستقل و قضایای مشتق، ماکسیمم یا مینیمم کمیت مورد نظر را بدست می‌آوریم. مثالهای زیر نمونه‌هایی از مسائل بهینه سازی هستند.

مثال. دایره‌ای به شعاع r مفروض است. بزرگترین مستطیل محاط در ربع دایره را طوری بیابید که دو ضلع آن روی محور مختصات و یک رأس آن روی دایره باشد.

حل. فرض کنیم x و y ابعاد این مستطیل باشند. مساحت مستطیل برابر است با :

$$s = xy$$



$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{داریم:}$$

$$s = xy = x\sqrt{r^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq r$$

$$s'(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$$

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \text{از حل معادله بدست می‌آید:}$$

$$s = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = \frac{r^2}{2} \quad \text{و} \quad s(r) = s(0) = 0$$

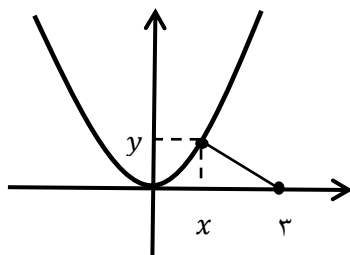
بنابراین بزرگترین مستطیل، مربعی به طول $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ است و مساحت آن $s = \frac{r^2}{2}$ است.

مثال. نقطه‌ی روی سهمی $y = x^2$ بیابید که به نقطه‌ی $p_0(3, 0)$ نزدیک‌ترین باشد.

حل. فاصله $p_0(3, 0)$ تا نقطه‌ی (x, y) روی سهمی برابر است با:

$$d = \sqrt{(x - 3)^2 + y^2}$$

$$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2)^2}$$



باید مینیمم تابع $d(x)$ را بیابیم.

برای سادگی مینیمم تابع $f = (x-3)^2 + x^4$ (زیر رادیکال) را بدست می‌آوریم.

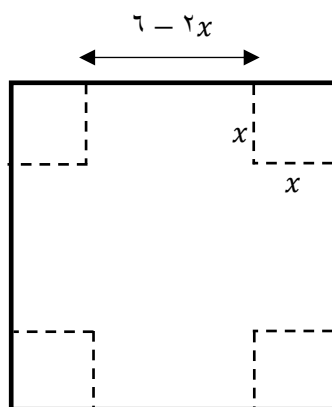
$$f'(x) = 2(x-3) + 4x^3 = 0$$

با محاسبه معلوم می‌شود $x = 1$ نقطه بحرانی و مینیمم تابع f است.

بنابراین $A(1, 1)$ نقطه‌ی مورد نظر است.

مثال. ورقه‌ای مربع شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر مفروض است. می‌خواهیم با بریدن مربع‌های کوچکی از چهار گوشه، جعبه‌ای مکعبی بسازیم، مربع‌ها را به چه اندازه باید برید تا جعبه بیشترین حجم را داشته باشد؟

حل. فرض کنیم x طول ضلع هر مربع کوچک باشد. با توجه به شکل، حجم این جعبه برابر است با:



$$V(x) = x(6 - 2x)^2, \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$V'(x) = (6 - 2x)^2 + (6 - 2x)(-4x) = 0$$

از حل معادله بدست می‌آید:

$$x = 1, \quad x = 3$$

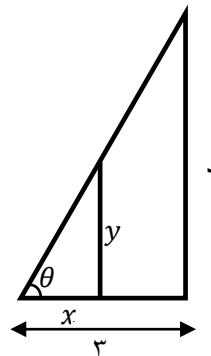
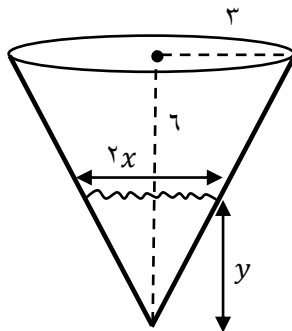
$$V(1) = 16, \quad V(3) = 0, \quad V(0) = 0$$

بنابراین با انتخاب $x = 1$ جعبه با بیشترین حجم بدست می‌آید.

آهنگ‌های وابسته

در بعضی از مسائل آهنگ تغییر یک کمیت (نسبت به زمان) را می‌توان به حسب آهنگ تغییر کمیت دیگر (نسبت به زمان) بدست آورد.

مثال. آب با سرعت ۳ مترمکعب در دقیقه وارد مخزن مخروطی به ارتفاع ۶ متر و شعاع قاعده ۳ متر می‌شود، وقتی عمق آب ۲ متر است، سطح آب با چه سرعتی بالا می‌آید؟
حل. x و y را به ترتیب شعاع و ارتفاع مخروط را پر شده در نظر می‌گیریم.



$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{6}{3} \quad \text{پس:} \quad x = \frac{1}{2}y$$

حجم مخروط پر شده برابر است با:

$$V = \frac{1}{12}\pi y^3 \quad \text{لذا:} \quad V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

از طرفین معادله نسبت به زمان t مشتق می‌گیریم.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi y^2 \frac{dy}{dt}$$

پس: $y = 2$ و $\dot{V}(t) = 3$ بنا به صورت مسئله:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi y^2} \times \frac{dV}{dt} = \frac{3}{\pi}$$

بنابراین وقتی عمق آب ۲ متر است آب با سرعت $\frac{3}{\pi}$ متر در دقیقه بالا می‌آید.

۵- تمرینات فصل پنجم

۱- آهنگ رشد نسبی جمعیت کشوری ثابت است، بعد از ۳۰ سال جمعیت این کشور ۲ برابر شده است، جمعیت با چه آهنگی در سال رشد می کند؟

۲- مبلغ دو هزار دلار در بانکی با سود پوسته ۷٪ سالیانه سرمایه گذاری شده است، پس از چند سال مبلغ سپرده دو برابر می شود؟

۳- مبلغ ۱۰۰۰ دلار با سود سالانه ۸٪ وام گرفته شده است.

الف) با سود مرکب سالانه (سود هر سال محاسبه شود) بعد از ۳ سال چقدر باید پرداخت شود؟

ب) با سود مرکب ماهانه (سود هر ماه محاسبه شود) بعد از ۳ سال چقدر باید پرداخت شود؟

ج) با سود پیوسته ، بعد از ۳ سال چقدر باید پرداخت شود؟

۴- نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

$$\text{الف) } f(x) = x^3 - x \quad \text{ب) } g(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$\text{ج) } f(x) = \frac{x^2}{x+4} \quad \text{د) } g(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

اکسترم های مطلق توابع زیر را روی فاصله ی داده شده بیابید.

$$-5 \quad f(x) = (x^2 - 1)^3 \quad -1 \leq x \leq 2$$

$$-6 \quad f(x) = e^{-x^2} \quad -1 \leq x \leq 1$$

۷- با استفاده از اکسترم ها ثابت کنید اگر $|x| \leq 2$ آنگاه $|3x - x^3| \leq 2$

۸- نشان دهید معادله ی $\sin x = x - 1$ دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد.

۹- ثابت کنید تابع $f(x) = x^2 + \frac{x^2}{3} + x - 2$ دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد.

موارد زیر را ثابت کنید.

$$-10 \quad |\sin^{-1} b - \sin^{-1} a| \geq |b - a|, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$-11 \quad |\sinh^{-1} b - \sinh^{-1} a| \leq |b - a|, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

تساوی‌های زیر را با استفاده از مشتق ثابت کنید.

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \quad -۱۲$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad -۱۳$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad -۱۴$$

نقاط اکسترمم نسبی توابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1 \quad -۱۵$$

$$f(x) = (x - 1)x^{\frac{2}{3}} \quad -۱۶$$

$$f(x) = \tan^{-1}(x^2) \quad -۱۷$$

۱۸- اکسترمم نسبی و مطلق تابع $f(x) = \sqrt{e^{-x^2} + 1}$ را پیدا کنید.

راهنمایی. اگر تابعی پیوسته در یک فاصله دقیقاً یک اکسترمم نسبی داشته باشد، آن نقطه اکسترمم مطلق نیز هست.

۱۹- اکسترمم مطلق تابع $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ را بیابید.

با استفاده از قاعده هوپیتال حدود زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \quad -۲۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sinh x}{x^2} \quad -۲۱$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + x} \quad -۲۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x] - x}{x^2} \quad -۲۳$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} \quad -۲۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan^2 x)^x \quad -۲۵$$

نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = x^3 - 3x \quad -۲۶$$

$$f(x) = x\sqrt{x+3} \quad -۲۷$$

$$f(x) = e^{-x^2} \quad -۲۸$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad -۲۹$$

$$f(x) = \sinh^{-1}(x^2) \quad -۳۰$$

۳۱- نقاطی روی بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ بیابید که تا نقطه‌ی $(1, 0)$ دورترین باشد.

۳۲- نقطه‌ی روی سهمی $y^2 = 2x$ بیابید که به نقطه‌ی $(1, 4)$ نزدیک‌ترین باشد.

۳۳- دو عدد مثبت بیابید که حاصل ضرب آنها ۱۴۴ و مجموع آنها حداقل باشد.

۳۴- ابعاد مستطیل را بیابید که داخل بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ محاط شده و مساحت آن بیشترین باشد.

۳۵- مساحت بزرگترین مستطیل را بیابید که بتوان آن را در مثلث قائم الزاویه که طول ساق‌هایش ۳ و ۴ سانتی‌متر است طوری محاط کرد که دو تا از ضلع‌های مستطیل روی ساق‌ها قرار گیرند.

۳۶- شخصی با قد $1\frac{1}{8}$ متری با سرعت ۱ متر بر ثانیه از تیر چراغی که در ارتفاع ۳ متری از سطح زمین قرار دارد دور می‌شود. نوک سایه‌ی شخص با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

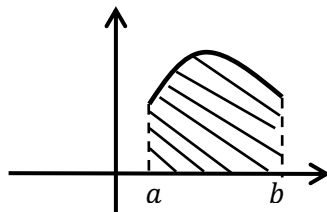
فصل ششم: انتگرال

اول بار مفهوم اساسی انتگرال در آثار ریاضی دانان باستان در تعیین مساحت ناحیه و یا حجم یک جسم به کار گرفته شده بعداً ریاضی دانان قرن هفدهم آن را پرورش دادند تا مفهوم انتگرال صورت بندی شد. همچنین معلوم شد که انتگرال با مشتق ارتباط دارد.

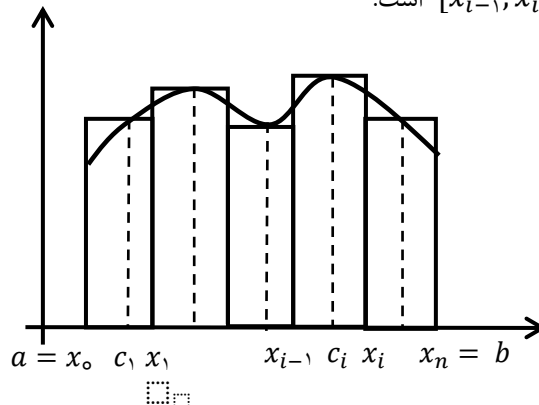
۱- انتگرال معین

مساحت ناحیه

فرض کنیم $y = f(x)$ تابعی پیوسته و مثبت روی فاصله $[a, b]$ باشد. می‌خواهیم مساحت ناحیه محدود به منحنی f و محور x ها و دو خط $x=a$ و $x=b$ را بیابیم. (ناحیه زیر منحنی f)



فرض کنیم $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ یک افراز فاصله $[a, b]$ باشد، مستطیل‌هایی به عرض $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ($1 \leq i \leq n$) و طول $f(c_i)$ در نظر می‌گیریم که در آن نقطه‌ی دلخواه در فاصله‌ی $[x_{i-1}, x_i]$ است.



۸۲ فصل ششم

مساحت هر مستطیل برابر است با $f(c_i)\Delta x_i$ ، اگر A مساحت زیر منحنی f باشد، مقدار A به طور تقریبی برابر است با:

$$A \cong \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

فرض کنیم λ عرض بزرگترین مستطیل باشد، مساحت زیر منحنی f به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

تعریف. تابع $f(x)$ را روی فاصله‌ی $[a, b]$ مفروض است، انتگرال معین f روی فاصله‌ی $[a, b]$ به صورت زیر است.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

اگر حد سمت راست وجود داشته باشد، f را روی فاصله $[a, b]$ انتگرال پذیر می‌نامند.

