

بسم الله الرحمن الرحيم

ریاضیات مقدماتی

مؤلف:

محمد هاشم اعتمادزاده

عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی - واحد سبزوار

فهرست مطالب

مقدمه	۵
فصل اول: مجموعه‌ها و اعداد	۷
مجموعه‌ها	۷
اعمال جبری روی مجموعه‌ها	۹
خواص جبری مجموعه‌ها	۱۰
مجموعه اعداد	۱۳
مجموعه اعداد حقیقی	۱۵
حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه	۱۷
تمرین	۱۷
فصل دوم: عبارت‌های جبری	۲۱
خواص توان‌ها	۲۱
چند خاصیت توان‌ها	۲۲
اعمال جبری روی اعداد گویا	۲۳
عبارت‌های جبری	۲۴
تقسیم دو چندجمله‌ای	۲۴
اتحادها	۲۶
معادله‌ی درجه اول	۳۰
نامعادله‌ی درجه اول	۳۱
معادله‌ی درجه دوم	۳۴
نامعادله‌ی درجه دوم	۳۶
تفکیک کسر به کسره‌های جزئی	۳۹
تمرین	۴۳
فصل سوم: قواعد شمارش	۴۷
مبانی شمارش	۴۷
معرفی چند نماد	۴۹
تمرین	۵۳

فصل چهارم: خواص اعداد صحیح ۵۵

- استقراء ریاضی ۵۵
- بخش پذیری و اعداد اول ۵۶
- همنهشتی ها ۵۹
- تمرین ۶۱

فصل پنجم: ماتریس و دترمینان ۶۳

- ماتریس ها ۶۳
- ضرب دو ماتریس ۶۷
- دترمینان ماتریس مربع ۷۰
- دترمینان ماتریس 3×3 ۷۱
- خواص دترمینان ۷۳
- معکوس يك ماتریس مربع ۷۵
- تمرین ۷۸

فصل ششم: دستگاه معادلات خطی ۸۱

- دستگاه معادلات خطی ۸۱
- حل دستگاه مربع به روش ماتریسی ۸۲
- حل دستگاه به روش کرامر ۸۴
- حل دستگاه به روش حذفی گاوس ۸۶
- تمرین ۹۱

فصل هفتم: مثلثات ۹۳

- زاویه ۹۳
- مقادیر مثلثاتی ۹۴
- چند رابطه مثلثاتی ۹۵
- معادلات ساده مثلثاتی ۹۹
- تمرین ۱۰۲
- معمای تقسیم ۱۷ شتر ۱۰۳
- منابع ۱۰۵

فهرست نمودار و جدول

فصل اول: مجموعه‌ها و اعداد	۷
نمودار اجتماع.....	۹
نمودار اشتراک	۹
نمودار تفاضل	۹
نمودار متمم	۱۰
نمودار مثال.....	۱۲
نمودار مربع واحد	۱۴
فصل دوم: عبارت‌های جبری	۲۱
جدول تعیین علامت درجه اول	۳۱
جدول تعیین علامت درجه دوم.....	۳۷
فصل سوم: قواعد شمارش	۴۷
نمودار مثال اصل ضرب	۴۷
نمودار مثال اصل جمع	۴۷
نمودار ترکیب تعمیم یافته	۵۳
فصل هفتم: مثلثات	۹۳
اندازه زاویه روی دایره	۹۳
دایره مثلثاتی	۹۴
مثلث قائم الزاویه	۹۵
جدول مثلثاتی	۹۵
نمودار طول ستون	۱۰۱
نمودار قبله	۱۰۱
نمودار تمرین ۹.....	۱۰۳

مقدمه

این کتاب برای دانشجویان علوم انسانی تألیف شده و هدف از آن یادآوری و افزایش توان محاسبات پایه ریاضی می باشد. این مباحث شامل مجموعه اعداد، قواعد شمارش، خواص اعداد صحیح، عبارتهای جبری، ماتریس، دترمینان، حل دستگاه خطی و مثلثات است. از تمام عزیزانی که در تهیه و انتشار کتاب تلاش نموده اند تشکر و قدردانی می کنم. و امید است مشمول فضل و رحمت و هدایت به صراط مستقیم حق تعالی باشیم.

محمد هاشم اعتمادزاده

زمستان ۱۴۰۰

فصل اول

مجموعه‌ها و اعداد

مجموعه یکی از مفاهیم اولیه‌ی ریاضی است، و به طور وسیعی در شاخه‌های گوناگون ریاضی استفاده می‌شود. در ریاضیات مقدماتی مجموعه اعداد در بیان مفاهیم نقش دارند. مثلاً جواب یک نامعادله معمولاً فاصله‌ای در مجموعه اعداد حقیقی است. ولی شمارش تعداد حالات ممکن در حوزه اعداد طبیعی است.

مجموعه‌ها

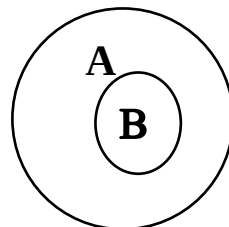
تعریف: یک مجموعه دسته‌ای از اشیاء است که اعضای آن معین و متمایز باشد. مثلاً اعداد فرد صحیح بین ۴ و ۲۵ یک مجموعه است. (اعضاء مشخص و متمایز است). و یا دانشجویان یک دانشگاه یک مجموعه است؛ ولی دسته‌ای اعداد خیلی بزرگ یک مجموعه نیست. (اعضای آن مشخص نیستند). همانطور می‌دانیم معمولاً مجموعه‌ها را با حروف بزرگ نمایش می‌دهند.

$$A = \{۲, ۵, ۸, -۱\} \quad , \quad B = \{*, \bigcirc, ۳\}$$

$$۵ \in A \quad , \quad ۱۱ \notin A \quad , \quad * \in B$$

تعریف: فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. گوئیم B زیرمجموعه A است؛ هرگاه هر عضو B یک عضو A هم باشد و آن را با علامت $B \subseteq A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر:

$$B \subseteq A \Leftrightarrow x \in B \Rightarrow x \in A$$



مثلاً مجموعه دانشجویان یک کلاس زیرمجموعه‌ی دانشجویان همان دانشگاه است.

تعریف: دو مجموعه را مساوی می‌نامند هرگاه اعضای یکسان داشته باشند.

به طور معادل:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$$

معمولاً برای اثبات تساوی دو مجموعه از گزاره سمت راست استفاده می‌شود.

مجموعه‌ای را که هیچ عضوی ندارد، مجموعه تهی می‌نامند و به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\emptyset = \{ \}$$

واضح است:

$$\emptyset \subseteq A$$

در بعضی موارد اعضای یک مجموعه را با شرایطی می‌توانیم محدود کنیم. مثلاً اگر

$$A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$$

مجموعه B را به صورت زیر تصریح می‌کنیم:

$$B = \{x \in A \mid x \text{ فرد باشد}\}$$

واضح است که:

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

معمولاً در یک مبحث، مجموعه‌ای را اختیار می‌کنیم که مجموعه‌های دیگر زیرمجموعه‌های آن باشند که آن را مجموعه مرجع می‌نامند و معمولاً آن را با M یا U نمایش می‌دهند.

واضح است که هرگاه M مجموعه مرجع باشد، همواره $A \subseteq M$ است.

توجه: اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر 2^n است.

مثلاً اگر A مجموعه ۳ عضوی باشد، به تعداد $2^3 = 8$ زیرمجموعه دارد.

تعریف: اگر A یک مجموعه باشد، مجموعه تمام زیرمجموعه‌های A را با $P(A)$ (مجموعه توانی A) نشان می‌دهند.

معمولاً برای نوشتن زیرمجموعه‌های یک مجموعه بهتر است ابتدا تهی، سپس تک‌عضوی‌ها و بعد دو‌عضوی‌ها و آخر خود مجموعه A

را بنویسیم.

مثال: مجموعه توانی مجموعه‌های زیر را بیابید.

$$A = \{2, 5\}$$

(الف)

حل:

$$P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, A\}$$

واضح است که $P(A)$ ، $2^2 = 4$ عضوی است.

$$B = \{\emptyset, \varepsilon\}$$

(ب)

حل:

$$P(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\varepsilon\}, B\}$$

توجه داریم که $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ زیرا $\emptyset$ مجموعه بدون عضو است ولی $\{\emptyset\}$ یک مجموعه تک‌عضوی است.

$$C = \{3, \{3\}\}$$

(ج)

حل:

$$P(C) = \{\emptyset, \{3\}, \{\{3\}\}, C\}$$

واضح است که:

$$\{3\} \neq \{\{3\}\}, \text{ زیرا } 3 \neq \{3\}$$

توجه: اگر A یک مجموعه باشد، اعضای $P(A)$ همواره مجموعه هستند، بنابراین گزاره $2 \in P(A)$ برای هر مجموعه A نادرست است.

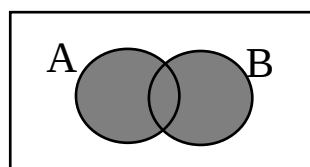
اعمال جبری روی مجموعه‌ها

فرض کنید M مجموعه مرجع و A و B دو مجموعه باشند.

الف) اجتماع دو مجموعه:

$$A \cup B = \{x \in M \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

در واقع اجتماع، قرار دادن دو مجموعه در یک مجموعه بزرگ‌تر است (بدون اعضای تکراری).

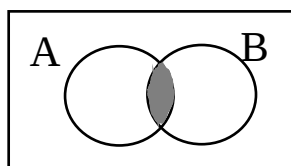


نمودار وِن

$$A \cup B$$

ب) اشتراک دو مجموعه:

$$A \cap B = \{x \in M \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

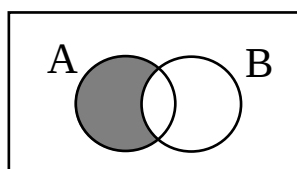


$$A \cap B$$

ج) تفاضل دو مجموعه:

$$A - B = \{x \in M \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

بنابه تعریف هرگاه $x \in A - B$ باشد، x داخل A هست و داخل B نیست.

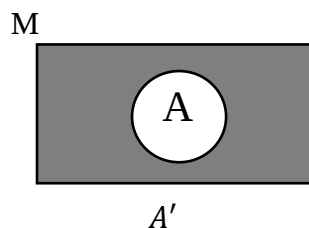


$$A - B$$

(د) متمم مجموعه A:

$$A' = \{x \in M | x \notin A\}$$

اعضای A' در M هستند ولی در A نیستند.



مثال: اگر $M = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$

$A = \{۲, ۴, ۶\}$ ، $B = \{۱, ۳, ۴, ۶\}$ و $C = \{۴, ۵, ۸\}$ موارد زیر را بیابید.