چند نکته:

- ۱- حد سمت راست در صورت وجود با انتخاب هر افزار و هر c_i یکتا است.
- ۲- اگر f تابعی پیوسته و مثبت باشد، تعبیر هندسی انتگرال معین، مساحت زیر منحنی است.
- ۳- مفهوم انتگرال معین حد مجموع جزءهای کوچک است. (حد مجموع)

قضیه. اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f روی این فاصله، انتگرال پذیر است. این قضیه نشان می‌دهد بسیاری از توابع مقدماتی انتگرال پذیر هستند با این حال عکس قضیه لزوماً برقرار نیست، یعنی بعضی از توابع ناپیوسته، انتگرال پذیر هستند.

$\Rightarrow$

پیوستگی $\Leftarrow$ انتگرال پذیری

توجه. می‌توان ثابت کرد اگر تابعی روی یک فاصله کراندار و فقط در تعداد متناهی نقطه ناپیوسته باشد. تابع روی این فاصله انتگرال پذیر است.

مثال. نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} 3 & x \in Q \\ 2 & x \notin Q \end{cases}$ روی هر فاصله‌ی $[a, b]$ انتگرال پذیر نیست.

حل. فرض کنیم مقدار حد در تعریف انتگرال وجود داشته باشد، اگر c_i ها را اعداد گویا انتخاب کنیم داریم:

انتگرال ۸۳

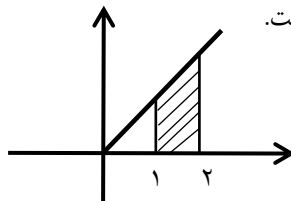
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \tau \Delta x_i = \tau(b-a)$$

اگر c_i ها را اعداد گنگ انتخاب کنیم داریم:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \tau \Delta x_i = \tau(b-a)$$

اما بنا به یکتایی جواب انتگرال، باید: $\tau(b-a) = \tau(b-a)$
 پس: $\tau = \tau$ بنابه این تناقض، f روی $[a, b]$ انتگرال پذیر نیست.

مثال. با استفاده از تعبیر هندسی، انتگرال $\int_1^2 x dx$ را حساب کنید.
حل. در شکل مقابل ناحیه‌ی زیر منحنی $f(x) = x$ روی فاصله‌ی $[1, 2]$ نشان داده شده است. مقدار انتگرال برابر با مساحت این ذوزنقه است.



$$\int_1^2 x dx = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2}$$

خواص انتگرال معین

فرض کنیم f و g روی فاصله‌ی $[a, b]$ پیوسته باشند.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \quad (۱)$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (۲)$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \quad \text{اگر روی فاصله‌ی } [a, b], f \geq g \quad (۳)$$

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx \quad (۴) \quad (\text{تعریف})$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad (۵)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (۶) \quad (\text{به ازای هر ترتیبی از } a, b, c)$$

قضیه: مقدار میانگین برای انتگرال ها

فرض کنیم f روی $[a, b]$ پیوسته، در این صورت عددی مانند $c \in [a, b]$ وجود دارد، به طوریکه:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)

فرض کنیم تا f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، در این صورت تابع $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ روی فاصله

$$[a, b] \text{ مشتق پذیر است و } \dot{F}(x) = f(x)$$

اثبات.

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

بنا به قضیه مقدار میانگین برای انتگرال، یک c بین x و $x + \Delta x$ وجود دارد به طوریکه:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x$$

از اینکه c بین x و $x + \Delta x$ است، نتیجه می گیریم:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} c = x$$

$$\dot{F}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} c\right) = f(x) \quad (f \text{ پیوسته است})$$

$$\blacksquare \quad \dot{F}(x) = f(x) \quad \text{بنابراین:}$$

مثال. مشتق تابع $F(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ را بیابید.

حل. بنا به قضیه‌ی اساسی $\dot{F}(x) = e^{-x^2}$

مثال. مشتق تابع $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sqrt{1+t^2} dt$ را بیابید.

حل. بنا به خواص انتگرال و قاعده زنجیری و قضیه اساسی داریم:

$$\dot{F}(x) = \sqrt{1+(x^3)^2} \cdot 3x^2 - \sqrt{1+(x^2)^2} \cdot 2x$$

۲- انتگرال نامعین

تعریف. فرض کنیم روی فاصله I ، $\dot{F}(x) = f(x)$ در این صورت F را تابع اولیه (پاد مشتق) تابع f می‌نامند.

قضیه. فرض کنیم F و G در تابع اولیه f روی فاصله I باشند، در این صورت:

$$G(x) = F(x) + c$$

بنا به قضیه‌ی بالا، تابع اولیه‌های f روی فاصله I در یک عدد ثابت اختلاف دارند.

تعریف. فرض کنیم F تابع اولیه‌ی f باشد، انتگرال نامعین f به صورت زیر است:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

چند نکته:

الف) علامت dx نشان می‌دهد که انتگرال گیری نسبت به متغیر x است.

ب) بنا به قضیه‌ی اساسی (۱)، $\int_a^x f(t)dt$ یک تابع اولیه f است. بنابراین:

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + c$$

ج) بنا به تعریف انتگرال نامعین:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow \dot{F}(x) = f(x)$$

لذا با مشتق گیری از جواب انتگرال می‌توان درستی آن را امتحان کرد.

چند فرمول زیر به همین روش ثابت می‌شوند:

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad r \neq -1, r \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \sin t dt = -\cos t + c$$

مثلاً:

$$\int x^{\frac{5}{3}} dx = \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + c$$

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

تذکر. جواب انتگرال نامعین را روی یک بازه در نظر می‌گیریم می‌باشد، مثلاً در فرمول

$$\int \frac{1}{x^r} dx = \int x^{-r} dx = \frac{-1}{r-1} + c$$

$x \in]-\infty, 0[$ یا اینکه $x \in]0, +\infty[$

قضیه زیر بین دو مفهوم ظاهراً مجزا یعنی مشتق و انتگرال معین ارتباط برقرار می‌کند.

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)

فرض کنیم تابع f روی فاصله‌ی $[a, b]$ پیوسته و F تابع اولیه‌ی f روی این فاصله باشد. ($F' = f$) در این صورت:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

برهان. فرض کنیم $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ بنا به قضیه‌ی اساسی (۱)، $G'(x) = f(x)$ پس G و F دو تابع اولیه f روی $[a, b]$ هستند.

$$F(x) = G(x) + c$$

اما $G(a) = 0$ و $F(a) = c$ لذا $F(b) = G(b) + F(a)$ بنابراین:

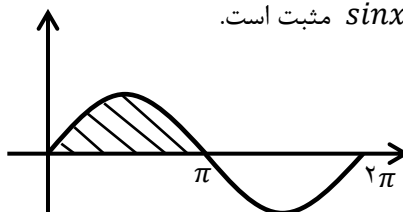
$$\blacksquare \quad G(b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

مثال: انتگرال زیر با قضیه‌ی اساسی محاسبه شده است.

$$\int_1^2 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

مثال. مساحت زیر منحنی $f(x) = \sin x$ را روی فاصله $[0, \pi]$ بیابید.

حل. روی این فاصله $\sin x$ مثبت است.



$$\int_0^\pi \sin x dx = (-\cos x) \Big|_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 2$$

انتگرال ۸۷

مثال. اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{x^2} & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ ، $\int_0^3 f(x) dx$ را محاسبه کنید.

حل. این تابع فقط در یک نقطه ($x = 2$) ناپیوستگی دارد. بنابراین روی این فاصله انتگرال پذیر است.

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \\ &= \int_0^2 x^2 dx + \int_2^3 x^{-2} dx = \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{-1}{x} \right) \Big|_2^3 = \frac{17}{6} \end{aligned}$$

چند خاصیت انتگرال نامعین

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\int k dx = kx + c$$

دیدیم که برای محاسبه‌ی انتگرال معین، ابتدا باید انتگرال نامعین (پاد مشتق) تابع را بدست آورد. در اینجا تعدادی از فرمول‌های انتگرال نامعین توابع مقدماتی را می‌آوریم (تابع اولیه‌ها)

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}, \quad r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \frac{dx}{a^r + x^r} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^r - x^r}} = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x$$

$$\int \operatorname{sech}^r x dx = \tanh x$$

$$\int \operatorname{csch}^r x dx = -\coth x$$

$$\int \frac{dx}{a^r - x^r} = \frac{1}{r a} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right) \quad \text{یا} \quad \frac{1}{a} \tanh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right), \quad x^r < a^r$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^r + x^r}} = \ln(x + \sqrt{a^r + x^r}) \quad \text{یا} \quad \sinh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^r - a^r}} = \ln(x + \sqrt{x^r - a^r}) \quad \text{یا} \quad \cosh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right), \quad x > a$$

توجه. تمامی فرمول‌ها $+C$ دارند.

چند مثال:

$$\int (rx^r - x) dx = r \frac{x^{r+1}}{r+1} - \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int \frac{x^r - x^r}{x^r} dx = \int \left(\frac{1}{x} - x \right) dx = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int_{-1}^r (-x^r + 1) dx = \left(-\frac{x^{r+1}}{r+1} + x \right) \Big|_{-1}^r = \left(-\frac{r^{r+1}}{r+1} + r \right) - \left(-\frac{1}{r+1} - 1 \right) = -\frac{r^{r+1}}{r+1} + r + \frac{1}{r+1} + 1$$

$$\int \frac{1}{r^{x+1}} dx = \frac{1}{r} \int \left(\frac{1}{r}\right)^x dx = \frac{1}{r} \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} + c$$

$$\int \frac{1}{\Delta + t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \tan^{-1} \left(\frac{t}{\sqrt{\Delta}} \right) + c$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx \\ &= \tan x - \cot x \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \Big|_0^2 = \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{9-x^2} = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{3+x}{3-x} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} (\ln(2) - \ln(1)) = \frac{\ln 2}{6}$$

فرض کنیم f روی $[a, b]$ انتگرال پذیر و $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ یک افراز با فاصله‌های مساوی باشد:

$$\lambda = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

با انتخاب: $c_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ و تعریف انتگرال داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(c_i) = \int_a^b f(x) dx$$

مثال. با استفاده فرمول بالا حد مجموع‌های زیر را حساب کنید.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right) \quad \text{(الف)}$$

حل.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}$$

$$\left(f(x) = \sqrt{x}, \quad c_i = \frac{i}{n}, \quad b = 1, \quad a = 0 \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) \quad (\text{ب})$$

حل.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n+i} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2 \\ &\left(f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ و } c_i = \frac{i}{n}, \quad b=1, \quad a=0 \right) \end{aligned}$$

۳- روش‌های انتگرال‌گیری

انتگرال‌گیری به روش جانشینی (تغییر متغیر)

فرض کنیم F تابع اولیه‌ی f ($F' = f$) و $u(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. با قاعده زنجیری داریم:

$$\frac{d}{dx} (F(u(x))) = F'(u) \cdot u'(x) = f(u) \cdot u'(x)$$

و بنا به تعریف انتگرال نامعین:

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = f(u(x)) + c = F(u) + c$$

از طرفی:

$$\int f(u) du = F(u) + c$$

بنابراین:

$$\int f(u) \cdot u'(x) dx = \int f(u) du$$

محاسبه انتگرال با این فرمول را روش جانشینی می‌نامند.

توجه. قبلاً dx یا du به معنای متغیر انتگرال‌گیری بود. بنا به فرمول جانشینی، du می‌تواند همان معنای دیفرانسیل را داشته باشد.

$$du = u'(x) dx$$

در روش جانشینی با یک تغییر متغیر مناسب، انتگرال را به فرمول‌های انتگرال تبدیل می‌کنیم.

مثال. $\int \sqrt{x^3+1} \cdot x^2 dx$ را پیدا کنید.حل. قرار می‌دهیم: $u = x^3 + 1$ پس $du = 3x^2 dx$ و $\frac{du}{3} = x^2 dx$

انتگرال ۹۱

$$\int \sqrt{x^2 + 1} \cdot x^2 dx = \int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + c$$

مثال. $\int \tan^2 x \cdot \sec^2 x dx$ را بیابید.

حل. با انتخاب $t = \tan x$ داریم: $dt = \sec^2 x dx$

$$\int \tan^2 x \cdot \sec^2 x dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\tan^3 x}{3} + c$$

نکته: در روش جانشینی u را طوری انتخاب می‌کنیم که تا حد امکان مشتق آن داخل انتگرال باشد.

مثال. $\int \frac{x}{x^2 + 4} dx$ را بیابید.

حل. با انتخاب $u = x^2 + 4$ داریم:

$$\int \frac{x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + c$$

مثال. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ را حساب کنید.

حل. $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

با انتخاب $t = \cos x$ داریم:

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x| \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx &= (-\ln \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln(1) = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

هنگام محاسبه‌ی انتگرال معین با روش جانشینی تحت شرایط مناسب می‌توان کران‌های انتگرال را عوض کرد.

مثال. انتگرال $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{9+x^4} dx$ را پیدا کنید.