(الف) $A \cup B'$

حل:

$$B' = \{۲, ۵, ۷, ۸\}$$

$$A \cup B' = \{۲, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$$

(ب) $(A \cap B)'$

حل:

$$A \cap B = \{۴, ۶\}$$

$$(A \cap B)' = \{۱, ۲, ۳, ۵, ۷, ۸\}$$

(ج) $A - B'$

حل:

$$B' = \{۲, ۵, ۷, ۸\}$$

$$A - B' = \{۴, ۶\}$$

(د) $(A \cup B \cup C)'$

حل:

$$(A \cup B \cup C) = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۸\}$$

$$(A \cup B \cup C)' = \{۷\}$$

خواص جبری مجموعه‌ها

خاصیت جابجایی:

$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$

خاصیت شرکت پذیری:

$$\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{cases}$$

خاصیت پخش پذیری:

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

قانون دمورگان:

$$\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$$

با استفاده از این قوانین روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} A - B = A \cap B' \\ (A')' = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cup A' = M \\ A \cap A' = \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cup M = M \\ A \cap M = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cup \emptyset = A \\ A \cap \emptyset = \emptyset \end{cases}$$

سؤال: اگر $A \subseteq B$ آیا $P(A) \subseteq P(B)$ است؟

حل: با یک مثال این سوال را تحقیق می‌کنیم:

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$$

$$P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, B\}$$

دیده می‌شود که:

$$P(A) \subseteq P(B)$$

در واقع می‌توان ثابت کرد این گزاره همواره درست است.

مثال: با یک مثال تساوی زیر را تحقیق کنید.

$$A - B = A \cap B'$$

حل: قرار می‌دهیم: $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$B = \{3, 4, 5, 6\} \quad \text{و} \quad A = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$A - B = \{2\} \quad (۱)$$

$$B' = \{1, 2\}, \quad A \cap B' = \{2\} \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) مشاهده می‌شود:

$$A - B = A \cap B'$$

معمولاً اثبات تساویها و گزاره‌ها در مجموعه‌ها به سه روش انجام می‌شود:

(۱) روش نمودار وِن

(۲) روش جبری

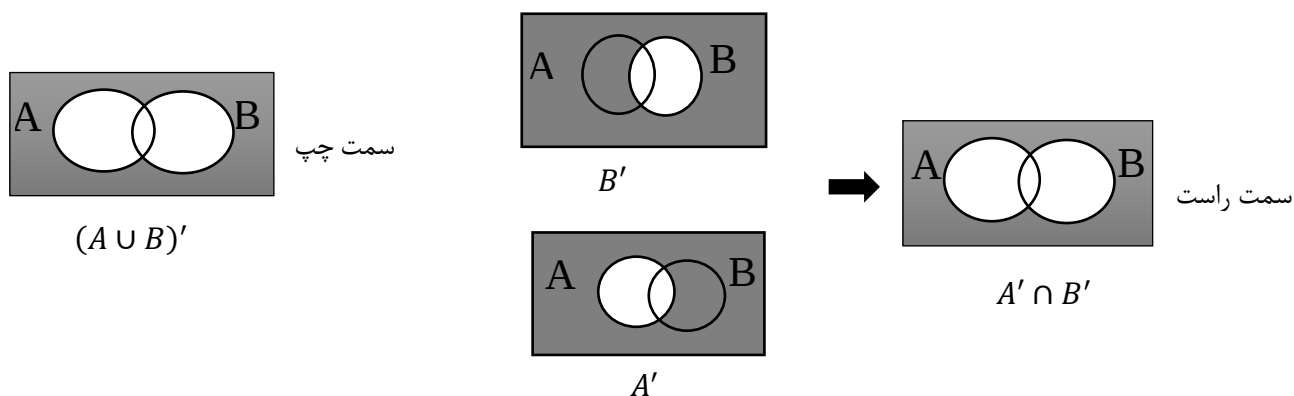
(۳) روش عضوگیری

در اینجا فقط دو روش اول را بیان می‌کنیم.

(۱) روش نمودار وِن

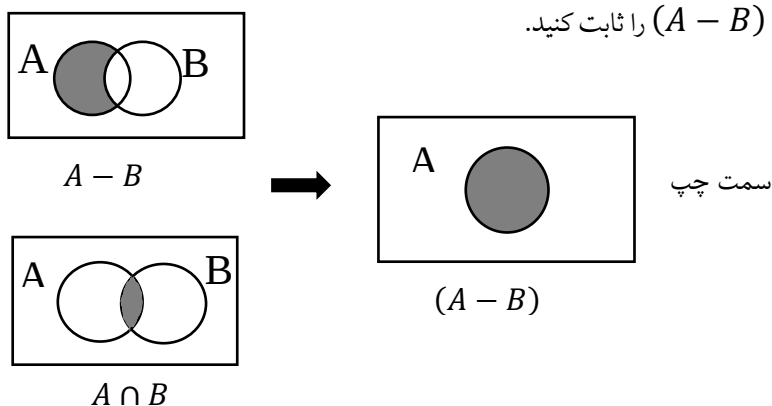
در روش نمودار وِن کافی است برای هریک از طرفین تساوی یک نمودار رسم کنیم و آنها را هاشور بزنیم. اگر هاشورها یکسان باشند، تساوی برقرار است.

مثال: تساوی $(A \cup B)' = A' \cap B'$ را به روش نمودار وِن ثابت کنید.



در واقع $A' \cap B'$ قسمت مشترک دو شکل قبل است. اکنون دیده می‌شود که سمت چپ و سمت راست هاشور یکسان دارند.

مثال: تساوی $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ را ثابت کنید.



واضح است که سمت چپ با سمت راست برابر است.

۲) روش جبری

در این روش خواص جبری و نتایج آن برای اثبات تساوی‌ها استفاده می‌شود.

مثال: ثابت کنید.

$$A \cap (A' \cup B) = A \cap B$$

اثبات: از سمت چپ شروع می‌کنیم.

$$A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

مثال: تساوی زیر را ثابت کنید.

$$B \cup (A - B) = A \cup B$$

اثبات: از سمت چپ شروع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} B \cup (A - B) &= B \cup (A \cap B') = (B \cup A) \cap (B \cup B') \\ &= (B \cup A) \cap M = B \cup A = A \cup B \end{aligned}$$

مجموعه اعداد

به طور اجمال عدد مقداری است که به کمیت‌ها نسبت می‌دهیم.

مجموعه اعدادی که شمارش با آنها انجام می‌شود، مجموعه اعداد طبیعی نام دارد.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

مثال: اعضای مجموعه‌های زیر را بیابید.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 25\} = \{5\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 5 < 10\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$C = \{\sqrt{x^2 + 1} \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 3\} = \{\sqrt{5}, \sqrt{10}\}$$

مجموعه اعداد صحیح را با $\mathbb{Z}$ نشان می‌دهیم.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$$

مثال: اعضای مجموعه‌های زیر را بیابید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 25\} = \{\pm 5\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 5 < 10\} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

سوال: واضح است که $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ هر دو بی‌نهایت عضو دارند و $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ است. آیا تعداد اعضای $\mathbb{Z}$ از $\mathbb{N}$ بیشتر است؟

جواب: خیر تعداد اعضای آنها برابر است.

مجموعه اعداد گویا را با Q نمایش می‌دهیم.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$\frac{3}{5} \in Q, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \in Q, \quad 0 = \frac{0}{1} \in Q, \quad 0.251 = \frac{251}{1000} \in Q, \quad 2/2\varepsilon = \frac{224}{100} \in Q$$

داریم:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq Q$$

مثال: اعضای مجموعه‌های زیر را بیابید.

$$A = \left\{ x \in Q \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + \varepsilon) = 0 \right\}$$

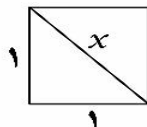
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + \varepsilon) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ x + \varepsilon = 0 \Rightarrow x = -\varepsilon \end{cases}$$

پس:

$$A = \left\{ \frac{1}{2}, -\varepsilon \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + \varepsilon) = 0 \right\} = \emptyset$$

مربعی به طول واحد در نظر می‌گیریم، بنا به رابطه فیثاغورس:



$$x^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow x^2 = 2$$

می‌توان ثابت کرد x عددی گویا نیست (تبدیل به کسر نمی‌شود).

این نوع اعداد را که گویا نیستند، اعداد **گنگ** می‌نامند و آن را با Q' نشان می‌دهیم.

توجه. اگر تعداد اعشار یک عدد متناهی باشد، به کسر تبدیل می‌شود.

$$25/271 = \frac{25271}{1000} \in Q$$

مثال: عدد $2/\sqrt{3}$ گنگ است یا گویا؟

حل: یادآوری می‌شود:

$$2/\sqrt{3} = 2/333 \dots$$

قرار می‌دهیم:

$$x = 2/\sqrt{3}$$

طرفین را در ۱۰ ضرب می‌کنیم:

$$10x = 23/\overline{3}$$

داریم:

$$10x - x = 23/\overline{3} - 2/\overline{3} = 21 \Rightarrow 9x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{9}$$

پس:

$$2/\overline{3} = \frac{21}{9} \in Q$$

مثال: آیا عدد $1/2\overline{5}$ گویا است؟

حل: قرار می‌دهیم:

$$x = 1/2\overline{5}$$

یک بار طرفین را در ۱۰ و یک بار در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم:

$$10x = 12/\overline{5}$$

$$100x = 125/\overline{5}$$

داریم:

$$100x - 10x = 125/\overline{5} - 12/\overline{5} \Rightarrow 90x = 113 \Rightarrow x = \frac{113}{90} \in Q$$

بنابراین:

$$1/2\overline{5} = \frac{113}{90} \in Q$$

نکته مهم: اعداد اعشاری که تعداد اعشار آنها متناهی و یا دوره گردش داشته باشند، اعداد گویا و سایر اعداد گنگ هستند.

می‌توان ثابت کرد اگر n عددی صحیح نباشد، آنگاه $\sqrt{n}$ گنگ است.

اعداد زیر گنگ هستند:

$$\sqrt{2} = 1/4142 \dots \in Q'$$

$$0/24681012 \dots \in Q'$$

$$\pi = 3/1415 \dots \in Q'$$

$$\sqrt[3]{5} = 1/709 \dots \in Q'$$

$$e = 2/7182 \dots \in Q'$$

$$\sqrt[4]{3} = 1/316 \dots \in Q'$$

مجموعه اعداد گنگ نامتناهی است و می‌توان ثابت کرد تعداد اعداد آنها از اعداد گویا بیشتر است.

مجموعه اعداد حقیقی

مجموعه اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{R} = Q \cup Q'$$

هر کمیت، مقداری گویا یا گنگ است. بنابراین هر عددی، حقیقی می‌باشد.

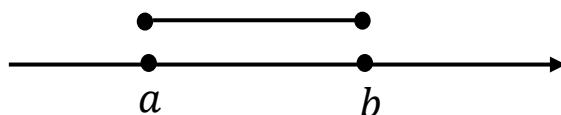
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq Q \subseteq \mathbb{R}$$

تا اینجا $\mathbb{R}$ بزرگ‌ترین مجموعه اعدادی است که تعریف کرده‌ایم.

فاصله در اعداد حقیقی:

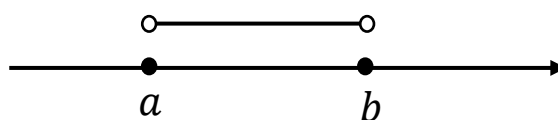
فاصله بسته:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$



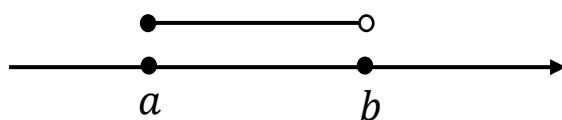
فاصله باز:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$



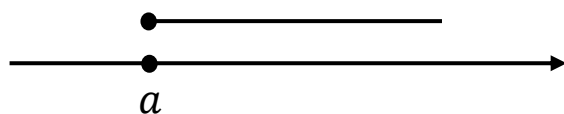
فاصله نیمه باز:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$



فاصله بی کران:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$$



مثال: عبارتهای زیر ساده شده اند.

$$[2, 4] \cup (3, 6) = [2, 6) \quad \text{(الف)}$$

$$(-\infty, 3) \cap [-1, 4] = [-1, 3) \quad \text{(ب)}$$

$$[1, 4] - [2, 5] = [1, 2) \quad \text{(ج)}$$

$$[-1, 2)' = (-\infty, -1) \cup [2, +\infty) \quad \text{(د)}$$

$$[-3, 4] \cap (1, 5] \cap [4, 7] = \{4\} \quad \text{(ه)}$$

حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند، حاصل ضرب دکارتی آنها به صورت زیر است:

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

هر عضو $A \times B$ به صورت زوج مرتب (a,b) است و داریم:

$$(a,b) \neq (b,a)$$

مثال: اگر $A = \{۱, ۲\}$ و $B = \{۰, ۲, ۴\}$ موارد زیر را بیابید.

$$A \times B \quad (\text{الف})$$

$$A \times B = \{(۱, ۰), (۱, ۲), (۱, ۴), (۲, ۰), (۲, ۲), (۲, ۴)\}$$

$$A \times A \quad (\text{ب})$$

$$A \times B = \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۲, ۱), (۲, ۲)\}$$

مثال: اعضای مجموعه زیر را تعیین کنید.

$$A = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{N}, x+y=۵\} = \{(۱, ۴), (۴, ۱), (۲, ۳), (۳, ۲)\}$$

نکته: اگر A مجموعه n عضوی و B مجموعه m عضوی باشد، آنگاه $A \times B$ مجموعه $n \times m$ عضوی است.

مثال: اگر $A = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰\}$ و $B = \{۲, ۴, ۱۰, ۱۴\}$ آنگاه مجموعه

$$(A \cap B) \times B$$

حل: $A \cap B = \{۲, ۴, ۱۰\}$ ۳ عضوی و B مجموعه ۴ عضوی است. پس

$$(A \cap B) \times B$$

تمرین

۱- مجموعه توانی مجموعه‌های زیر را تعیین کنید.

$$B = \{۱, \{۱\}\} \quad (\text{ب})$$

$$A = \{۰, ۴\} \quad (\text{الف})$$

$$D = \{\{۳\}\} \quad (\text{د})$$

$$C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \quad (\text{ج})$$

۲- اگر $A = \{۵\}$ ، $P(P(A))$ را بیابید.

$$M = \{۱, ۲, \dots, ۷\} \quad \text{اگر } ۳-$$

$A = \{۲, ۳, ۴\}$ ، $B = \{۱, ۳, ۵\}$ و $C = \{۳, ۴, ۷\}$ موارد زیر را بیابید.

$$A' \cup B \quad (\text{ب})$$

$$A - B \quad (\text{الف})$$

$$A \cup (B \cap C) \quad (\text{د})$$

$$(A \cap B) - C \quad (\text{ب})$$

۴- روابط زیر را با یک مثال تحقیق کنید.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\text{الف})$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad (\text{ب})$$

۵- با یک مثال تساوی زیر را تحقیق کنید.

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

۶- با یک مثال نشان دهید تساوی زیر درست نیست.

$$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$$

۷- تساوی‌های زیر را با نمودار ون ثابت کنید.

$$A - B = A \cap B' \quad (\text{الف})$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad (\text{ب})$$

$$A \cup (A' \cap B) = A \cup B \quad (\text{ج})$$

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) \quad (\text{د})$$

۸- تساوی‌های زیر را با روش جبری ثابت کنید.

$$(A - B) \cup B = A \cup B \quad (\text{الف})$$

$$A - B' = A \cap B \quad (\text{ب})$$

$$(A \cap B) \cup (B - A) = B \quad (\text{ج})$$

$$A' \cup (A \cap B) = A' \cup B \quad (\text{د})$$

۹- اعضای مجموعه‌های زیر را بیابید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \leq x + 4 \leq 10\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 16 \leq x^2 \leq 32\}$$

$$D = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x^2 + y^2 \leq 8\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 7 \leq 0\}$$

۱۰- کدام یک از اعداد زیر گنگ هستند؟

$$17/\sqrt{17} \quad (\text{ب})$$

$$127/251 \quad (\text{الف})$$

$$\sqrt[3]{9} \quad (\text{د})$$

$$0.010010001 \dots \quad (\text{ج})$$

۱۱- اعداد زیر را به کسر تبدیل کنید.

$$2/\sqrt{13} \quad (\text{ج})$$

$$1/\sqrt{2} \quad (\text{ب})$$

$$0/\sqrt{8} \quad (\text{الف})$$

۱۲- عبارت‌های زیر را بدست آورید.

(الف) $(-\infty, \varepsilon] \cap [-\varepsilon, +\infty)$

(ب) $[1, \varepsilon] - (-1, 2)$

(ج) $\mathbb{N} \cap (-\varepsilon, \varepsilon)$

(د) $(-\infty, 5] \cup (2, \varepsilon]$

(ه) $([1, 3] \cap (2, 5]) \cup (3, 6]$

۱۳- چند عضو مجموعه $\{-2\} \times \mathbb{N}$ را بنویسید.

۱۴- اگر A مجموعه ۷ عضوی باشد:

(الف) $A \times A$ چند عضو دارد؟

(ب) $A \times A$ چند زیر مجموعه دارد؟

یادداشت

فصل دوم

عبارت‌های جبری

عبارت‌های جبری، اتحادها، حل معادلات و نامعادلات معمولاً در محاسبات ریاضی عمومی استفاده می‌شوند. در این فصل با این مفاهیم آشنایی خواهیم داشت.

خواص توان‌ها

فرض کنید a عددی حقیقی باشد. داریم:

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a$$

همچنین:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n$$

می‌توانیم توان‌ها را به نمادهای منفی گسترش دهیم.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

تعریف: ریشه n ام یک عدد حقیقی:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \quad (\text{اگر } n \text{ زوج باشد، } a \text{ مثبت است.})$$

فرض کنید $m, n \in \mathbb{N}$ تعریف توان کسری:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

چند مثال:

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

$$\sqrt{125} = \sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$$

$$(3)^{-5} = \frac{1}{3^5}$$

چند خاصیت توان‌ها
فرض کنید $n, m \in \mathbb{Z}$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, a > 0$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n, a, b \in \mathbb{R}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

این خواص حتی اگر $m, n \in \mathbb{Q}$ باشند نیز برقرار است؛ بنابراین:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt[n]{b^n a} = b \sqrt[n]{a} \quad (\text{اگر } n \text{ زوج باشد، } b \text{ مثبت است.})$$

چند مثال:

$$\frac{2^0}{4^3} = \frac{2^0}{(2^2)^3} = \frac{2^0}{2^6} = \frac{1}{2^6}$$

$$\sqrt{3}\sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{3^2} \times 3} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{-2}{\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}} = -2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$$(\sqrt[5]{81})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{(\sqrt[5]{81})^5} = (\sqrt[5]{81})^1 = \sqrt[5]{81}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[5]{20}}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{20}} = \sqrt[5]{20}$$

مثال: عبارت زیر را ساده کنید.

$$a = 2\sqrt{20} - \sqrt{18} + 3\sqrt{5} + \sqrt{50}$$

حل:

$$a = 2\sqrt{4 \times 5} - \sqrt{9 \times 2} + 3\sqrt{5} + \sqrt{25 \times 2}$$

$$a = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{5} + 5\sqrt{2} = 7\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$$

اعمال جبری روی اعداد گویا

جمع و تفاضل:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

ضرب اعداد گویا:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

تقسیم اعداد گویا:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \end{array} \right.$$

توجه: برای جمع یا تفاضل چند کسر می‌توان آنها را دو به دو و یا با اختیار یک مخرج مشترک (بهتر است کوچک‌ترین باشد) آنها را محاسبه کرد.

$$\frac{2}{4} - \frac{3}{8} = \frac{16 - 12}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{6} - \frac{3}{5} = \frac{10 + 10 - 18}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{10} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{10} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

◀ عبارت‌های جبری

هریک از عبارت‌های زیر را یک عبارت جبری می‌نامند.

$$\frac{x^r + \varepsilon}{x}, \quad x^r - 2x + 1, \quad xy^r - y - x, \quad \sqrt{x^r - 1}$$

برای جمع یا تفاضل عبارت‌های جبری، جملات متشابه را با هم ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright & (-2x^r + 5xy - y^r) + (-2y^r + xy^r + 5x^r) \\ &= 3x^r + 5xy + x^ry - 3y^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright & \left(y^\varepsilon + \frac{r}{x^r} + xy\right) - \left(-y^\varepsilon + \frac{r}{x^r} - x^ry\right) \\ &= 2y^\varepsilon - \frac{1}{x^r} + xy + x^ry \end{aligned}$$

برای ضرب عبارت‌های جبری، از خاصیت توزیع‌پذیری استفاده می‌کنیم.

چند مثال:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright & (1 - x + x^r)(2x + \varepsilon) \\ &= 2x + \varepsilon - 2x^r - \varepsilon x + 2x^r + \varepsilon x^r = 2x^r + 2x^r - 2x + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright & (x - 1)(y + 2)(x + y) \\ &= ((x - 1)(y + 2))(x + y) = (xy + 2x - y - 2)(x + y) \\ &= x^ry + xy^r + 2x^r + xy - y^r - 2x - 2y \quad (\text{ساده شده}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x^r} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x(x-1) + 2(x-1) + x^r(x+1)}{x^r(x-1)}$$

$$= \frac{x^r - x + 2x - 2 + x^r + x^r}{x^r(x-1)} = \frac{x^r + 2x^r + x - 2}{x^r(x-1)}$$

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^r+1}{x^r-1}} = \frac{1}{x} \times \frac{x^r-1}{x^r+1} = \frac{x^r-1}{x(x^r+1)}$$

تقسیم در چندجمله‌ای: برای تقسیم دو چندجمله‌ای، خارج‌قسمت را طوری انتخاب می‌کنیم که بزرگ‌ترین درجه مقسوم حذف شود.