حل.

$$dt = 2x dx \quad \text{پس} \quad t = x^2$$

$$\begin{cases} x=0 & \rightarrow & t=0 \\ x=\sqrt{3} & \rightarrow & t=3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{9+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{1}{9+t^2} dt = \left(\frac{1}{6} \tan^{-1} \left(\frac{t}{3} \right) \right) \Big|_0^3 \\ &= \frac{1}{6} \tan^{-1}(1) - \frac{1}{6} \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$

مثال. $\int \frac{dx}{-x^2+4x-5}$ را پیدا کنید.

حل. $-x^2+4x-5 = -(x-2)^2-1$ ، با انتخاب $t = x-2$ داریم:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{-x^2+4x-5} dx &= - \int \frac{1}{(x-2)^2+1} dx \\ &= - \int \frac{1}{t^2+1} dt = -\tan^{-1}(x-2) + c \end{aligned}$$

مثال. اگر f تابعی پیوسته و فرد باشد، ثابت کنید $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

اثبات. $t = -x$ پس: $dt = -dx$

$$\begin{cases} x=-a & \rightarrow & t=a \\ x=a & \rightarrow & t=-a \end{cases}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_a^{-a} f(-t)(-dt) = - \int_{-a}^a f(t) dt = - \int_{-a}^a f(x) dx$$

در تساوی آخر از تغییر نام t به x استفاده شده است. بنابراین:

$$\blacksquare \quad \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

انتگرال گیری به روش جزء به جزء

فرض کنیم $u(x)$ و $v(x)$ توابعی مشتق پذیر باشند.

$$(u.v)' = v.u' + u.v'$$

$$\int (v.u' + u.v') dx = u.v$$

$$\int v du + \int u dv = u.v$$

بنابراین:

$$\int u dv = u.v - \int v du$$

رابطه‌ای اخیر را فرمول جزء به جزء می نامند.

مثال. $\int x e^x dx$ را پیدا کنید.

حل. فرض کنیم $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases}$ از u دیفرانسیل و از dv انتگرال می گیریم.

$$\begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

داریم:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

مثال. $\int_1^2 \ln x dx$ را پیدا کنید.

حل. $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases}$ پس $\begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x$$

$$\int_1^2 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^2 = 2 \ln(2) - 1$$

مثال. $\int x^2 e^x dx$ را حساب کنید.

حل. $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases}$ پس $\begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

انتگرال سمت راست مجدداً به روش جزء به جزء محاسبه می شود. بنابراین :

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + c$$

در بعضی انتگرالها تعداد جزء به جزء به توان بستگی دارد.

دو بار جزء به جزء $\rightarrow \int (x^2 - 2x + 1) \sin x dx$

سه بار جزء به جزء $\rightarrow \int \ln^3 x dx$

سه بار جزء به جزء $\rightarrow \int x^3 \cosh x dx$

با این حال $\int x^r \ln x dx$ فقط با یک بار جزء به جزء حل می‌شود. (به تمرینات مراجعه شود.)

با مشتق‌گیری دو فرمول زیر ثابت می‌شوند.

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

مثال. $\int \sec^r x dx$ را پیدا کنید.

حل. $\sec^r x = \sec x (\sec^2 x)^{r-1} = \sec x + \sec x \tan^2 x$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x|$$

$$\int \sec x \tan^2 x dx = \int \tan x (\sec x \tan x) dx$$

$$\begin{cases} du = \sec^r x dx \\ v = \sec x \end{cases} \quad \text{داریم:} \quad \begin{cases} u = \tan x \\ dv = \sec x \tan x \end{cases} \quad \text{با انتخاب}$$

$$\int \sec x \tan^2 x dx = \tan x \sec x - \int \sec^r x dx$$

پس:

$$\begin{aligned} \int \sec^r x dx &= \int (\sec x + \sec x \tan^2 x) dx = \int \sec x dx + \int \sec x \tan^2 x dx \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + \tan x \sec x - \int \sec^r x dx \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\int \sec^r x dx = \frac{1}{r-1} \ln|\sec x + \tan x| + \frac{1}{r-1} \tan x \sec x + c$$

در محاسبه انتگرال، خود انتگرال دوباره ظاهر شده است. (روش بازگشتی)

دیدیم که در محاسبه‌ی بعضی انتگرال‌ها لازم است چند بار از جزء به جزء استفاده شود، این نوع انتگرال‌ها را می‌توان به روش مثال بعد سریع‌تر حل کرد.

مثال. $\int x^r \sin x dx$ را بیابید.

حل. این انتگرال با سه بار جزء به جزء حل می‌شود، اما به صورت زیر عمل می‌کنیم.

انتگرال ۹۵

مشتق	انتگرال
x^3	$+$ $\sin x$
$3x^2$	$-$ $\cos x$
$6x$	$+$ $-\sin x$
6	$-$ $\cos x$
0	$\sin x$

$$\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + c$$

برای استفاده از روش ذکر شده باید مشتق یکی از توابع بعد از تعداد متناهی مشتق گیری، صفر شود.

انتگرال گیری به روش کسرهای جزئی

در اینجا می خواهیم از توابع گویای $\frac{p(x)}{q(x)}$ انتگرال بگیریم که در آن P و Q چند جمله ای هستند. بنا به قضیه اساسی جبر در فصل اول، می توان نشان داد هر چند جمله ای به عامل های اول یا دوم تجزیه می شود. (این عوامل می تواند تکراری باشند).

تذکر: عامل درجه دوم، چند جمله ای درجه دومی است که تجزیه نشود (ریشه حقیقی نداشته باشد). فرض کنیم در عبارت $\frac{p(x)}{q(x)}$ درجه ی صورت کمتر از درجه ی مخرج باشد.

الف) اگر مخرج به عامل های اول تجزیه شود، می توان نشان داد مانند مثال های زیر تفکیک می شود.

$$\frac{x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2(x+5)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+5}$$

عبارت های سمت راست را کسرهای جزئی می نامند (به تعداد عامل های مخرج کسر جزئی بنویسیم).

مثال. $\int \frac{x-2}{x^2(x-1)} dx$ را حساب کنید.

حل.

$$\frac{x-2}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x-1) + Bx(x+1) + Cx^2}{x^2(x-1)}$$

تساوی اول و سوم به ازای هر x برقرار است.

$$x-2 \equiv A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2$$

با انتخاب x های مختلف A ، B ، C بدست می آیند. (بهتر است x ریشه های مخرج انتخاب شوند.)

$$x=0 \rightarrow A=2$$

$$x=1 \rightarrow C=-1$$

$$x=2 \rightarrow B=1$$

$$\int \frac{x-2}{x^2(x-1)} dx = \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-1}{x-1} dx = \frac{-2}{x} + \ln|x| - \ln|x-1| + c$$

ب) اگر مخرج به عامل های اول و دوم تجزیه شود، می توان نشان داد مانند مثال های زیر تفکیک می شوند.

$$\frac{x^2+3x+1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{x^2+3}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

در اینجا نیز به تعداد عامل های مخرج کسر جزئی می نویسیم.

مثال. $\int \frac{x^2+1}{x(x^2+2x+2)} dx$ را پیدا کنید.

حل.

$$\frac{x^2+1}{x(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} = \frac{A(x^2+2x+2) + x(Bx+C)}{x(x^2+2x+2)}$$

با مرتب کردن صورت کسر داریم:

$$x^2+1 \equiv (A+B)x^2 + (2A+C)x + 2A$$

ضریب های هم توان باید برابر باشند.

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+C=0 \\ 2A=1 \end{cases}$$

انتگرال ۹۷

$$B = \frac{1}{r} \quad , \quad C = -1 \quad , \quad A = \frac{1}{r}$$

$$\int \frac{x^r + 1}{x^r(x^r + r x + r)} dx = \int \frac{\frac{1}{r}}{x} dx + \int \frac{\frac{1}{r}x - 1}{x^r + r x + r} dx$$

اگر $t = x + 1$ داریم:

$$\int \frac{\frac{1}{r}x - 1}{x^r + r x + r} dx = \int \frac{\frac{1}{r}x - 1}{(x + 1)^r + 1} dx = \frac{1}{r} \int \frac{t - r}{t^r + 1} dt$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \int \frac{t}{t^r + 1} dt - \frac{r}{r} \int \frac{1}{t^r + 1} dt &= \frac{1}{r} \ln(t^r + 1) - \frac{r}{r} \tan^{-1}(t) + c \\ &= \frac{1}{r} \ln((x + 1)^r + 1) - \frac{r}{r} \tan^{-1}(x + 1) + c \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\int \frac{x^r + 1}{x(x^r + r x + r)} dx = \frac{1}{r} \ln|x| + \frac{1}{r} \ln((x + 1)^r + 1) - \frac{r}{r} \tan^{-1}(x + 1)$$

توجه. اگر در عبارت $\frac{p(x)}{q(x)}$ درجه صورت بزرگتر یا مساوی درجهی مخرج باشد، ابتدا صورت را به مخرج تقسیم می‌کنیم.

مثال. $\int \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} dx$ را پیدا کنید.

حل. با تقسیم بدست می‌آید: $x^4 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 2$

$$\frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \frac{2}{(x^2 - 1)}$$

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} dx = \int (x^2 + 1) dx + \int \frac{2}{x^2 - 1} dx$$

انتگرال آخری هم به روش کسرهای جزئی محاسبه می‌شود. و هم با فرمول های انتگرال، در هر صورت داریم:

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} dx = \frac{x^3}{3} + x - \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) + c$$

انتگرال گیری به روش جانشینی مثلثاتی

اگر انتگرال شامل یکی از عبارت‌های ذیل باشد، جانشینی‌های مثلثاتی زیر را انتخاب می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccc}
 \sqrt{x^2 + a^2} & \sqrt{x^2 - a^2} & \sqrt{a^2 - x^2} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 x = a \tan \theta & x = a \sec \theta & x = a \sin \theta
 \end{array}$$

مثال. $\int \sqrt{4 - x^2} dx$ را پیدا کنید.

حل. انتخاب $u = 4 - x^2$ مناسب نیست (امتحان کنید). با انتخاب:

$$x = 2 \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

داریم:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{4 - x^2} &= \sqrt{4 - 4 \sin^2 \theta} = 2 |\cos \theta| = 2 \cos \theta \\
 dx &= 2 \cos \theta d\theta
 \end{aligned}$$

لذا:

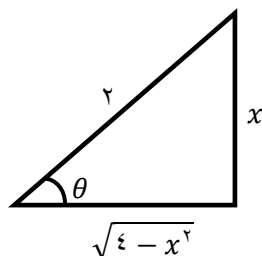
$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{4 - x^2} dx &= \int (2 \cos \theta) 2 \cos \theta d\theta \\
 &= \int 4 \cos^2 \theta d\theta = 4 \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = 2\theta + \sin 2\theta + c
 \end{aligned}$$

اما جواب باید بر حسب x باشد.

$$\sin \theta = \frac{x}{2}, \quad x = 2 \sin \theta$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{پس:}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \quad \text{از رابطه‌ی } \sin \theta = \frac{x}{2} \text{ و رابطه‌ی فیثاغورس بدست می‌آید:}$$



$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = 2\theta + \sin 2\theta + c$$

$$= 2\theta + 2 \sin \theta \cos \theta + c = 2 \left(\sin^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{x}{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right) + c$$

روش جانشینی مثلثاتی را باید زمان به کار ببریم که انتگرال از روش ساده تر پیدا نشود. مثلاً $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$ با جانشینی $x = 2 \tan \theta$ پیدا می‌شود. ولی جانشینی $t = x^2 + 4$ بسیار مناسب‌تر است.

مثال. مساحت زیر منحنی $y = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ را روی فاصله $[0, 1]$ بیابید.

حل. مساحت این ناحیه برابر است با: $A = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

فرض کنیم: $x = \tan \theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(1+\tan^2 \theta)^2} = \frac{1}{\sec^4 \theta}$$

پس:

$$dx = \sec^2 \theta d\theta$$

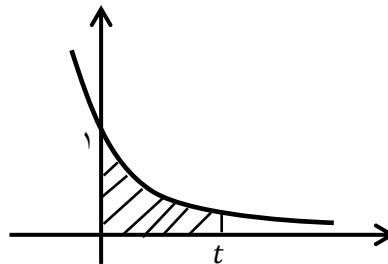
همچنین: کران‌های انتگرال را عوض می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow \theta = 0 \\ x = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$A = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^4 \theta} \sec^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}}{1}$$

۴- انتگرال‌های ناسره (مجازی)

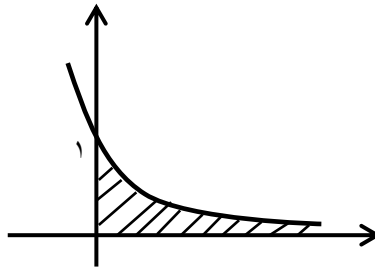
مساحت ناحیه‌ی زیر منحنی $f(x) = e^{-x}$ روی فاصله $[0, t]$ برابر است با:



$$A(t) = \int_0^t e^{-x} dx = 1 - e^{-t}$$

واضح است که $A(t) < 1$. حال اگر A مساحت زیر منحنی $f(x) = e^{-x}$ محدود به محور x ها

و محور y ها در ربع اول باشد، آنگاه: $A = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x} dx = 1$



تعریف انتگرال معین را روی بازه‌های بی کران تعمیم می‌دهیم.