مثال: تقسیم کنید.

$$\begin{array}{r}
 x^3 + x^2 - 1 \quad |x + 3 \\
 \underline{-x^3 - 3x^2} \\
 -2x^2 - 1 \\
 \underline{2x^2 + 6x} \\
 6x - 1 \\
 \underline{-6x - 18} \\
 -19
 \end{array}$$

* هر عبارت که به پایین منتقل شود، علامت آن عوض می‌شود.

مثال: نشان دهید $x^3 + 8$ بر $x + 2$ بخش پذیر است؟

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 8 \quad |x + 2 \\
 \underline{-x^3 - 2x^2} \\
 -2x^2 + 8 \\
 \underline{2x^2 + 4x} \\
 4x + 8 \\
 \underline{-4x - 8} \\
 0
 \end{array}$$

نکته: اگر مقدار $x = a$ یک چندجمله‌ای را صفر نماید، (ریشه آن باشد). آن چندجمله‌ای بر $(x - a)$ بخش پذیر است.

مثال: آیا $x^3 - x^2 - 4x + 2$ بر $x - 2$ بخش پذیر است؟

حل: روش اول: $x = 2$ ریشه چندجمله‌ای است. (به‌ازای $x = 2$ مقدار صفر می‌شود). پس $x^3 - x^2 - 4x + 2$ بر $(x - 2)$ بخش پذیر است.

روش دوم:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - x^2 - 4x + 2 \quad |x - 2 \\
 \underline{-x^3 + 2x^2} \\
 x^2 - 4x + 2 \\
 \underline{-x^2 + 2x} \\
 -2x + 2 \\
 \underline{2x - 4} \\
 -2
 \end{array}$$

پس:

$$\frac{x^3 - x^2 - 4x + 2}{x - 2} = x^2 + x + 2$$

مثال: آیا $x^{16} - 1$ بر $x + 1$ بخش پذیر است؟
 حل: $x = -1$ ریشه $x^{16} - 1$ است. پس $x^{16} - 1$ بر $(x + 1)$ بخش پذیر است.

مثال: آیا $x^5 - 2x + 5$ بر $(x - 1)$ بخش پذیر است؟
 حل: با محاسبه معلوم می شود که $x = 1$ ریشه $x^5 - 2x + 5$ نیست. پس $x^5 - 2x + 5$ بر $(x - 1)$ بخش پذیر نیست.

اتحادها

(۱) اتحاد مربع

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- ▶ $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$
- ▶ $(-x + 3)^2 = x^2 - 6x + 9$
- ▶ $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$
- ▶ $(x^3 - 1)^2 = x^6 - 2x^3 + 1$

* برای تبدیل عبارت $x^2 + bx + c$ به مربع کامل کافی است عبارت $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ را به معادله اضافه و کم کنیم.

مثال: معادلات زیر را به مربع کامل تبدیل و سپس آن را حل کنید.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{(الف)}$$

حل: داریم:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 3$$

$$(x - 2)^2 - 1 = 0 \quad \text{مربع کامل}$$

$$(x - 2)^2 = 1 \Rightarrow x - 2 = \pm 1$$

$$\Rightarrow x = 2 \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \quad \text{(ب)}$$

حل:

$$\begin{aligned}\left(\frac{b}{2}\right)^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \\ x^2 + 3x + 1 &= \left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 1 = 0 \\ \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} &= 0 \quad \text{مربع کامل} \\ x + \frac{3}{2} &= \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

ج) $2x^2 - 4x - 8 = 0$

حل: ابتدا از ۲ فاکتور می‌گیریم.

$$\begin{aligned}2(x^2 - 2x - 4) &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - 2x - 4 &= 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 - 4 = 0 \\ \Rightarrow (x - 1)^2 - 5 &= 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 5\end{aligned}$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$$

۲) اتحاد مزدوج

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

- ▶ $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$
- ▶ $-x^2 + 4 = 4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$
- ▶ $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$
 $= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$
- ▶ $y^2 - 5 = y^2 - (\sqrt{5})^2 = (y - \sqrt{5})(y + \sqrt{5})$

۳) اتحاد جمله مشترک

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

- ▶ $(x - 3)(x + 5) = x^2 + 2x - 15$
- ▶ $(2x^2 + 1)(2x^2 + 3) = 4x^4 + 4(2x^2) + 3$

مثال: با استفاده از اتحادها، عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

- ▶ $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$
- ▶ $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$
- ▶ $2x^2 + 4x - 6 = 2(x^2 + 2x - 3) = 2(x - 1)(x + 3)$
- ▶ $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$

مثال: ریشه معادلات زیر را بیابید.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$-x^2 + 2x + 8 = 0 \quad \text{(ب)}$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$$

(۴) اتحاد مکعب

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$$

$$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(x - 4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

$$(2x + 1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

مثال: ریشه‌های معادلات زیر را بیابید.

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{ریشه تکراری}$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \quad \text{(ب)}$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{ریشه تکراری}$$

در فصل‌های بعدی تعمیم اتحاد مکعب را می‌آوریم.

۵) اتحاد جمع یا تفاضل مکعب‌ها

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{cases}$$

مثال: تجزیه کنید.

- ▶ $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
- ▶ $x^3 + 1 = x^3 + 1^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$
- ▶ $27 - x^3 = 3^3 - x^3 = (3 - x)(9 + 3x + x^2)$
- ▶ $x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$
 $= (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$
 $= (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

۶) تعمیم تفاضل مکعب‌ها

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

۷) تعمیم جمع مکعب‌ها فرض کنید n عددی فرد باشد، در این صورت:

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

* در پرانتز دوم جملات یک‌درمیان منفی است.

چند مثال:

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^6 + 1 = (x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x + 1)$$

$$1 - x^6 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

مثال: فرمولی برای عبارت $(a + b + c)^2$ بیابید.

$$(a + b + c)^2 = ((a + b) + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$$

با ساده کردن داریم:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

مثال: محاسبه کنید.

$$(x - y + 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y$$

◀ معادله‌ی درجه اول

معادله $ax + b = 0$ را یک معادله درجه اول می‌نامند. جواب معادله به صورت زیر است:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{x+7}{4} + \frac{x-1}{6} = \frac{x+2}{3} \quad \text{(الف)}$$

حل:

$$\frac{x+7}{4} + \frac{x-1}{6} = \frac{3(x+7) + 2(x-1)}{12} = \frac{5x+19}{12}$$

پس:

$$\frac{5x+19}{12} = \frac{x+2}{3} \Rightarrow \frac{5x+19}{4} = \frac{x+2}{1} \\ 5x+19 = 4(x+2) \Rightarrow 5x-4x = 8-19 \Rightarrow x = -11$$

$$-6x + 4 = 3(-2x + 5) \quad \text{(ب)}$$

حل:

$$-6x + 4 = -6x + 15$$

پس:

$$-6x + 6x = 15 - 4 \Rightarrow 0 = 11$$

بنا به این تناقض معادله جواب ندارد.

$$x^3 - 9x = 0 \quad \text{(ج)}$$

$$x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x(x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+6} = x \quad \text{(د)}$$

$$(\sqrt{x+6})^2 = x^2 \Rightarrow x+6 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

عبارت‌های جبری ۳۱

$$\Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases} \text{ (در معادله صدق نمی‌کند) غیر قابل قبول}$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad (6)$$

حل:

$$\begin{aligned} (x^2)^2 - 5x^2 + 4 &= (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x-1} \quad (7)$$

حل:

$$(\sqrt{2x+1})^2 = (\sqrt{x-1})^2 \Rightarrow 2x+1 = x-1 \Rightarrow x = -2$$

این جواب غیر قابل قبول است. (زیر رادیکال منفی می‌شود.)

نامعادله‌ی درجه اول

چند خاصیت:

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

$$a < b \Rightarrow ac < bc, \quad c > 0$$

$$a < b \Rightarrow ac > bc, \quad c < 0$$

$$a < b, \quad c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

$$0 < a < b, \quad 0 < c < d \Rightarrow ac < bd$$

تعیین علامت معادله درجه اول

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

	$\frac{-b}{a}$
$ax + b$	مخالف علامت a موافق علامت a

مثال: نامعادله‌ی $(-x + 3)(2x + 4) \leq 0$ را حل کنید.

حل:

$$\begin{cases} -x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

	-۲		۳	
$-x + 3$	+	+	•	-
$2x + 4$	-	•	+	+
کل عبارت	-	+	-	-
	ج			ج

$$\text{جواب} \equiv (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$$

مثال: x را طوری بیابید که عبارت زیر رادیکال مثبت باشد.

$$\sqrt{\frac{4-x}{5x+10}}$$

$$\frac{4-x}{5x+10} \geq 0 \quad \text{حل: باید}$$

$$\begin{cases} 4-x = 0 \Rightarrow x = 4 \\ 5x+10 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

	-۲		۴	
$4-x$	+	+	•	-
$5x+10$	-	•	+	+
کل عبارت	-	+	-	-
		ج		

$$\text{جواب} \equiv (-2, 4]$$

مثال: نامعادله زیر را حل کنید.

$$\frac{1}{x+1} < \frac{-3}{2x+1}$$

حل:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2x+1} < 0 \Rightarrow \frac{2x+1+3x+3}{(x+1)(2x+1)} < 0.$$

$$\frac{5x+4}{(x+1)(2x+1)} < 0.$$

$$\begin{cases} 5x+4=0 & \Rightarrow x=-\frac{4}{5} \\ x+1=0 & \Rightarrow x=-1 \\ 2x+1=0 & \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

	-1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	
$5x+4$	-	-	+	+
$2x+1$	-	-	-	+
$x+1$	-	+	+	+
کل عبارت	-	+	-	+
	ج		ج	

$$\text{جواب} \equiv (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{4}{5}, -\frac{1}{2}\right)$$

مثال: کدام یک از دو عبارت زیر بزرگ‌تر است؟

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a+b} \quad , \quad a, b > 0.$$

حل:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} = a + b + 2\sqrt{ab} \quad (1)$$

$$(\sqrt{a+b})^2 = a + b \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

◀ معادله‌ی درجه دوم

شکل کلی معادله درجه دوم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

قرار می‌دهیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

الف) اگر $\Delta > 0$ ، معادله دو ریشه حقیقی دارد.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب) اگر $\Delta = 0$ ، معادله یک ریشه تکراری دارد.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

ج) اگر $\Delta < 0$ ، معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال: فرمول Δ را برای معادله درجه دوم ثابت کنید.

اثبات:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0$$

a را حذف و داخل پرانتز را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2} \right)^2 \right) + \frac{c}{a} - \left(\frac{\frac{b}{a}}{2} \right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \quad \text{مربع کامل}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (\Delta = b^2 - 4ac)$$

مثال: ریشه‌های معادلات زیر را بیابید.

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \text{(الف)}$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(4) = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{0}}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2 \Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{0}$$

$$x_2 = 2 - \sqrt{0} \quad \text{به طور مشابه:}$$

$$y^2 - 6y + 9 = 0 \quad \text{(ب)}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0 \quad \text{حل:}$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3 \quad \text{یک ریشه تکراری}$$

$$z^2 - 3z + 5 = 0 \quad \text{(ج)}$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 20 < 0 \quad \text{ریشه حقیقی ندارد.}$$

$$x^4 - x^2 - 2 = 0 \quad \text{(د)}$$

حل: قرار می‌دهیم: $t = x^2$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-2) = 9$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 3}{2} = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 3}{2} = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{غیرقابل قبول}$$

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{\xi} = 0$$

حل:

$$\frac{x^2 + x + \xi}{\xi x} = 0 \Rightarrow x^2 + x + \xi = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 16 < 0 \quad \text{معادله جواب ندارد.}$$

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 - 1}$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{x^2-1} &= \frac{x^2+8x+7}{x^2-1} \Rightarrow 3x+1 = x^2+8x+7 \\ \Rightarrow x^2+5x+6 &= 0 \Rightarrow (x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$x-1 = \sqrt{x+2}$$

حل:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= x+2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x+2 \\ x^2 - 3x - 1 &= 0 \\ \Delta &= b^2 - 4ac = 9 - 4(-1) = 13 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \\ x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad (\text{در معادله صدق نمی‌کند})$$

نامعادله‌ی درجه دوم

تعیین علامت معادله‌ی درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

الف) اگر $\Delta > 0$ ، معادله دو ریشه‌ی حقیقی مانند x_1 و x_2 دارد.

	x_1	x_2	
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

ب) اگر $\Delta = 0$ ، معادله یک ریشه حقیقی مانند x_1 دارد.

	x_1
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a موافق علامت a

ج) اگر $\Delta < 0$ ، معادله ریشه حقیقی ندارد.

$ax^2 + bx + c$	همواره موافق علامت a
-----------------	------------------------

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{-x^2 + x + 7}{x^2 + x + 2} \leq 0.$$

الف)

حل:

$$-x^2 + x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 29$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{29}}{-2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{29}}{-2}$$

$$x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(2) < 0.$$

	x_1	x_2
$-x^2 + x + 7$	-	+
$x^2 + x + 2$	+	+
کل عبارت	-	+
	ج	ج

$$\text{جواب} \equiv (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$$

$$\frac{-3-x}{x^2+2x+1} < -1 \quad (\text{ب})$$

حل:

$$\frac{-3-x}{x^2+2x+1} + \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+1} = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x+1} < 0.$$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow (x-1)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$x^2+2x+1=0 \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{ریشه تکراری}$$

	-2	-1	1	
x^2+x-2	+	-	-	+
x^2+2x+1	+	+	+	+
کل عبارت	+	-	-	+

$$\text{جواب} \equiv (-2, 1) - \{-1\}$$

ج) x را طوری بیابید که زیر رادیکال مثبت شود.

$$\sqrt{(x^2+1)(x^2-1)}$$

حل: باید

$$(x^2+1)(x^2-1) \geq 0$$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

$$x^2+1=0 \Rightarrow \Delta < 0$$

	-1	1	
x^2-1	+	-	+
x^2+1	+	+	-
کل عبارت	+	-	+

$$x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

مثال: m را طوری بیابید که نامعادله‌ی زیر همواره درست باشد.

$$x^2 - mx + (m + 1) > 0 \quad (1)$$

حل: هرگاه $\Delta < 0$ ، معادله همواره مثبت است. پس Δ را محاسبه و کمتر از صفر قرار می‌دهیم.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-m)^2 - 4(1)(m + 1) < 0$$

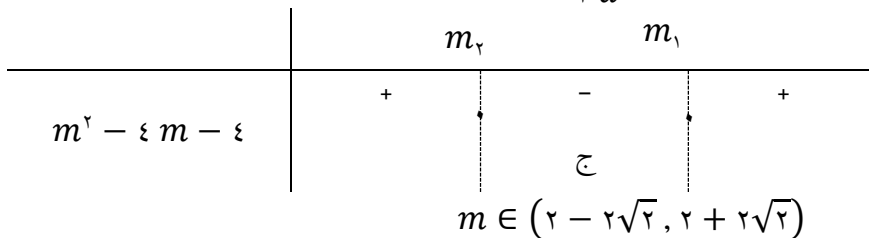
$$\Rightarrow m^2 - 4m - 4 < 0 \quad (2)$$

اکنون نامعادله‌ی (۲) را حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(-4) = 32$$

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{32}}{2} = \frac{4 + 4\sqrt{2}}{2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$m_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 4\sqrt{2}}{2} = 2 - 2\sqrt{2}$$



تفکیک کسر به کسرهای جزئی

هرگاه $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای باشند، عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را کسر گویا می‌نامیم.

فرض کنیم کسر گویای $\frac{3x-2}{x(x-1)}$ داده شده باشد. می‌خواهیم دو کسر بیابیم که جمع آنها کسر موردنظر باشد. با محاسبه معلوم می‌شود:

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{3x-2}{x(x-1)}$$

در این قسمت می‌خواهیم روش محاسبه بدست آوردن کسرهای سمت چپ را بیان کنیم.

حالت اول) درجه صورت از درجه مخرج کمتر و مخرج به عامل‌های درجه اول تجزیه شود. (روش آن به صورت مثال‌های زیر است).

$$\frac{3x-2}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

$$\frac{1}{x(x+1)(3x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{3x+1}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2(2x+4)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{2x+4}$$

$$\frac{3}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

* کسره‌های سمت راست را کسر جزئی می‌نامیم.

* به تعداد عامل‌های مخرج کسر جزئی می‌نویسیم.

مثال: کسر $\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)}$ را به کسره‌های جزئی تبدیل کنید.

حل:

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

کسره‌های اول و سوم با هم برابرند. همچنین مخرج‌های آن دو نیز برابر است. پس صورت‌ها نیز باید با هم برابر باشند. (به‌ازای هر x).

$$x^2 + 1 \equiv A(x+1) + B(x-1)$$

اکنون برای یافتن A و B کافی است دو مقدار دلخواه به x بدهیم. برای محاسبه سریع‌تر بهتر است x ریشه‌های مخرج باشد.

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow 2 = A(2) + B(0) \Rightarrow A = \frac{1}{2} \\ x = -1 \Rightarrow -1 = 0 + -2B \Rightarrow B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

پس:

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

مثال: دو کسر جزئی بیابید که جمع آنها $\frac{1}{x^2 + x - 6}$ بشود.

حل: داریم:

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)} \\ \frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+3)}{(x+3)(x-2)}$$

$$1 \equiv A(x-2) + B(x+3)$$

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow 1 = 0 + 5B \Rightarrow B = \frac{1}{5} \\ x = -3 \Rightarrow 1 = -5A + 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{-\frac{1}{5}}{x+3} + \frac{\frac{1}{5}}{x-2}$$

مثال: کسر $\frac{x-3}{x^2(x-1)}$ را به کسرهای جزئی تبدیل کنید.

حل:

$$\frac{x-3}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$x-3 \equiv A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2$$

$$x=1 \Rightarrow -2 = 0 + 0 + C \Rightarrow C = -2$$

$$x=0 \Rightarrow -3 = -A + 0 + 0 \Rightarrow A = 3$$

$$(دَلخواه) \quad x=2 \Rightarrow -1 = A + 2B + C \Rightarrow -1 = 3 + 2B - 2 \Rightarrow 2B = 0 \Rightarrow B = 0$$

پس:

$$\frac{x-3}{x^2(x-1)} = \frac{3}{x^2} + \frac{0}{x} + \frac{-2}{x-1}$$

حالت دوم) درجه صورت کمتر از درجه مخرج و مخرج به عامل‌های اول یا دوم تجزیه شود.

(روش آن مانند مثال‌های زیر است.)

توجه: عامل درجه دوم، معادله درجه دومی است که تجزیه نشود.

$$\frac{x^2-1}{(x^2+1)x} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x}$$

$$\frac{x+3}{(x^2+1)^2x} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{E}{x}$$

مثال: کسر $\frac{1}{(x^2+1)x}$ را به کسرهای جزئی تبدیل کنید.

حل:

$$\frac{1}{(x^2+1)x} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x} = \frac{x(Ax+B) + C(x^2+1)}{(x^2+1)x}$$

$$= \frac{(A + C)x^2 + Bx + C}{(x^2 + 1)x}$$

$$1 \equiv (A + C)x^2 + Bx + C$$

ضرایب نظیر به نظیر باید برابر باشند.

$$\begin{cases} A + C = 0, & \text{ضریب } x^2 \\ B = 0, & \text{ضریب } x \\ C = 1 & \text{عدد ثابت} \end{cases} \Rightarrow A = -1$$

$$\frac{1}{(x^2 + 1)x} = \frac{-x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x}$$

مثال: عبارت $\frac{x^2 + 1}{x^2(x^2 + 1)}$ را بر حسب کسره‌های جزئی بنویسید.

حل:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{A(x^2 + 1) + Bx(x^2 + 1) + x^2(Cx + D)}{x^2(x^2 + 1)}$$

$$x^2 + 1 \equiv (B + C)x^3 + (A + D)x^2 + Bx + A$$

ضرایب نظیر به نظیر باید برابر باشند.

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + D = 0 \\ B = 1 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -1 \\ D = -1 \\ B = 1 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{-x - 1}{x^2 + 1}$$

حالت سوم) درجه صورت بزرگ‌تر یا مساوی درجه مخرج باشد. در این حالت ابتدا صورت را به مخرج تقسیم می‌کنیم.

مثال: عبارت $\frac{x^3 - 2x + 4}{x^2 - 1}$ را به کسره‌های جزئی تبدیل کنید.