تعریف. فرض کنیم به ازای هر $t \geq a$ ، $\int_a^t f(x) dx$ وجود داشته باشد، در این صورت

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

در صورت وجود حد، انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ را همگرا و در غیر این صورت آن را واگرا می‌نامند. به طور مشابه، تحت شرایط مناسب:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

اینها را انتگرال ناسره نوع اول می‌نامند.

مثال. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ را حساب کنید.

حل.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left. -\frac{1}{x} \right|_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) = 1$$

انتگرال ۱.۱

مثال. انتگرال $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx$ را بیابید.

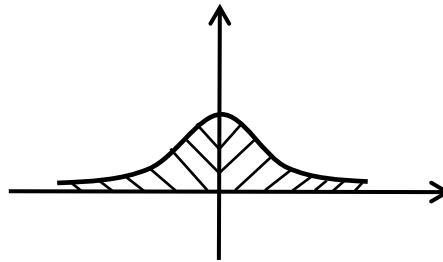
حل.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-1} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\ln(-1) - \ln(-t)) = -(+\infty) = -\infty$$

مثال. مساحت زیر منحنی $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ را روی بازه $]-\infty, +\infty[$ بیابید.

حل. مساحت ناحیه برابر با :

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$



برای محاسبه این نوع انتگرال، آن را به دو انتگرال ناسره نوع اول تبدیل می‌کنیم.

$$(۱) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

با محاسبه معلوم می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \frac{\pi}{2} \\ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

اگر فقط یکی از انتگرال‌های سمت راست در (۱) واگرا باشد، آنگاه $\int_{-\infty}^{+\infty}$ نیز واگراست.

توجه. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p \leq 1$ واگراست. (به تمرینات مراجعه شود.)

۱۰۲ فصل ششم

۵- تمرینات فصل ششم

با استفاده از تعبیر انتگرال به مساحت زیر منحنی، انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$۱- \int_0^2 x dx$$

$$۲- \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$۳- \int_0^1 |x-5| dx$$

۴- اگر $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$ ، نشان دهید f روی فاصله‌ی $[0, 2]$ انتگرال پذیر نیست.

۵- اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، ثابت کنید:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

۶- نشان دهید $\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \int_0^1 e^{-x} dx$

۷- مشتق توابع زیر را بیابید

$$\text{الف) } F(x) = \int_x^0 \sqrt{t^2 - 1} dt \quad \text{ب) } F(x) = \int_{\ln x}^{x^2} \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

۸- حد توابع زیر را بیابید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt}{x^2} \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^0 \tan^{-1} t dt}{x^2}$$

۹- نقاط اکسترمم نسبی تابع $F(x) = \int_x^0 e^t (t^2 - 1) dt$ را بیابید.

انتگرال‌های معین زیر را پیدا کنید.

$$۱۰- \int_0^4 (-x^2 + 3) dx$$

$$۱۱- \int_0^{2\pi} \cos x dx$$

$$۱۲- \int_{-1}^2 [x] dx$$

انتگرال ۱۰۳

۱۳- انتگرال بگیرید.

$$\int_{-r}^r |x^r - x| dx \quad \text{الف} \quad \int_0^\pi [\sin x] dx \quad \text{ب)}$$

۱۴- با استفاده از فرمول‌های انتگرال، انتگرال‌های زیر را بیابید.

$$\int \frac{x^r + \sqrt{x}}{x} dx \quad \text{الف} \quad \int (re^x - 52)^x dx \quad \text{ب)}$$

$$\int \frac{\cos^r x}{\cos^r x} dx \quad \text{ج} \quad \int \frac{r}{\sqrt{9-x^2}} dx \quad \text{د)}$$

حد مجموع‌های زیر را حساب کنید.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{r}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}}}{n} \quad -15$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n^r + 1^r} + \frac{n}{n^r + 2^r} + \dots + \frac{n}{n^r + n^r} \right) \quad -16$$

راهنمایی: از تابع $f(x) = \frac{1}{x^r + 1}$ استفاده کنید.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^r + \left(\frac{n+2}{n} \right)^r + \dots + \left(\frac{n+n}{n} \right)^r \right) \quad -17$$

با استفاده از روش جانشینی انتگرال بگیرید.

$$\int \sqrt{3-x^2} \cdot x dx \quad -18$$

$$\int \frac{\ln^r x}{x} dx \quad -19$$

$$\int \sqrt{4-3x} \cdot x dx \quad -20$$

$$\int \frac{r}{x^r + 4x + 9} dx \quad -21$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 6x - 8}} dx \quad -22$$

۱۰۴ فصل ششم

۲۳- اگر f تابعی زوج و پیوسته باشد، نشان دهید: $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

۲۴- اگر f تابعی پیوسته باشد، نشان دهید: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

۲۵- نشان دهید برای $x > 0$ داریم: $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ و سپس ثابت کنید:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad a, b > 0$$

با استفاده از روش جزء به جزء انتگرال بگیرید.

$$\int x^2 x dx \quad -26$$

$$\int x^4 \ln x dx \quad -27$$

$$\int x \sec^2 x dx \quad -28$$

$$\int e^x \cdot \cos x dx \quad -29$$

انتگرال های زیر را به روش جانشینی و جزء به جزء بیابید.

$$\int \sin(\sqrt{x}) dx \quad -30$$

$$\int \sin^{-1} x dx \quad -31$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}} dx \quad -32$$

۳۳- با روش بازگشتی فرمولی برای انتگرال $\int \cos^m x dx$ بیابید. (m عددی طبیعی است)

انتگرال توابع مثلثاتی زیر را بیابید.

$$\int \tan^2 x dx \quad -34$$

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^3 x dx \quad -35$$

$$\int \tan^4 x \cdot \sec^4 x dx \quad -36$$

انتگرال ۱۰۵

انتگرال‌های زیر را به روش کسرهای جزئی بیابید.

$$\int \frac{x}{(x-2)(x+3)} dx \quad -37$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} dx \quad -38$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx \quad -39$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx \quad -40$$

$$\int \frac{x^2-2x^2+1}{x^2-x} dx \quad -41$$

$$\int \frac{x^2-1}{x^2-3} dx \quad -42$$

با جانشینی مناسب، انتگرال‌های زیر را به انتگرال توابع گویا تبدیل کنید.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \quad -43$$

راهنمایی: تغییر متغیر $x = t^6$ را انتخاب کنید.

$$\int \frac{1}{e^x+1} dx \quad -44$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x} dx \quad -45$$

۱۰۶ فصل ششم

با استفاده از جانشینی مثلثاتی انتگرال بگیرید.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad -۴۶$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}} dx \quad -۴۷$$

$$\int x^3 \sqrt{4-x^2} dx \quad -۴۸$$

۴۹- با تغییر متغیر $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ، انتگرال‌های مثلثاتی زیر را به انتگرال تابع گویا تبدیل کنید.

$$\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x} dx \quad \text{ب)} \quad \int \frac{1}{1+\cos x} dx \quad \text{الف)}$$

راهنمایی: از فرمول‌های زیر استفاده کنید.

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{و} \quad \sin x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

انتگرال‌های ناسره زیر را پیدا کنید.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx \quad -۵۰$$

$$\int_1^{+\infty} x \ln x dx \quad -۵۱$$

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx \quad -۵۲$$

۵۳- انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$ را بیابید.

۵۴- نشان دهید $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p \leq 1$ واگراست.

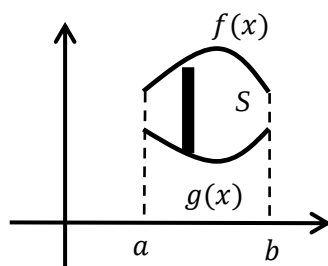
فصل هفتم: کاربردهایی از انتگرال

معمولاً هر جا بخواهیم کمیت‌های جزئی پیوسته را با هم جمع کنیم از انتگرال معین استفاده می‌کنیم بنابراین در محاسبه‌ی مساحت ناحیه، حجم اجسام، طول منحنی و..... انتگرال معین ظاهر می‌شود.

۱- مساحت و حجم

تعیین مساحت بین دو منحنی

ناحیه S محدود به دو منحنی پیوسته f و g روی فاصله $[a, b]$ و دو خط $x = a$ و $x = b$ مفروض است. ($f \geq g \geq 0$)

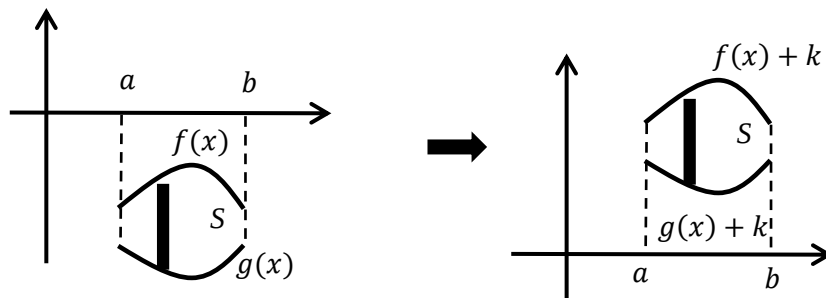


$\int_a^b f(x)dx$ مساحت ناحیه‌ی زیر منحنی f روی فاصله $[a, b]$ است و $\int_a^b g(x)dx$ مساحت ناحیه‌ی زیر منحنی g روی فاصله $[a, b]$ است، پس مساحت ناحیه S برابر است با:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) - g(x)dx$$

(مستطیل‌های جزء عمود بر محور x ها هستند.)

تذکر. این فرمول حتی اگر قسمتی از ناحیه S و یا همه‌ی آن زیر محور x ها باشد باز همه برقرار است، زیرا بنا به پیوستگی f و g ناحیه S را به بالا انتقال می‌دهیم تا همه‌ی ناحیه بالای محور x ها قرار گیرد.



بنابراین مساحت ناحیه‌ی بین دو منحنی f و g روی فاصله $[a, b]$ برابر است با:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

در حالت خاص، مساحت ناحیه‌ی بین منحنی f و محور x ها روی فاصله $[a, b]$ ، برابر است با:

$$A = \int_a^b |f(x)| dx \quad (g \equiv 0)$$

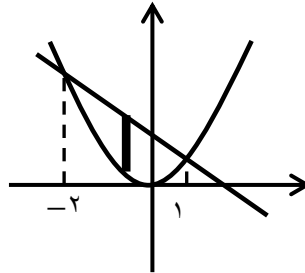
مثال. مساحت محدود به منحنی $y = x^2$ و خط $y = -x + 2$ را پیدا کنید.

حل. نقاط برخورد دو تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{پس} \quad \begin{aligned} -x + 2 &= x^2 \\ -x + 2 &> x^2 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$A = \int_{-2}^1 (-x + 2) - x^2 dx = \frac{27}{6}$$



مثال. مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = x^2 e^x$ و محور x ها و خط $x = 1$ را پیدا کنید.

حل. از $x^2 e^x = 0$ بدست می‌آید: $x = 0$ (برخورد منحنی به محور x ها)

بنابراین:

$$A = \int_0^1 x^2 e^x dx = (x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x) \Big|_0^1 = e - 2$$

مثال. مساحت بین منحنی $y = x^3$ و خط $y = x$ را بیابید.

حل. از $x^3 = x$ بدست می‌آید:

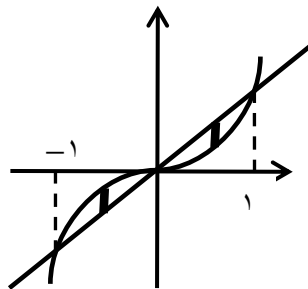
$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

کاربردهایی از انتگرال ۱۰۹

$$x \in]-1, 0[\rightarrow x^r > x$$

$$x \in]0, 1[\rightarrow x > x^r$$

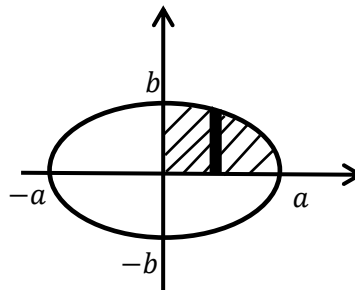
$$A = \int_{-1}^0 (x^r - x) dx + \int_0^1 (x - x^r) dx = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$$



مثال. ثابت کنید مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ برابر است با:

$$A = \pi ab$$

حل. با توجه به تقارن بیضی، مساحت بیضی را در ناحیه اول پیدا کرده و آن را چهار برابر می‌کنیم.



از $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ نتیجه می‌شود:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

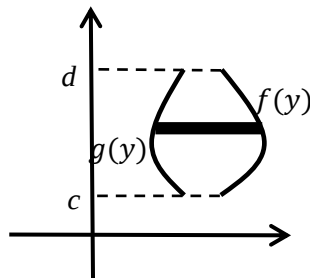
$$A = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4 \frac{b}{a} \left(\frac{\pi a^2}{4} \right) \pi ab$$

انتگرال آخری از تعبیر هندسی انتگرال و یا جانشینی مثلثاتی بدست می‌آید.

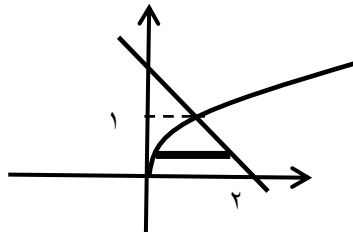
توجه: برای محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی محدود به دو تابع $x = f(y)$ و $x = g(y)$ و دو خط $x = c$ و $x = d$ بهتر است y را متغیر مستقل در نظر بگیریم. در این حالت مستطیل‌های جزء عمود بر محور y ها می‌باشند. و فرمول مساحت به طور مشابه است:

$$A = \int_c^d |f(y) - g(y)| dy$$



مثال. مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = \sqrt{x}$ و خط $y = -x + 2$ و محور x ها را بیابید.

روش اول. y را متغیر مستقل می‌گیریم: $x = y^2$ و $x = 2 - y$ از تساوی $y^2 = 2 - y$ بدست می‌آید: $\begin{cases} y = -2 \\ y = 1 \end{cases}$



اما $y \geq 0$ پس $y = 1$ تنها نقطه‌ی برخورد دو منحنی است. از طرفی محور x ها همان خط $y = 0$ است. بنابراین:

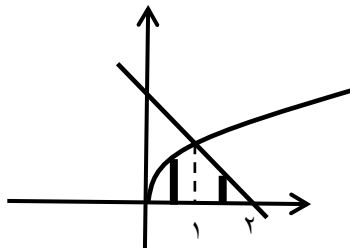
$$A = \int_0^1 (2 - y) - y^2 dy = \frac{7}{6}$$

در این روش مستطیل‌ها عمود بر محور y ها هستند.

روش دوم. x را متغیر مستقل می‌گیریم. از تساوی $\sqrt{x} = -x + 2$ بدست می‌آید: $x = 1$

$$\sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0$$

$$-x + 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

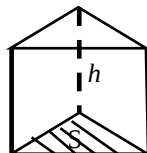


$$A = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^2 (-x + 2) dx = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

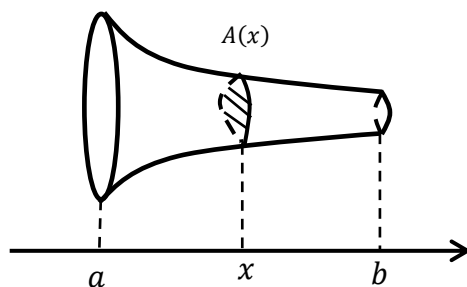
حجم اجسام

ناحیه‌ی S به مساحت A در صفحه مفروض است. اگر این ناحیه به ارتفاع h (عمود بر ناحیه) امتداد یابد، جسمی ایجاد می‌گردد. این جسم را استوانه می‌نامند و حجم آن بنا به تعریف برابر است با:

$$V = Ah$$



در حالت کلی جسمی را در نظر می‌گیریم که اشتراک آن با هر صفحه عمود بر محور x ها در نقطه‌ی x ناحیه‌ی به مساحت $A(x)$ است.



فرض کنیم $a = a_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ یک افراز $[a, b]$ و $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ و $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ، حجم جسم استوانه‌ای به ارتفاع Δx_i و مساحت قاعده $A(c_i)$ برابر با :

$$V_i = A(c_i)\Delta x_i$$

۱۱۲ فصل هفتم

به طور شهودی معلوم می‌شود که حجم تقریبی این جسم برابر است با :

$$V \cong \sum_{i=1}^n A(c_i) \Delta x_i$$

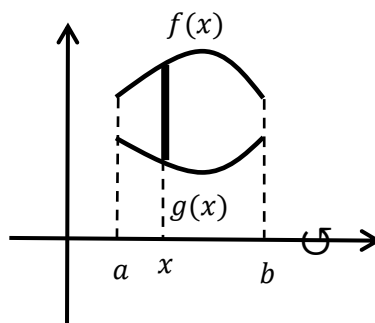
بنابراین:

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

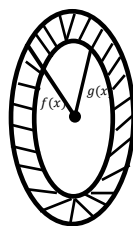
این رابطه را اصل کاوالیری می‌نامند.

حجم اجسام دوار

فرض کنیم f و g توابعی پیوسته روی فاصله $[a, b]$ باشند و $f \geq g \geq 0$. ناحیه‌ی محدود به دو منحنی f و g و دو خط $x = a$ و $x = b$ ، حول محور x ها دوران می‌کند.



از دوران این ناحیه جسمی ایجاد می‌گردد که سطح مقطع آن واشری به شعاع بیرونی $f(x)$ و شعاع داخلی $g(x)$ است. مساحت این واشر برابر است با:



$$A(x) = \pi(f^2(x) - g^2(x))$$

بنا به اصل کاوالیری حجم جسم برابر است با:

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

این روش محاسبه جسم دوار را روش واشری می‌نامند.

کاربردهایی از انتگرال ۱۱۳

نکته. در حالت خاص که $g \equiv 0$ ، واشر تبدیل به قرص می شود و حجم جسم برابر است با:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

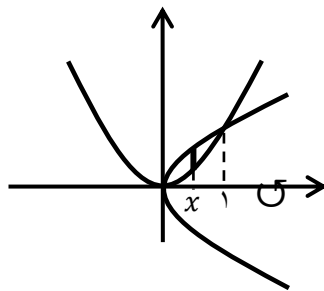
مثال. ناحیه‌ی محدود به دو سهمی $y = x^2$ و $x = y^2$ حول محور x ها دوران می‌کند، حجم این جسم را بیابید.

حل. اگر $x = y^2$ $y = \sqrt{x}$ ($y \geq 0$)

از تساوی $\sqrt{x} = x^2$ داریم:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

روی فاصله $[0, 1]$ ، $\sqrt{x} \geq x^2$

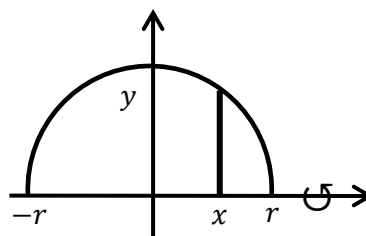


بنابراین:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 dx = \frac{3}{10} \pi$$

مثال. با استفاده از انتگرال، حجم کره‌ای به شعاع r را بیابید.

حل. از دوران نیم دایره‌ای $x^2 + y^2 = r^2$ ($y \geq 0$) حول محور x ها کره‌ای به شعاع r ایجاد می‌گردد.



$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$V = \pi \int_{-r}^r y^2 dx = \pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}^2 dx = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{حجم کره}$$

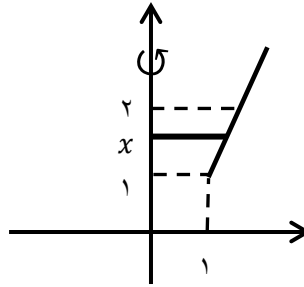
مثال. ناحیه‌ی محدود به خط $y = 2x - 1$ و محور y ها و دو خط $y = 1$ و $y = 2$ حول محور y ها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را بیابید.

حل. چون دوران حول محور y ها است، باید سطح مقطع عمود بر محور y ها باشد.

$$y = 2x - 1 \quad \text{پس} \quad x = \frac{y+1}{2}$$

اگر $f(y) = \frac{y+1}{2}$ سطح مقطع برابر است با:

$$A(y) = \pi f^2(y)$$



پس بنا به اصل کاوالیری:

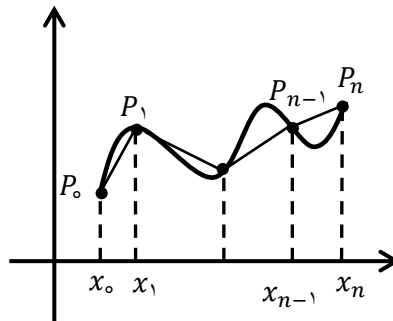
$$V = \int_1^2 \pi f^2(y) dy = \pi \int_1^2 \left(\frac{y+1}{2} \right)^2 dy = \frac{15}{12} \pi$$

۲- طول قوس منحنی و مساحت سطح دوار

طول قوس منحنی

فرض کنیم f روی $[a, b]$ پیوسته و $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ یک افراز $[a, b]$

باشد. منحنی f را به n پاره خط تقسیم می‌کنیم.



$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) \text{ و } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

طول هر پاره خط برابر است با:

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

وقتی Δx ها کوچک شوند، تعداد پاره خطها روی منحنی افزایش می‌یابد و طول منحنی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| \quad (\lambda \text{ ماکسیمم } \Delta x_i \text{ ها است})$$

اکنون فرض کنیم f تابعی مشتق‌پذیر و $\hat{f}(x)$ روی فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد. (در این حالت f را روی $[a, b]$ هموار می‌نامند.) بنا به قضیه مقدار میانگین یک $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ هست که:

$$\Delta y_i = \hat{f}(c_i) \Delta x_i$$

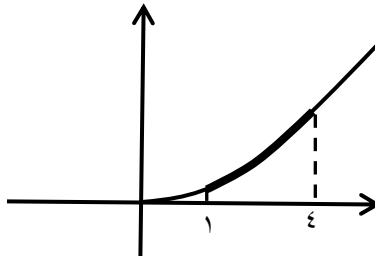
$$\begin{aligned} L &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\hat{f}(c_i) \Delta x_i)^2} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (\hat{f}(c_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (\hat{f}(x))^2} dx \end{aligned}$$

به طور خلاصه: اگر f تابعی مشتق‌پذیر و $\hat{f}$ روی $[a, b]$ پیوسته باشد، طول قوس منحنی f روی این فاصله برابر است با:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (\hat{f}(x))^2} dx$$

تبصره. اگر منحنی f روی $[a, b]$ در نقطه‌ی داخلی $x = c$ شکستگی داشته باشد، طول قوسی منحنی را روی دو فاصله‌ی $[a, c]$ و $[c, b]$ حساب کرده و با هم جمع می‌کنیم.

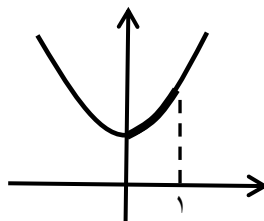
مثال. طول قوس منحنی $y = x^{\frac{3}{2}}$ را روی فاصله‌ی $[1, 4]$ بیابید.
حل. $y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$ و y' روی فاصله $[1, 4]$ پیوسته است.



$$L = \int_1^{\xi} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_1^{\xi} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27} \left((10)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

مثال: طول قوس منحنی $y = \cosh x$ را روی فاصله‌ی $[0, 1]$ بیابید.

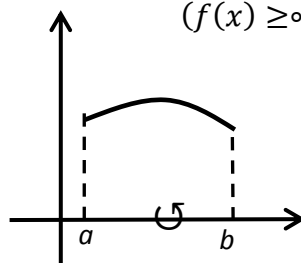
حل. $y' = \sinh x$



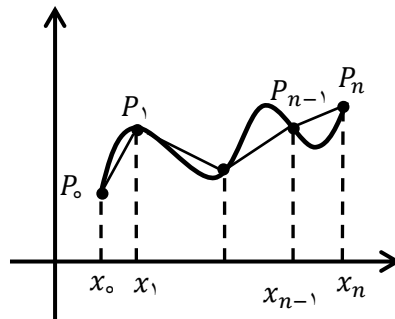
$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \int_0^1 \sqrt{\cosh^2 x} \\ &= \int_0^1 \cosh x dx = \sinh x \Big|_0^1 = \sinh(1) \end{aligned}$$

مساحت سطح دوار

می‌خواهیم مساحت جانبی سطحی که از دوران منحنی پیوسته $y = f(x)$ حول محور x ها روی فاصله‌ی $[a, b]$ ایجاد می‌شود را بیابیم. ($f(x) \geq 0$)



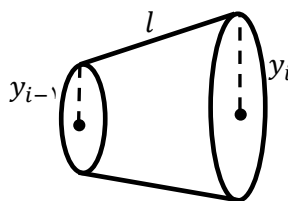
مانند محاسبه طول قوس فاصله‌ی $[a, b]$ را افراز و منحنی $f(x)$ را به چند پاره خط افراز می‌کنیم.