حل:

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x + 4 \quad | x^2 - 1 \\ -x^3 + x \\ \hline -x + 4 \end{array}$$

پس:

$$x^3 - 2x + 4 = x(x^2 - 1) + (-x + 4)$$

$$\frac{x^3 - 2x + 4}{x^2 - 1} = x + \frac{-x + 4}{x^2 - 1}$$

اکنون در کسر سمت راست درجه صورت از درجه مخرج کمتر است.

$$\frac{-x + 4}{x^2 - 1} = \frac{-x + 4}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$\begin{cases} -x + 4 \equiv A(x + 1) + B(x - 1) \\ x = 1 \Rightarrow 3 = 2A \Rightarrow A = \frac{3}{2} \\ x = -1 \Rightarrow 5 = -2B \Rightarrow B = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{x^3 - 2x + 4}{x^2 - 1} = x + \frac{\frac{3}{2}}{x - 1} + \frac{-\frac{5}{2}}{x + 1}$$

مثال: کسر $\frac{x^3 + x^2 + 1}{x + 3}$ را به کسرهای جزئی تبدیل کنید.

حل: با تقسیم معلوم می‌شود:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + 1 &= (x + 3)(x^2 - 2x + 6) + (-17) \\ \frac{x^3 + x^2 + 1}{x + 3} &= x^2 - 2x + 6 + \frac{-17}{x + 3} \end{aligned}$$

تمرین

۱- ساده کنید.

$$2\sqrt{12} + 3\sqrt{8} - \sqrt{32}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}} =$$

$$x^0 \cdot x^{-7} =$$

$$(64)^{\frac{2}{3}} =$$

$$\sqrt[4]{2\sqrt{5}} =$$

۴ ریاضیات مقدماتی

۲- عبارت‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} = \quad \sqrt[6]{\frac{1}{36}} = \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2}} =$$

۳- ساده کنید.

$$\frac{1}{2} - \frac{7}{8} = \quad \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{1}{2} = \quad \frac{3 + \frac{1}{5}}{-1 + \frac{7}{8}} =$$

۴- ساده کنید.

$$(2xy - 1)(x^2 - y) =$$

$$\frac{2x - 1}{3} + \frac{1}{x - 1} =$$

$$\frac{x + 1}{4} + \frac{3x}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} =$$

$$x + 3 \div \frac{x^2 + 1}{4} =$$

۵- تقسیم کنید.

$$x^4 + 1 \div x + 1 \quad -x^3 + 2x^2 + 1 \div x^2 + 4$$

$$x^3 - 4x + 1 \div 2x + 1 \quad -x^3 + 7x^2 + 1 \div x^2 + 9$$

۶- عبارت $x^3 + 2x^2 - x - 2$ را تجزیه کنید.

راهنمایی: بر $(x - 1)$ بخش پذیر است.

۷- آیا عبارت $x^4 - 2x^2 + 3x + 4$ بر $(x + 1)$ بخش پذیر است؟ (بدون تقسیم)

۸- آیا عبارت $x^5 - 5x^2 + 2x + 1$ بر $(x - 1)$ بخش پذیر است؟ (بدون تقسیم)

۹- سمت راست اتحادهای زیر را بنویسید.

$$(2x - 3)^2 =$$

$$(-2 - y)^2 =$$

$$(x - 3)^3 =$$

$$\left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2 =$$

$$\left(\frac{1}{x} + x\right)^2 =$$

۱۰- بدون استفاده از فرمول Δ معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $x^2 + 7x + 12 = 0$

(ب) $x^2 - 16 = 0$

(ج) $y^2 + y - 20 = 0$

(د) $2x^2 + 14x + 24 = 0$

(ه) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$

۱۱- تجزیه کنید.

(الف) $x^3 + 7$

(ب) $x^2 - 5$

(ج) $x^3 - 8y^3$

(د) $x^2 - y^2$

(ه) $x^3 - 64$

(و) $x^2 + 32$

۱۲- معادلات زیر را حل کنید.

(الف)

$$\frac{2x-1}{2} + \frac{x}{3} = \frac{3x+6}{7}$$

(ب)

$$\sqrt{-x+4} = \sqrt{2x-4}$$

(ج)

$$x = \sqrt{2x+3}$$

(د)

$$x^2 + 6x = -9$$

۱۳- نامعادلات زیر را حل کنید.

(الف)

$$\frac{2x-2}{-x+4} < 0$$

(ب)

$$\frac{x(-x+3)}{2x+2} > 0$$

(ج)

$$\frac{2x-1}{3} > \frac{x-5}{4}$$

(د)

$$\frac{2}{x-1} < \frac{1}{x}$$

۱۴- معادلات زیر را حل کنید.

$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{x}{x-1} - x + 4 = 0 \quad (\text{ب})$$

$$x^4 - 2x^2 + 3 = 0 \quad (\text{ج})$$

۱۵- نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{2x + 4} \geq 0 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{2}{x} > x + 4 \quad (\text{ب})$$

$$-x > \frac{1}{x^2} \quad (\text{د})$$

$$\frac{x+1}{x} \leq \frac{1}{x+1} \quad (\text{ج})$$

۱۶- نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{1}{x} < 2x + 1 < x^2$$

۱۷- آیا تساوی زیر برقرار است؟

$$\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{\sqrt{x + 2}} = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 2}}$$

۱۸- m را طوری بیابید که معادله‌ی $2x^2 + mx + 2 = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد.

۱۹- m را طوری بیابید که معادله‌ی $(m + 4)x^2 - (m - 2)x - 4 = 0$ دو ریشه متمایز حقیقی داشته باشد.

۲۰- در معادله‌ی زیر m را طوری بیابید که یک ریشه آن $x = 1$ باشد و سپس ریشه دوم را بیابید.

$$3x^2 + (2m + 1)x - 6 = 0$$

۲۱- کسرهای زیر را به کسرهای جزئی تفکیک کنید.

$$\frac{1}{x^2(x-2)} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{x+2}{(x-1)x} \quad (\text{الف})$$

۲۲- دو کسر بیابید که مجموع آنها $\frac{2x+3}{9-x^2}$ باشد.

۲۳- کسر زیر را به کسرهای جزئی تبدیل کنید.

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x(x-1)}$$

۲۴- کسرهای زیر را به کسر جزئی تبدیل کنید.

$$\frac{x-1}{(x^2+1)x} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{2}{(x^2+x+1)x} \quad (\text{الف})$$

فصل سوم قواعد شمارش

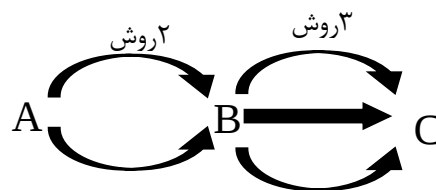
برای یافتن تعداد حالات ممکن انجام یک عمل (چند مرحله‌ای) و یا تعداد انتخاب‌ها از بین چند شیء (با شرایط معین) نیاز به قواعدی برای شمارش تعداد آنها داریم. همچنین برای محاسبه بعضی از احتمالات باید از قواعد شمارش استفاده کنیم.

◀ مبانی شمارش

اصل ضرب: اگر عملی در مرحله اول به m_1 طریق و در مرحله دوم به m_2 طریق و در مرحله k ام به m_k طریق انجام شود، آنگاه این عمل به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ طریق انجام پذیر است.

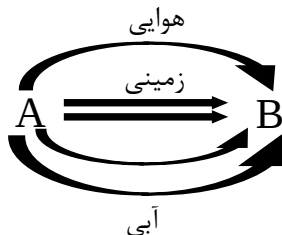
اصل جمع: اگر عملی در یک روش به m_1 طریق و در روش دیگر به m_2 طریق انجام شود، آنگاه این عمل را به $m_1 + m_2$ طریق می‌توان انجام داد.

مثال: اگر از شهر A به شهر B دو مسیر و از شهر B به شهر C سه مسیر باشد، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C سفر کرد؟



بنا به اصل ضرب از شهر A به شهر C به $2 \times 3 = 6$ روش می‌توان سفر کرد.

مثال: برای رفتن از شهر A به شهر B دو راه زمینی و دو راه آبی و یک راه هوایی وجود دارد. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B رفت؟



بنا به اصل جمع از شهر A به شهر B به $2 + 2 + 1 = 5$ طریق می‌توان سفر کرد.

مثال: با اعداد $\{2, 3, 5, 6, 7\}$ چند عدد ۳ رقمی می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار)

حل: برای عدد صدگان ۵ انتخاب، برای دهگان ۴ انتخاب و برای یکان ۳ انتخاب داریم.
بنا به اصل ضرب:

صدگان	دهگان	یکان
۵	۴	۳

 $\Rightarrow 5 \times 4 \times 3 = 60$

مثال: با اعداد $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

الف) چند عدد ۳ رقمی می توان نوشت؟ (با تکرار)

حل: صفر در سمت چپ بی اثر است، بنابراین

۵	۶	۶
---	---	---

 $\Rightarrow 5 \times 6 \times 6 = 180$

ب) چند عدد ۳ رقمی فرد می توان نوشت؟ (با تکرار)

حل: برای رقم یکان فقط ۳ انتخاب داریم:

۵	۶	۳
---	---	---

 $\Rightarrow 5 \times 6 \times 3 = 90$

(۲)
(۳)
(۱) شروع

ج) چند عدد ۳ رقمی زوج می توان نوشت؟ (با تکرار)

۵	۶	۳
---	---	---

 $\Rightarrow 5 \times 6 \times 3 = 90$

(۲)
(۳)
(۱) شروع

مثال: با اعداد $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

الف) چند عدد ۳ رقمی می توان نوشت؟ (بدون تکرار)

حل:

۵	۵	۴
---	---	---

 $\Rightarrow 5 \times 5 \times 4 = 100$

(۱) شروع
(۲)
(۳)

ب) چند عدد ۳ رقمی فرد می توان نوشت؟ (بدون تکرار)

حل:

۴	۴	۳
---	---	---

 $\Rightarrow 4 \times 4 \times 3 = 48$

(۱) شروع
(۳)
(۲)

ج) چند عدد ۳ رقمی زوج می توان نوشت؟ (بدون تکرار)

حل: ابتدا فرض می کنیم رقم یکان صفر باشد:

۵	۴	۱
---	---	---

 $\Rightarrow 5 \times 4 \times 1 = 20$ رقم یکان صفر است.

(۱) شروع
(۳)
(۲)

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که رقم یکان غیر صفر باشد:

۴	۴	۲
(۲)	(۳)	(۱) شروع

 $\Rightarrow 4 \times 4 \times 2 = 32$

رقم یکان غیر صفر است.

بنا به اصل جمع تعداد اعداد زوج رقمی بدون تکرار برابر است با:

$$20 + 32 = 52$$

مثال: می‌خواهیم از بین ۴ معلم و ۵ کارمند و ۶ مهندس یک کمیته ۲ نفری تشکیل دهیم به‌طوری‌که اعضای کمیته شغل یکسان نداشته باشند. به چند طریق می‌توان این کمیته را تشکیل داد؟

حل:

۵	۴
---	---

 $\Rightarrow 5 \times 4 = 20$

کارمند معلم

۶	۵
---	---

 $\Rightarrow 6 \times 5 = 30$

مهندس کارمند

۶	۴
---	---

 $\Rightarrow 6 \times 4 = 24$

مهندس معلم

بنا به اصل جمع:

$$20 + 30 + 24 = 74$$

یعنی به ۷۴ طریق می‌توان این کمیته دو نفری را تشکیل داد.