دیدیم طول هر پاره خط برابر است با:

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i, c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

از دوران هر پاره خط حول محور x ها مخروط ناقص ایجاد می شود.



در این شکل $l = |\overline{P_{i-1}P_i}|$ ، $y_i = f(x_i)$ و $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ مساحت این مخروط ناقص برابر است با:

$$\Delta S_i = \pi(y_i + y_{i-1})|\overline{P_{i-1}P_i}|$$

و برای Δx_i های کوچک داریم:

$$f(x_i) \cong f(x_{i-1}) \cong f(c_i)$$

پس:

$$\Delta S_i \cong 2\pi f(c_i) \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i \quad \text{یا} \quad \Delta S_i \cong 2\pi f(c_i) |\overline{P_{i-1}P_i}|$$

بنابراین مساحت جانبی این سطح دوار به صورت زیر تعریف می شود.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi f(c_i) \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \cdot \Delta x_i$$

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

به طور خلاصه: اگر $y = f(x)$ تابعی مشتق پذیر و f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، مساحت جانبی سطح دوار حاصل از دوران منحنی f حول محور x ها برابر است با:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

اگر قرار دهیم: $y = f(x)$ و $ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$ فرمول به صورت ساده زیر تبدیل می شود.

$$S = \int 2\pi y ds \quad (۱)$$

به طور مشابه مساحت جانبی سطح دوار حاصل از دوران منحنی $x = f(y)$ حول محور y ها روی فاصله $[c, d]$ برابر است با:

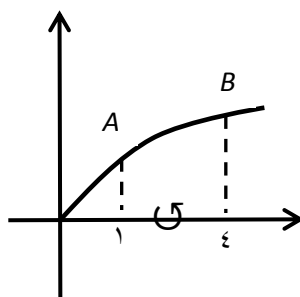
$$S = \int 2\pi x ds \quad (۲)$$

$$ds = \sqrt{1 + (f'(y))^2} \cdot dy \quad \text{و در آن:}$$

تذکر. در فرمولهای (۱) و (۲) هر یک از روابط $ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$ یا $ds = \sqrt{1 + (f'(y))^2} \cdot dy$ را به دلخواه می توان بکار برد.

مثال. قوسی از منحنی $y = \sqrt{x}$ از نقطه $A(1, 1)$ تا نقطه $B(4, 2)$ حول محور x ها دوران می کند، مساحت این سطح دوار را بیابید.

حل.



$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{\frac{1 + 4x}{4x}}$$

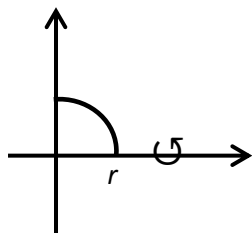
$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \cdot dx$$

$$S = \int 2\pi y ds$$

$$S = 2\pi \int_1^4 \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{1 + 4x}{4x}} dx = \frac{\pi}{6} (\sqrt{17^3} - \sqrt{5^3})$$

مثال. فرمول مساحت کره‌ای به شعاع r را بیابید.

حل. قوسی از دایره‌ی $x^2 + y^2 = r^2$ واقع در ربع اول را حول محور x ها دوران می‌دهیم، یک نیمکره به شعاع r بدست می‌آید.



با مشتق‌گیری از معادله‌ی $x^2 + y^2 = r^2$ داریم:

$$y' = \frac{-x}{y} \quad \text{پس:} \quad 2x + 2yy' = 0$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{\frac{r^2}{y^2}} = \frac{r}{y} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \cdot dx$$

$$S = 2 \int 2\pi y ds$$

$$S = 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

$$S = 4\pi r \int_0^r dx = 4\pi r^2$$

مثال. قوسی از منحنی $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$ روی فاصله‌ی $0 \leq x \leq 3$ حول محور y ها دوران می‌کند. مساحت جانبی این سطح دوار را بیابید.
حل.

$$y' = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{x^2(x^2 + 2) + 1} = x^2 + 1$$

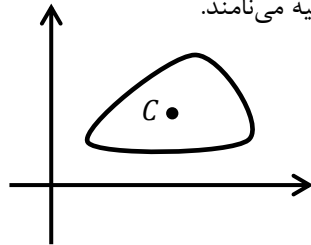
$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \cdot dx$$

$$S = \int 2\pi x ds$$

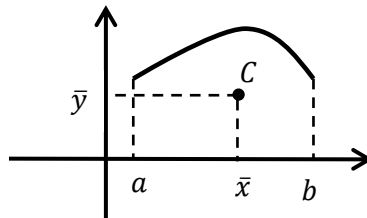
$$S = 2\pi \int_0^3 x(x^2 + 1) dx = \frac{99}{2}\pi$$

۳- مرکزگون ناحیه

ناحیه‌ی با ضخامت نازک در صفحه مفروض است. نقطه‌ای مانند C را که ناحیه در آن در حالت تعادل قرار می‌گیرد، مرکزگون (مرکز جرم) ناحیه می‌نامند.



ناحیه محدود به تابع پیوسته f روی فاصله‌ی $[a, b]$ و محور x ها مفروض است. اگر $C(\bar{x}, \bar{y})$ مختصات مرکزگون ناحیه باشد، داریم:



$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

کاربردهایی از انتگرال ۱۲۱

مثال. مرکزگون ناحیه‌ی محدود به منحنی $f(x) = 4 - x^2$ و محور x ها را پیدا کنید.
 حل. از $4 - x^2 = 0$ بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{32}{3}$$

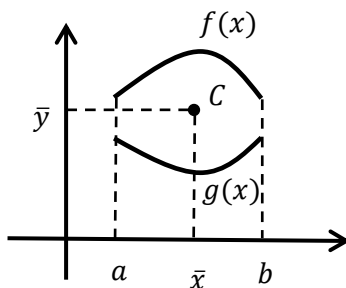
$$\int_{-2}^2 x f(x) dx = \int_{-2}^2 x(4 - x^2) dx = 0$$

$$\frac{1}{2} \int_{-2}^2 f^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (4 - x^2)^2 dx = \frac{256}{15}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{256}{15}}{\frac{32}{3}} = \frac{8}{5} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{0}{\frac{32}{3}} = 0$$

$$C(0, \frac{8}{5})$$

تبصره. اگر ناحیه محدود به دو منحنی f و g و دو خط $x = a$ و $x = b$ باشد، مختصات مرکزگون به صورت زیر است.



$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) - g^2(x) dx}{\int_a^b f(x) - g(x) dx} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b f(x) - g(x) dx}$$

۴- تمرینات فصل هفتم

مساحت ناحیه‌های ذیل را بیابید.

۱- ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = -x^2 + 4x$ و $y = x^2$

۲- ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = -e^x$ و محور x ها و دو خط $x = 0$ و $x = 1$

۳- ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = (x - 2)^3$ و محور x ها و دو خط $x = 0$ و $x = 3$

۴- ناحیه‌ی محدود به منحنی $x = y^2(4 - y)$ و محور y ها

۵- ناحیه‌ی محدود به منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ و محور مختصات

۶- مساحت ناحیه‌ی بین منحنی $y = \ln x$ و خط $y = 1$ واقع در ربع اول را به دو روش بیابید.

۷- ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = x^2$ و خط $y = 4$ حول محور x ها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را بیابید.

۸- ناحیه‌ی محدود به هذلولی $x^2 - y^2 = 4$ و محور x ها و خط $x = 4$ در ربع اول، حول محورها x ها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را بیابید.

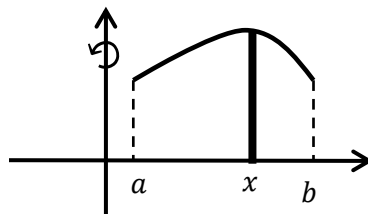
۹- ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x \ln x}}$ و محور x ها روی فاصله $[e, e^2]$ دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را بیابید.

۱۰- ناحیه‌ی محدود به دو منحنی $x = 1 - \sqrt{1 - y}$ و $x = y$ ، حول محور y ها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را بیابید.

محاسبه‌ی حجم جسم دوار به روش پوسته‌ای استوانه‌ای

ناحیه محدود به منحنی $y = f(x)$ و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ ($b > a \geq 0$) حول محور y ها دوران می‌کند، حجم جسم حاصل برابر است با:

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$



با استفاده از روش پوسته‌ای استوانه‌ای حجم اجسام ذیل را بیابید.

۱۱- ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = 2x^2 - x^3$ و محور x ها حول محور y ها دوران می‌کند.

۱۲- ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = \frac{1}{1+x^2}$ و محور x ها و دو خط $x = 0$ و $x = 3$ حول محور y ها دوران می‌کند.

طول قوس منحنی‌های زیر را پیدا کنید.

۱۳- پاره خط $4y = 2x + 4$ از $x = 0$ تا $x = 1$

۱۴- منحنی $f(x) = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt$ روی فاصله‌ی $[0, \frac{\pi}{4}]$

۱۵- منحنی $y = \ln(\cos x)$ از $x = 0$ تا $x = \frac{\pi}{4}$

۱۶- منحنی $y^2 = 4(x+4)^2$ ($y > 0$) روی فاصله $[0, 2]$

۱۷- منحنی $9x^2 = 4y^3$ از نقطه‌ی $(0,0)$ تا $(2\sqrt{3}, 3)$
راهنمایی: x را تابعی از y بگیرید.

۱۲۴ فصل هفتم

مساحت جانبی سطوح دوار زیر را بیابید.

۱۸- قوسی از منحنی $y = x^3$ روی فاصله‌ی $2 \leq x \leq 0$ ، دوران حول محور x ها است.

۱۹- قوسی از منحنی $x = 1 + 2y^2$ روی فاصله‌ی $1 \leq y \leq 2$ ، دوران حول محور x ها است.

۲۰- قوسی از منحنی $y = \ln x$ روی فاصله‌ی $1 \leq x \leq 2$ ، دوران حول محور y ها است.

۲۱- قوسی از منحنی $9x^2 = y(3 - y)^2$ روی فاصله‌ی $0 \leq y \leq 3$ ، دوران حول محور y ها است.

راهنمایی: از فرمول $ds = \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy$ استفاده کنید.

مرکزگون ناحیه‌های زیر را بیابید.

۲۲- ناحیه محدود به منحنی $y = \frac{1}{x}$ و محور x ها و دو خط $x = 1$ و $x = 2$

۲۳- ناحیه محدود به منحنی $y = e^x$ و محور مختصات و خط $x = 1$

۲۴- ناحیه محدود به دو منحنی $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$

۲۵- ربع اول دایره‌ی $x^2 + y^2 = 1$

۲۶- ثابت کنید مرکزگون مثلث، نقطه‌ی اشتراک میانه‌های مثلث است.

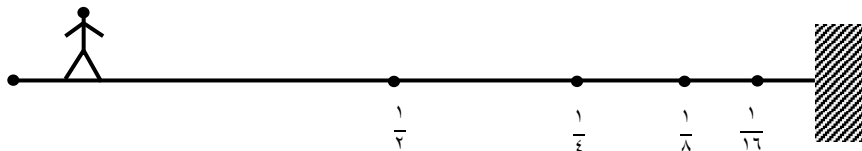
راهنمایی: نشان دهید مرکزگون روی میانه هر ضلع می‌باشد و مثلث را طوری رسم کنید که یک راس مثلث و میانه روی یکی از محورها قرار گیرد.

فصل هشتم: سری‌ها

می‌دانیم که جمع تعداد متناهی از اعداد حقیقی، عددی حقیقی است. اما جمع بی‌نهایت عدد حقیقی چگونه؟

زنون فیلسوف دوران یونان باستان پارادوکسی را به شرح زیر مطرح کرد.

فرض کنیم شخصی در فاصله یک متری دیواری ایستاده است. برای اینکه شخص به دیوار برسد باید $\frac{1}{2}$ مسیر را طی کند. همین طور برای رسیدن به دیوار باید $\frac{1}{4}$ مسیر باقی مانده را طی کند. و این روند همچنان ادامه دارد. پس این شخص هیچگاه به دیوار نخواهد رسید. تا قرن‌ها برای پارادوکس زنون جوابی قانع کننده پیدا نشد. مشکل در اینجا بود که آنها به طور ضمنی بر این عقیده بودند که جمع بی‌نهایت عدد مثبت، عدد نمی‌شود.