➤ معرفی چند نماد

فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. تعریف n فاکتوریل به صورت زیر است:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

مثلاً:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

$$1! = 1$$

همچنین تعریف می‌کنیم:

$$0! = 1$$

داریم:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 1 \quad \text{و یا} \quad n! = n(n-1)!$$

$$۱! = ۱ \times ۱!$$

$$۲! = ۲ \times ۱ \times ۱!$$

فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $r \leq n$. تعریف می‌کنیم:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

P_r^n تعداد جایگشت r از n خوانده می‌شود.

$$P_۲^۵ = \frac{۵!}{(۵-۲)!} = \frac{۵!}{۳!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳!}{۳!} = ۲۰$$

$$P_۱^۱ = \frac{۱!}{(۱-۱)!} = \frac{۱!}{۰!} = ۱!$$

$$P_۱^۷ = \frac{۷!}{(۷-۱)!} = \frac{۷!}{۶!} = ۷$$

فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $r \leq n$. تعریف می‌کنیم:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

نماد C_r^n یا $\binom{n}{r}$ تعداد ترکیب r از n خوانده می‌شود.

$$\binom{۵}{۲} = \frac{۵!}{۲! \times ۳!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳!}{۲! \times ۳!} = ۱۰$$

$$\binom{۱}{۱} = \frac{۱!}{۱! \times ۰!} = ۱$$

$$\binom{۷}{۱} = \frac{۷!}{۱! \times ۶!} = ۷$$

نماد زیگما:

$$\sum_{r=۱}^n x_r = x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n$$

چند مثال:

$$\sum_{r=۲}^۵ x_r = x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵$$

$$\sum_{r=۰}^{\xi} x_r = x_۰ + x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_{\xi}$$

فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. در این صورت:

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} \cdot y^r \quad (\text{بسط دوجمله‌ای نیوتن})$$

به طور معادل:

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

$$n = 2 \Rightarrow (x + y)^2 = \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (\text{اتحاد مربع})$$

به طور مشابه به ازای $n = 3$ اتحاد مکعب بدست می‌آید.

فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $r \leq n$. هرگاه بخواهیم از بین n شیء متمایز، r شیء را به ترتیب در کنار هم قرار دهیم، تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

هرگاه بخواهیم از بین n شیء متمایز، r شیء را در یک گروه یا دسته قرار دهیم (ترتیب قرار گرفتن مهم نباشد). تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: یک مجموعه ۷ عضوی چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟

حل: چون در مجموعه ترتیب مهم نیست، تعداد زیرمجموعه‌های ۳ تایی برابر است با:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 35$$

مثال: از بین ۶ سخنران می‌خواهیم ۳ نفر انتخاب و آنها را به ۳ شهر اعزام کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

حل: چون ترتیب در این مثال مهم است، پس تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$P_3^6 = \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 240$$

مثال: دو کتاب ریاضی و چهار کتاب حسابداری موجود است.

الف) به چند طریق می‌توان این کتاب‌ها را در یک ردیف قرار داد؟

حل: ترتیب مهم است:

$$P_1^6 = \frac{6!}{0!} = 6!$$

ب) به چند طریق می‌توان این کتاب‌ها را در یک ردیف قرار داد به‌طوری‌که کتاب‌های ریاضی کنار هم باشند؟

حل: اگر دو کتاب ریاضی را یک کتاب در نظر بگیریم، تعداد حالات ممکن برابر با $5!$ است. دو کتاب ریاضی نیز به $2!$ حالت جایشان عوض می‌شود. پس بنا به اصل ضرب تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$5! \times 2! = 240$$

ج) به چند طریق می‌توان کتاب‌ها را در یک ردیف قرار داد به‌طوری‌که کتاب‌های ریاضی کنار هم و کتاب‌های حسابداری هم کنار هم باشند؟

حل: کتاب‌های ریاضی را یک کتاب و کتاب‌های حسابداری را هم یک کتاب در نظر می‌گیریم؛ این دو کتاب به $2!$ حالت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. همچنین کتاب‌های ریاضی به $2!$ و کتاب‌های حسابداری به $4!$ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند. پس تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$2! \times 2! \times 4! = 96$$

مثال: در یک جعبه ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ سوخته است. ۳ لامپ انتخاب می‌کنیم

الف) تعداد حالاتی که ۲ لامپ سالم و یک لامپ سوخته باشد؟

حل: بنابه اصل ضرب:

$$\binom{6}{2} \times \binom{4}{1}$$

ب) حداقل یک لامپ سالم باشد؟

حل: حداقل یک لامپ سالم یعنی یا یکی سالم، یا دو تا سالم و یا هر سه سالم باشد؛ لذا بنا به اصل ضرب و اصل جمع داریم:

$$\binom{6}{1} \times \binom{4}{2} + \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{6}{3} \times \binom{4}{0}$$

جایگشت‌های تعمیم یافته (تکراری)

هرگاه بخواهیم n شیء را که n_1 تای آنها شبیه هم و n_2 تای آنها شبیه هم و ... n_k تای آنها شبیه هم باشند، در یک ردیف قرار دهیم، تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} \quad (n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$$

مثال: با اعداد ۲, ۲, ۳, ۴, ۴, ۴, ۸, چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟

حل: در نوشتن اعداد همواره ترتیب مهم است. واضح است که در این مثال ۲ باید دو بار و ۴ باید سه بار تکرار شوند. بنابراین تعداد

اعداد ممکن برابر است با:

$$\frac{7!}{2! \times 3! \times 1! \times 1!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 420$$

مثال: با کلمه "تجارت" چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

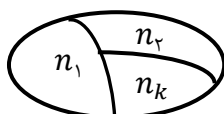
حل: حرف "ت" دو بار تکرار شده است.

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60$$

ترکیب‌های تعمیم یافته

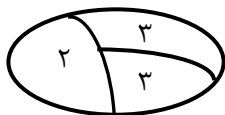
هرگاه بخواهیم مجموعه‌ای شامل n عضو را به چند زیرمجموعه افراز کنیم به طوریکه در مجموعه اول n_1 شیء و در مجموعه دوم n_2 شیء ... و در مجموعه k ام n_k شیء باشد، تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} \quad (n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$$



مثال: به چند طریق می‌توان ۸ کارمند را در ۲ اتاق سه نفره و یک اتاق دو نفره جای داد؟

حل:



$$3 + 3 + 2 = 8$$

تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\binom{8}{3, 3, 2} = \frac{8!}{3! \times 3! \times 2!} = 560$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۰ عدد کتاب را در دو جعبه قرار دهیم به طوریکه در جعبه اول ۴ کتاب و در جعبه دوم ۶ کتاب قرار گیرد؟

حل:



$$4 + 6 = 10$$

تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$\binom{10}{4, 6} = \frac{10!}{4! \times 6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4! \times 6!} = 210$$

تمرین

۱- با اعداد $\{0, 2, 3, 4, 5\}$

الف) چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت؟ (با تکرار)

ب) چند عدد چهار رقمی فرد می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار)

ج) چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار)

۲- با اعداد $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ (بدون تکرار)

۳- با اعداد $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ چند عدد سه رقمی فرد می توان نوشت؟ (با تکرار)

۴- با اعداد $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ چند عدد پنج رقمی زوج می توان نوشت؟ (بدون تکرار)

۵- به چند طریق می توان ۷ نفر را دور یک میز دایره ای جای داد؟

۶- یک مجموعه ۷ عضوی چند زیرمجموعه ۵ عضوی دارد؟

۷- توضیحی برای تساوی زیر بیان کنید.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

۸- از بین ۶ نفر به چند طریق می توان یک رئیس و یک معاون برای یک مدرسه تعیین کرد؟

۹- سه کارمند و چهار معلم را می خواهیم در یک ردیف کنار هم قرار دهیم.

الف) به چند طریق می توان آنها را در یک ردیف قرار داد؟

ب) به چند طریق می توان آنها را کنار هم قرار داد به طوریکه معلم ها کنار هم باشند؟

ج) به چند طریق می توان آنها را کنار هم قرار داد به طوریکه معلم ها کنار هم نباشند؟

۱۰- در جعبه ای ۸ مهره متمایز وجود دارد. چهار مهره آبی، سه مهره قرمز و یک مهره سبز است. می خواهیم ۴ مهره را انتخاب کرده و داخل جعبه ای دیگر قرار دهیم.

الف) تعداد حالاتی که ۲ مهره آبی و ۲ مهره قرمز باشد؟

ب) تعداد حالاتی که یک مهره آبی و ۲ مهره قرمز و یک مهره سبز باشد؟

ج) تعداد حالاتی که هیچ مهره قرمز نباشد؟

۱۱- با اعداد ۲, ۴, ۷, ۸, ۸, ۸, ۸ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت؟

۱۲- با حروف کلمه "ایرانیان" چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت؟

۱۳- از بین ۱۵ نفر به چند طریق می توان ۲ تیم ۴ نفره و یک تیم ۷ نفره تشکیل داد؟

۱۴- چهار کت و پنج پیراهن را به چند طریق می توان در یک ردیف قرار داد به طوریکه کت ها و پیراهن ها یک در میان کنار هم باشند؟

۱۵- ۵ مهره قرمز و ۳ مهره سبز و ۲ مهره آبی را به چند طریق می توان در یک ردیف قرار داد؟ (تمایز فقط در رنگ مهره ها است.)

فصل چهارم خواص اعداد صحیح

در این فصل به بررسی کوتاهی از خواص اعداد صحیح می‌پردازیم. در این جا خواص جبری اعداد مورد نظر نیست، بلکه ساختار اعداد و روابط بین آن‌ها مطالعه می‌شود.

◀ استقراء ریاضی

اگر راننده‌ای در طی ۱۰ سال متوالی تصادف نکرده باشد آیا می‌توان نتیجه گرفت سال بعد نیز تصادف نخواهد کرد؟
یا از اینکه $3^1 = 3$ و $3^2 = 9$ و $3^3 = 27$ اعداد فرد هستند می‌توان نتیجه گرفت 3^n همواره فرد است؟
تحت شرایط مناسب با استقراء ریاضی به بعضی از این سؤالات می‌توان پاسخ داد.

شرایط اثبات با استقراء ریاضی. فرض کنیم یک گزاره در حوزه اعداد طبیعی برای $n = 1$ درست باشد، اگر از درستی گزاره برای $n = k$ بتوان درستی گزاره برای $n = k + 1$ را نتیجه گرفت، آنگاه گزاره برای هر عدد طبیعی درست است.
مثال: ثابت کنید برای $n \in \mathbb{N}$ ، 3^n همواره عددی فرد است.