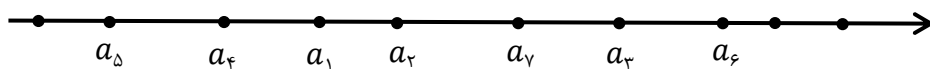
مسافتی را که این شخص طی می‌کند برابر با جمع زیر است:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

بعداً خواهیم دید که این جمع نامتناهی عدد می‌شود. این جمع‌های نامتناهی را سری می‌نامند.

۱- دنباله‌ها

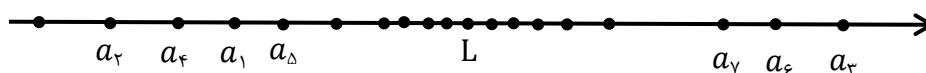
یک دنباله حقیقی ترتیبی مشخص از اعداد حقیقی به صورت $a_1, a_2, a_3, \dots$ می‌باشد که در آن a_i ها را جملات دنباله می‌نامند. معمولاً این دنباله را با $\{a_n\}$ نشان می‌دهند. و a_n جمله‌ی عمومی است. جملات دنباله را می‌توان روی محور اعداد حقیقی نمایش داد.



تعریف. دنباله $\{a_n\}$ مفروض است. اگر برای هر ε مثبت، عددی طبیعی مانند N وجود داشته باشد به طوریکه از $n \geq N$ نتیجه شود: $|a_n - L| < \varepsilon$ (L عدد حقیقی است). آنگاه حد دنباله برابر با L است و آن را علامت زیر نشان می‌دهند.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

همچنین در صورت وجود عدد L ، دنباله را **همگرا** و در غیر این صورت دنباله را **واگرا** می‌نامند. به طور هندسی، دنباله وقتی همگرا به L است که تجمع جملات دنباله در اطراف فقط L باشد.



تبصره. قواعد و قضایای حد در توابع حقیقی برای دنباله‌ها نیز برقرار است. (قاعده هوپیتال نیز برقرار است.)

چند مثال.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \text{همگرا}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-1}{3n^2+4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{3n^2} = \frac{2}{3} \quad \text{همگرا}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n}}{3n+1} = {}^H \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{2n}}{3} = +\infty \quad \text{واگرا}$$

مثال. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ را حساب کنید.

حل. فرض کنیم $y = n^{\frac{1}{n}}$ ، از طرفین $\ln$ می‌گیریم:

$$\ln y = \frac{1}{n} \ln(n) = \frac{\ln(n)}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = {}^H \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y = 1 \quad \text{پس:} \quad \ln\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y\right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{بنابراین:}$$

تعریف: دنباله‌ی $\{a_n\}$ مفروض است.

الف) اگر عددی مثبت مانند M وجود داشته باشد، به طوریکه $|a_n| \leq M$ ، دنباله $\{a_n\}$ را کراندار می‌نامند.

ب) اگر $a_n < a_{n+1}$ ، دنباله $\{a_n\}$ را نزولی می‌نامند.

ج) اگر $a_n > a_{n+1}$ ، دنباله $\{a_n\}$ را نزولی می‌نامند.

د) دنباله صعودی یا نزولی را دنباله یکنوا می‌نامند.

مثلاً دنباله‌ی $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ صعودی و کراندار است. ولی دنباله $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ کراندار است ولی یکنوا نیست.

قضیه. هر دنباله‌ی کراندار و یکنوا، همگراست.

مثال. اگر $0 < a < 1$ ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

اثبات. دنباله $a_n = a^n$ نزولی است زیرا:

$$a_{n+1} = a^{n+1} = a \cdot a^n < a^n = a_n \quad (0 < a < 1)$$

همچنین:

$$0 < a_n < a_1 = a \quad (a_n \text{ کراندار است.})$$

لذا بنا به قضیه قبل، عددی مانند L هست که: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ اما $a_{n+1} = aa_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$L = 0 \quad \text{پس} \quad L = aL$$

$$\blacksquare \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0 \quad \text{بنابراین:}$$

مثال. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!}$ را حساب کنید.

حل. با استقراء می‌توان نشان داد به ازای $n > 5$ ، $2^n \leq (n-1)!$

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \quad (n > 5)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

بنا به قضیه فشردگی:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n}{n!} = 0$$

۲- سری عددی

دنباله‌ی $\{a_n\}$ مفروض است، مجموع نامتناهی: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$
را یک سری (سری عددی) می‌نامند. و آن را با علامت زیر نشان می‌دهند.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

دنباله‌ی $\{s_k\}$ با تعریف $s_k = \sum_{n=1}^k a_n$ را مجموع جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ می‌نامند.

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

اگر دنباله‌ی $\{s_n\}$ حد متناهی مانند s داشته باشد. سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را **همگرا** می‌نامند و داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا نباشد، سری را **واگرا** می‌نامند.

آزمون واگرایی. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

مثلاً سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n-1}$ واگراست زیرا: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3} \neq 0$

مثال. همگرایی جمع زیر را بررسی کنید.

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

حل. داریم: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

اما $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ وجود ندارد (چرا؟) پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ واگراست.

قضیه. فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دو سری همگرا باشند. در این صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (\text{ب})$$

سری هندسی

هر سری به صورت: $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$
را یک سری هندسی با قدر نسبت r می نامند. (a و r اعدادی ثابت هستند.)

فرض کنیم $s_k = a + ar + ar^2 + \dots + ar^k$ مجموع جزئی سری باشد.

$$rs_k = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{k+1}$$

$$s_k - rs_k = a - ar^{k+1}$$

$$s_k = \frac{a(1 - r^{k+1})}{1 - r}$$

الف) اگر $-1 < r < 1$ آنگاه $\lim_{k \rightarrow +\infty} r^{k+1} = 0$ پس $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \frac{a}{1-r}$

بنابراین: $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$, $-1 < r < 1$

ب) اگر $r \geq 1$ یا $r \leq -1$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n \neq 0$ لذا سری هندسی واگراست.

مثال. جمع سری $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$ را بیابید.

حل. این سری هندسی با $r = \frac{1}{2}$ است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

مثال. جمع سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(-3)^n}$ را بیابید.

حل. این سری هندسی با $r = \frac{-1}{3}$ است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-3)^n} = 1 + \frac{1}{-3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(-3)^n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(-3)^n} = \frac{3}{4} - \left(1 + \frac{1}{-3}\right) = \frac{1}{12}$$

***p* - سری**

فرض کنیم p عددی حقیقی باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ را p -سری می‌نامند. با استفاده از آزمون انتگرال

(قسمت بعد) می‌توان نشان داد.

الف) به ازای $p > 1$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگراست.

ب) به ازای $p \leq 1$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ واگراست.

مثال. همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4} \quad \text{ب)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5-3n}{n^3} \quad \text{الف)}$$

حل الف) p -سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^3}$ به ازای $p = 3$ همگراست. و p -سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ نیز به

ازای $p = 2$ همگراست. بنابراین سری زیر نیز همگراست.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5-3n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^3} - \frac{3}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$$

سری‌ها ۱۳۱

حل ب) اگر $m = n + 4$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+4} = \sum_{m=5}^{\infty} \frac{1}{m}$$

اما p - سری $\sum_{m=5}^{\infty} \frac{1}{m}$ به ازای $p = 1$ واگراست. پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+4}$ نیز واگراست.

۳- آزمون‌های همگرایی

آزمون انتگرال. فرض کنیم f تابعی پیوسته، مثبت و نزولی روی فاصله $[1, +\infty[$ و $a_n = f(n)$ باشد. در این صورت:

الف) اگر $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ همگرا باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است.

ب) اگر $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ واگرا باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز واگرا است.

مثال. فرض کنیم p عددی حقیقی، نشان دهید p - سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ به ازای $p > 1$

همگرا و به ازای $p \leq 1$ واگرا است.

حل. تابع $f(x) = \frac{1}{x^p}$ روی $[1, +\infty[$ پیوسته نزولی و مثبت است. ($p > 0$)

برای $p > 1$ ، $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$ ، پس بنا به آزمون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگراست.

و برای $0 < p \leq 1$ ، $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = +\infty$ ، پس بنا به آزمون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ واگراست.

واضح است سری برای $p \leq 0$ واگراست.

مثال. همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ را بررسی کنید.

حل. تابع $f(x) = \frac{x}{e^x}$ روی فاصله $[1, +\infty[$ پیوسته و مثبت است. همچنین با مشتق‌گیری

معلوم می‌شود f روی فاصله $[1, +\infty[$ نزولی است. اما $\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$ همگراست ، پس

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ نیز همگرا است.

آزمون مقایسه. فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سری‌هایی با جملات مثبت و $a_n \leq b_n$ باشد.

الف) از همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نتیجه می‌شود.

ب) از واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نتیجه می‌شود.

مثال. همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید:

$$\text{الف) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n} \quad \text{ب) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

حل الف) $n^3 + n \geq n^3$ پس $\frac{1}{n^3 + n} \leq \frac{1}{n^3}$ بنا به آزمون مقایسه از همگرایی p - سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad \text{همگرایی نتیجه می‌شود.}$$

حل ب) $3n+1 \leq 4n$ پس $\frac{1}{4n} \leq \frac{1}{3n+1}$ لذا $\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{4n}}$ ، بنا به آزمون

مقایسه از واگرایی سری p - سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n}}$ واگرایی نتیجه می‌شود.

سری‌های متناوب

هر سری که علامت جملات آن یکی در میان تغییر کند سری متناوب نامیده می‌شود.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots \quad \text{سری متناوب.}$$

آزمون سری متناوب. فرض کنیم جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ مثبت و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ و

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{در این صورت سری متناوب} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad \text{همگرا است.}$$

مثال. نشان دهید سری همساز متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ همگرا است.

حل: فرض کنیم $a_n = \frac{1}{n}$ واضح است دنباله $\{a_n\}$ جملات مثبت دارد.

سری‌ها ۱۳۳

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{و} \quad a_{n+1} \leq a_n$$

بنا به آزمون سری متناوب، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ همگراست.

تعریف: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مفروض است

الف) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرای مطلق می‌نامند.

ب) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ولی همگرای مطلق نباشد این سری را همگرای مشروط می‌نامند.

مثلاً سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ همگرای مطلق و سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ همگرای مشروط است.

قضیه. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا است. به عبارت دیگر هر سری همگرای مطلق، همگرا است.

مثال. همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2 \sin(n)}{2^n}$ را بررسی کنید.

$$\text{حل.} \quad |1 - 2 \sin(n)| \leq |1| + |2 \sin(n)| \leq 3$$

$$\frac{|1 - 2 \sin(n)|}{2^n} \leq \frac{3}{2^n} \quad \text{پس:}$$

اما سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ همگراست. پس بنا به آزمون مقایسه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2 \sin(n)}{2^n}$ همگرای مطلق و در نتیجه همگراست.

تا اینجا آزمون‌های گفته شده تحت شرایط معینی قابل استفاده هستند، در آزمون بعدی با محاسبه روی جمله‌ی عمومی سری می‌توان همگرایی آن را بررسی کرد.

آزمون نسبت. سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مفروض است

الف) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ ، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است

ب) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ ، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

ج) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ ، این آزمون قابل استفاده نیست.

مثال. همگرایی سری های زیر را بررسی کنید.

$$\text{الف) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \quad \text{ب) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\text{حل الف) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2 > 1$$

پس این سری واگراست.

$$\text{حل ب) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

پس این سری همگرای مطلق و در نتیجه همگراست.

می دانیم که اگر تعداد متناهی عدد را با هر ترتیبی جمع کنیم، جواب آن یکتا است، حال این سوال مطرح است که آیا ترتیب نوشتن جمع های نامتناهی (سری ها) روی جواب آن تاثیر دارد؟ ثابت می شود که اگر سری همگرای مطلق باشد با هر ترتیب نوشتن جملات سری، جواب آن یکتا است. با این حال اگر سری همگرای مشروط باشد، ترتیب نوشتن جملات سری روی جواب سری تاثیر دارد. به [۶] مراجعه شود.

۴- سری توانی

در این قسمت با معرفی سری های توانی می توانیم بعضی از توابع را به صورت یک چند جمله ای با جملات نامتناهی بنویسیم.

تعریف. یک سری به شکل

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

را سری توانی حول نقطه a می نامند. واضح است که برای هر مقدار x یک سری عددی بدست می آید که ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

سری‌ها ۱۳۵

توجه. سری توانی حول نقطه $a = 0$ به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ می‌باشد.

مثال. دامنه تابع $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}$ را بیابید.

حل. دامنه f مجموعه x هایی است که سری به ازای آنها همگراست. اگر $a_n = \frac{x^n}{n 2^n}$ ، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1) 2^{n+1}} \cdot \frac{n 2^n}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n|x|}{2(n+1)} = \frac{|x|}{2} < 1$$

پس: $|x| < 2$ یا $-2 < x < 2$ همگرایی سری را در نقاط مرزی $x = \pm 2$ بررسی می‌کنیم.

اگر $x = 2$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست و اگر $x = -2$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ همگراست.

بنابراین: $D_f = [-2, 2[$

قضیه. برای همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$ فقط سه حالت وجود دارد.

(الف) سری فقط در $x=a$ همگراست.

(ب) سری روی $\mathbb{R}$ همگراست.

(ج) عددی مثبت مانند r وجود دارد که اگر $|x-a| < r$ سری همگرا و اگر $|x-a| > r$ سری واگراست.

در قضیه بالا r را شعاع همگرایی می‌نامند. در حالت الف: $r=0$ و در حالت ب: $r=\infty$ است.

در مثال قبل شعاع همگرایی سری $r=2$ است.

مثال. شعاع همگرایی و دامنه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ را تعیین کنید.

حل. فرض کنیم: $a_n = \frac{x^n}{n!}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

پس این سری برای هر $x \in \mathbb{R}$ همگراست و شعاع همگرایی $r=\infty$ است.

توابع تحلیلی

تعریف. تابع f مفروض است. هرگاه بازه‌ای مانند I شامل نقطه‌ی a وجود داشته باشد، به طوریکه روی فاصله‌ی I ، $f(x)$ برابر با یک سری توانی حول نقطه a باشد. آنگاه f را در نقطه‌ی $x=a$ تحلیلی می‌نامند.

مثال. نشان دهید $f(x) = \frac{1}{1-x}$ در نقطه $x=0$ تحلیلی است.
حل. از سری هندسی داریم:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

مثال. سری توانی برای $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ حول نقطه‌ی $x=0$ بیابید.
حل. در مثال قبل x را به $-x^2$ تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + (-x^2)^4 + \dots, \quad |x^2| < 1 \\ \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots, \quad |x| < 1 \end{aligned}$$

توجه. فرض کنیم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ سری توانی با شعاع r باشد. ($r > 0$) برای محاسبه مشتق یا انتگرال سری توانی، باید جمله به جمله از آن مشتق یا انتگرال گرفت. (شعاع همگرایی سری بدست آمده همان r است.)

مثال: با مشتق‌گیری از سری هندسی

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots, \quad |x| < 1 \\ \frac{-1}{(1+x)^2} &= -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - \dots, \quad |x| < 1 \end{aligned}$$

مثال. سری توانی $\tan^{-1}x$ را حول نقطه‌ی $a=0$ بیابید.

حل. دیدیم که: $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots, \quad |x| < 1$
 با انتگرال‌گیری بدست می‌آید:

$$\tan^{-1}x = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad |x| < 1$$

اگر $x = 0$ نتیجه می‌شود $c = 0$ بنابراین:

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, |x| < 1$$

ثابت می‌شود این سری در $x = \pm 1$ همگرا و برابر با مقدار تابع است. اگر $x = 1$ بدست می‌آید:

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

پس:

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

۵- سری تیلور

قضیه. فرض کنیم f در نقطه $x = a$ تحلیلی باشد. در این صورت:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

یا:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

تساوی سمت راست را سری تیلور f حول نقطه‌ی a می‌نامند. این قضیه به طور ضمنی بیان می‌کند که سری توانی هر تابع حول نقطه $x = a$ در صورت وجود، منحصر به فرد است. سری تیلور f حول نقطه $x = 0$ را سری مک لوران می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

قضیه تیلور. فرض کنیم تابع f در اطراف نقطه‌ی a از هر مرتبه‌ای مشتق پذیر باشد، در این صورت:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

که در آن c_n بین a و x قرار دارد. و $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ را باقیمانده سری می‌نامند. اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ آنگاه $f(x)$ برابر با سری تیلور خودش حول نقطه‌ی $x = a$ است.

مثال. سری مک لوران تابع $f(x) = \sin x$ را بیابید. و نشان دهید به خودش همگراست.
 حل. مشتقات $f^{(n)}(0)$ را می‌یابیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0 \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x, & f^{(3)}(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(0) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

پس سری مک لوران $\sin x$ برابر است با:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

اما $|f^{(n+1)}(c_n)| \leq 1$ پس:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$$

بنابراین سری به تابع $\sin x$ همگراست.

$$\sin x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

با آزمون نسبت می‌توان دید که این سری برای هر $x \in \mathbb{R}$ همگراست.

مثال. سری مک لوران تابع $f(x) = \cos x$ را بیابید.

حل. با مشتق‌گیری از بسط تابع $\sin x$ داریم:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

سری مک لوران چند تابع مهم:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

مثال. سری تیلور تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را حول نقطه‌ی $x = 1$ پیدا کنید.

حل. داریم:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots, \quad |x| < 1$$

بنابراین:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots, \quad |x-1| < 1$$

روش دیگر این است مشتقات $f^{(n)}(1)$ را بیابیم و از قضیه تیلور استفاده کنیم.

مثال. مقدار تقریبی e را بیابید.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

حل.

برای $x = 1$ داریم:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \cong 2.7182$$

واضح است هر چه تعداد جملات بیشتر شود، خطای محاسبه کمتر است.

مثال. مشتق مرتبه‌ی نهم تابع $f(x) = x^7 \sin x$ را در $x=0$ بیابید.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad \text{حل.}$$

$$x^7 \sin x = x^7 - \frac{x^{\Delta}}{3!} + \frac{x^{\nabla}}{5!} - \frac{x^9}{7!} + \dots$$

$$\frac{f^{(9)}(0)}{9!} = \frac{-1}{7!} \quad \text{از طرفی سری توانی} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{منحصر به فرد است. پس:}$$

$$f^{(9)}(0) = \frac{-9!}{7!} = -72 \quad \text{بنابراین:}$$

مثال. انتگرال $\int e^{-x^2} dx$ را به صورت سری بیابید.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{حل.}$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

$$\int e^{-x^2} dx = c + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5 \times 2!} - \frac{x^7}{7 \times 3!} + \dots$$

سری دو جمله‌ای

فرض کنید m عددی حقیقی و $f(x) = (1+x)^m$ با استفاده از سری مک لوران بدست می‌آید:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots, |x| < 1$$

تساوی بالا را سری دو جمله‌ای می‌نامند.

حالت خاص. اگر m عددی طبیعی باشد از سری دو جمله‌ای داریم:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + x^m$$

در تساوی بالا اگر قرار دهیم $x = \frac{b}{a}$ بسط دو جمله‌ای زیر بدست می‌آید:

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2!} a^{m-2} b^2 + \dots + b^m$$

سری‌ها ۱۴۱

مثال. سری مک لوران تابع $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ بیابید.

حل: $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ ، سری دو جمله‌ای را با $m = -\frac{1}{2}$ محاسبه می‌کنیم.

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \dots, |x| < 1$$

بنابراین:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \times 3}{2 \times 4}x^2 - \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}x^3 + \dots, |x| < 1$$

مثال. با استفاده از سری‌ها $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x - \sin x}{x^3}$ را بیابید.

حل.

$$xe^x = x(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + R(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + Q(x)$$

$R(x)$ و $Q(x)$ باقیمانده سریها با درجه‌ی چهارهستند.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \frac{1}{2}x^3 + (R(x) - Q(x))}{x^3} = +\infty + \frac{1}{2} + 0 = +\infty$$

۶- تمرینات فصل هشتم

همگرایی دنباله‌های زیر را بررسی کنید:

$$a_n = \frac{n^2+3}{2n+4} \quad -1$$

$$a_n = \frac{\cos^n(n)}{2^n} \quad -2$$

$$a_n = n^2 e^{-n} \quad -3$$

$$\frac{-2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots \quad -4$$

۵- دنباله‌ی $\{a_n\}$ با $a_1 = \sqrt{2}$ و $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ تعریف شده است. این دنباله صعودی و کراندار است. حد این دنباله را بیابید.

۶- دنباله $\{a_n\}$ با $a_1 = 2$ و $a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$ نزولی و کراندار است حد این دنباله را پیدا کنید.

۱۴۲ فصل هشتم

جمع سری‌های زیر را بیابید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n \quad -۷$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \quad -۸$$

$$\frac{-1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots \quad -۹$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad -۱۰$$

نشان دهید سری‌های زیر واگرا هستند.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 4}{5n^2 - 1} \quad -۱۱$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\cos(n\pi)} \quad -۱۲$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{n}\right) \quad -۱۳$$

با استفاده از آزمون‌ها، همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5} \quad -۱۴$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)} \quad -۱۵$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 4} \quad -۱۶$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^2 + 3} \quad -۱۷$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n + 1} \quad -۱۸$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n-1} \quad -۱۹$$

سری‌ها ۱۴۳

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n!} - 20$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n} - 21$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} - 22$$

۲۳- ثابت کنید اگر $a_n \geq 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ نیز همگرا است.

شعاع همگرایی و دامنه همگرایی سری های زیر را بیابید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-4)^n - 24$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} (x+1)^n - 25$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n - 26$$

۲۷- فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$ و هر دو سری روی یک فاصله‌ی شامل a همگرا باشند. نشان دهید $a_n = b_n$

۲۸- سری توانی تابع $\frac{1}{x}$ را حول نقطه $x = -2$ بیابید.

۲۹- نشان دهید سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ در معادله‌ی دیفرانسیل $y' + y = 0$ صدق می‌کند.

۳۰- نشان دهید سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ در معادله‌ی دیفرانسیل $x y'' + y' - y = 0$ صدق می‌کند.

۳۱- با استفاده از بسط تابع $\frac{1}{1+x}$ و مشتق‌گیری، تابع $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$ را حول نقطه‌ی $x = 0$ بسط دهید.

۱۴۴ فصل هشتم

انتگرال های زیر را به صورت سری بنویسید.

$$\int \frac{x}{1-x^6} dx \quad - ۳۲$$

$$\int \tan^{-1}(x^2) dx \quad - ۳۲$$

$$\int \cos(\sqrt{x}) dx \quad - ۳۳$$

$$\int \frac{\sinh x}{x} dx \quad - ۳۴$$

سری تیلور توابع زیر را حول نقطه ی داده شده بیابید.

$$f(x) = e^{3x} \quad , \quad x = 0 \quad - ۳۵$$

$$f(x) = \sin(\pi x) \quad , \quad x = 0 \quad - ۳۶$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \quad , \quad x = 1 \quad - ۳۷$$

$$f(x) = \cos^2 x \quad , \quad x = 0 \quad - ۳۸$$

۳۹- مشتق مرتبه ی دهم تابع $f(x) = x^6 e^x$ را در نقطه ی $x = 0$ بیابید.

۴۰- مشتق مرتبه ی هشتم تابع $f(x) = \tan^{-1} x$ را در نقطه ی $x = 0$ بیابید.

با استفاده از سری دو جمله ای، بسط توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad - ۴۱$$

$$f(x) = (1-x)^{-2} \quad - ۴۲$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} \quad - ۴۳$$

۴۴- با استفاده از بسط تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ، سری مک لوران توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sin^{-1} x \quad \text{الف} \quad f(x) = \sinh^{-1} x \quad \text{ب}$$

۴۵- با استفاده از سری ها، حدود زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \quad \text{ب} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x - \sin x}{x^3} \quad \text{الف}$$

کتابنامه

- ۱- آدامز، رابرت: حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمه سید حسین اورعی، مشهد: انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ۱۳۸۸
- ۲- استیوارت، ایان؛ تال، دیوید: مبانی ریاضیات، ترجمه محمد مهدی ابراهیمی، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵
- ۳- استوارت، جیمز: حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمه ارشک حمیدی، تهران: موسسه فرهنگی فاطمی، ۱۳۸۸
- ۴- اعتمادزاده، محمد هاشم: ریاضیات (۱) و مسایل آن، سبزوار: انتشارات بیهق، ۱۳۸۵
- ۵- سیلورمن، ریچارد: حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ترجمه علی اکبر عالم زاده، تهران: انتشارات علمی و فنی، ۱۳۶۸
- ۶- شهشهانی، سیاوش: حساب دیفرانسیل و انتگرال، تهران: انتشارات فاطمی، ۱۳۸۹
- ۷- لیتهلد، لوئیس: حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ترجمه علی اکبر عالم زاده، تهران: موسسه نشر علوم نوین، ۱۳۷۰