حل: واضح است گزاره برای $n = 1$ درست است. $3^1 = 3$ اکنون فرض کنیم گزاره برای $n = k$ درست باشد، یعنی 3^k عددی فرد باشد. از طرفی ضرب دو عدد فرد، عددی فرد است. پس $3^{k+1} = 3^k \times 3$ نیز فرد است.
بنابراین 3^n همواره عددی فرد است.

مثال: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

اثبات: گزاره برای $n = 1$ درست است.

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

فرض کنیم گزاره برای $n = k$ درست باشد.

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

به طرفین تساوی $k + 1$ را اضافه می‌کنیم.

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$

با ساده کردن سمت راست داریم:

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

یعنی گزاره برای $n = k + 1$ نیز درست است. بنابراین تساوی (۱) همواره درست است.

مثال: نشان دهید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

اثبات: گزاره برای $n = 1$ درست است.

$$1 = (1)^2 = 1$$

فرض کنیم گزاره برای $n = k$ درست باشد.

$$1 + 3 + \dots + (2k-1) = k^2$$

به طرفین تساوی عدد فرد متوالی بعدی $(2k+1)$ را اضافه می‌کنیم.

$$1 + 3 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

پس گزاره برای $n = k + 1$ نیز درست است.

سوال: آیا با استقراء می‌توان گزاره زیر را ثابت کرد؟

از اینکه می‌بینیم خورشید هر روز صبح طلوع می‌کند. پس خورشید در آینده نیز هر روز طلوع خواهد کرد.

بخش‌پذیری و اعداد اول

تعریف: فرض کنیم a و b اعدادی صحیح باشند. گوئیم a مقسوم علیه b است (b بر a بخش‌پذیر است)

هرگاه عدد صحیحی مانند c باشد که: $b = ac$

مثلاً تمام مقسوم علیه ۱۵ اعداد زیر هستند:

$$\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$$

الگوریتم تقسیم: فرض کنیم a و b اعداد صحیح و $a > 0$ باشند، در این صورت:

$$b = aq + r, 0 \leq r < a$$

که در آن r را باقی‌مانده و q را خارج قسمت تقسیم b بر a می‌نامیم.

مثال: باقی‌مانده تقسیم ۱۲۴ بر ۳ را بیابید.

حل:

$$124 = 41 \times 3 + 1$$

پس $r = 1$ باقی‌مانده است.

مثال: بین اعداد ۱ تا ۱۰۱ چند عدد بر ۵ بخش‌پذیر می‌باشند؟

حل: با تقسیم داریم:

$$101 = 20 \times 5 + 1$$

بنابراین تعداد ۲۰ عدد در این فاصله وجود دارد که بر ۵ بخش پذیر هستند.

مثال: اگر n عددی صحیح باشد، با تقسیم n بر ۵ و الگوریتم تقسیم داریم:

$$n = 5k + r, 0 \leq r < 5$$

بنابراین، باقی مانده تقسیم n بر ۵ یکی از اعداد زیر است:

$$0, 1, 2, 3, 4$$

مثال: با یک مثال تحقیق کنید باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۱۰ رقم یکان آن است.

$$148 = 14 \times 10 + 8$$

تعریف: فرض کنیم a و b دو عدد صحیح باشند، عدد مثبت d را بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) a و b می نامیم، هرگاه بین

مقسوم علیه های مشترک a و b از همه بزرگ تر باشد.

مثال: (ب.م.م) اعداد ۸ و ۱۲ را بیابید.

حل: مقسوم علیه های مشترک ۸ و ۱۲ عبارت اند از:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4$$

پس (ب.م.م) این دو عدد ۴ است.

چند مثال دیگر از (ب.م.م):

$$10, 35 \rightarrow d = 5$$

$$9, 20 \rightarrow d = 1$$

$$30, 100 \rightarrow d = 30$$

تعریف: فرض کنیم a و b اعداد صحیح باشند، عدد مثبت m را کوچک ترین مضرب مشترک (ک.م.م) a و b می نامیم، هرگاه بین

مضرب های مشترک a و b ، m از همه کوچک تر باشد.

مثال: (ک.م.م) دو عدد ۸ و ۶ را بیابید.

$$8 \rightarrow 8, 16, 24, 32, 40, \dots$$

$$6 \rightarrow 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \dots$$

بنابراین، (ک.م.م) این دو عدد ۲۴ است.

چند مثال دیگر از (ک.م.م):

$$5, 6 \rightarrow m = 30$$

$$10, 4 \rightarrow m = 20$$

$$5, 6 \rightarrow m = 30$$

$$12, 10 \rightarrow m = 60$$

نکته: اگر a و b دو عدد صحیح مثبت باشند، داریم:

$$m = \frac{a \cdot b}{d}$$

مثال: حاصل ضرب دو عدد مثبت ۱۰۸ است، اگر (ب.م.م) آن ها ۳ باشد، (ک.م.م) آن ها را بیابید.

$$m = \frac{a \cdot b}{d} = \frac{108}{3} = 36$$

تعریف: p را عددی اول می‌نامیم، هرگاه $p > 1$ و مقسوم علیه‌های آن فقط $1 \pm$ و $p \pm$ باشند.
مثال: اعداد زیر همگی اول هستند.

$$2, 3, 11, 31, 83$$

اعداد اول در ساختار اعداد صحیح نقش اساسی دارند در واقع هر عدد صحیح حاصل ضربی از اعداد اول است.
تجزیه به عوامل اول. فرض کنیم $n > 1$ عددی صحیح باشد، در این صورت n به صورت یکتا حاصل ضربی از اعداد اول است.

$$n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_r$$

مثال: تجزیه چند عدد در زیر آمده است:

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$125 = 5^3$$

معمولاً با تجزیه به اعداد اول اطلاعات زیادی به دست می‌آوریم.

مثال: همه مقسوم علیه‌های مثبت ۱۷۵ را بیابید.

حل:

$$175 = 5^2 \times 7$$

مقسوم علیه‌های این عدد به صورت $5^k \times 7^t$ است. که در آن $0 \leq k \leq 2$ و $0 \leq t \leq 1$ است.
 بنابراین مقسوم علیه‌های آن اعداد زیر هستند:

$$5^0 \times 7^0 = 1, \quad 5^1 \times 7^0 = 5, \quad 5^2 \times 7^0 = 25$$

$$5^0 \times 7^1 = 7, \quad 5^1 \times 7^1 = 35, \quad 5^2 \times 7^1 = 175$$

مثال: تعداد مقسوم علیه‌های مثبت ۲۰۰ را به دست آورید.

حل:

$$200 = 2^3 \times 5^2$$

مقسوم علیه‌های به صورت $2^k \times 5^t$ است که $0 \leq k \leq 3$ و $0 \leq t \leq 2$ است. پس ۴ انتخاب برای k و ۳ انتخاب برای t داریم،
 بنابه اصل ضرب تعداد مقسوم علیه‌های ۲۰۰ برابر است با:

$$4 \times 3 = 12$$

مثال: (ب.م.م) دو عدد زیر را بیابید.

$$a = 2^4 \times 5^2 \times 7$$

$$b = 2^1 \times 3^2 \times 5^3$$

حل: از بین اعداد اول مشترک در تجزیه دو عدد، کوچک‌ترین توان‌ها را انتخاب می‌کنیم.

$$d = 2^1 \times 5^2 = 50$$

مثال: (ک.م.م) اعداد زیر را بیابید.

$$a = 2^4 \times 3^2 \times 7$$

$$b = 3^4 \times 7^2 \times 11$$

حل: همه اعداد اول با بزرگ‌ترین توان‌ها را انتخاب می‌کنیم.

$$m = 2^4 \times 3^4 \times 7^2 \times 11$$

◀ همنهشتی‌ها

تعریف: فرض کنیم n عددی صحیح و مثبت باشد، همنهشتی x با y به هنگ n به صورت زیر است:

$$x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow x - y = kn, k \in \mathbb{Z}$$

به عبارت دیگر x با y هم نهشت است، هرگاه $x - y$ مضربی از n باشد.

چند مثال:

$$10 \equiv 4 \pmod{3} \Leftrightarrow 10 - 4 = 6 \quad (\text{مضرب } 3)$$

$$3 \equiv 15 \pmod{4} \Leftrightarrow 3 - 15 = -12 \quad (\text{مضرب } 4)$$

$$5 \equiv -3 \pmod{4} \Leftrightarrow 5 - (-3) = 8 \quad (\text{مضرب } 4)$$

مثال: با استفاده از همنهشتی‌ها، اعداد صحیح را به سه طبقه متمایز افراز کنید. (هر طبقه بی نهایت عنصر داشته باشد).

حل:

$$x \equiv 0 \pmod{3}, \quad x - 0 = 3k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

طبقه اول:

$$\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots$$

$$x \equiv 1 \pmod{3}, \quad x - 1 = 3k \rightarrow x = 3k + 1$$

طبقه دوم:

$$\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots$$

$$x \equiv 2 \pmod{3}, \quad x - 2 = 3k \rightarrow x = 3k + 2$$

طبقه سوم:

$$\dots, -7, -4, -1, 2, 5, \dots$$

معلوم می شود که هر عدد صحیح فقط در یکی از طبقات می باشد.

مثال: ۲۱۳ به هنگ ۴ با چه عددی مثبت و کمتر از ۴ همنهشت است؟

حل: با تقسیم ۲۱۳ بر ۴ داریم:

$$213 = 53 \times 4 + 1$$

پس:

$$213 - 1 = 53 \times 4$$

بنابراین:

$$213 \equiv 1 \pmod{4}$$

دو خاصیت همنهشتی‌ها:

فرض کنیم $a \equiv b \pmod{n}$ و $c \equiv d \pmod{n}$ در این صورت:

$$ac \equiv bd \pmod{n} \quad (1)$$

$$a^m \equiv b^m \pmod{n} \quad (2)$$

مثال: باقی مانده تقسیم 3^{20} را بر ۴ بیابید.

حل: داریم:

$$3^2 = 9 \equiv -1 \pmod{4} \quad (4)$$

بنا به خاصیت دوم طرفین را به توان ۶ می‌رسانیم:

$$(3^2)^6 \equiv (-1)^6 = 1 \pmod{4} \quad (4)$$

پس:

$$3^{12} \equiv 1 \pmod{4} \quad (4)$$

و بنا به خاصیت اول داریم:

$$3^2 \times 3^{18} \equiv 3^2 \times 1 \pmod{4} \quad (4)$$

پس:

$$3^{20} \equiv 9 \equiv 1 \pmod{4} \quad (4)$$

بنابراین باقی مانده تقسیم 3^{20} بر ۴ است.

مثال: باقی مانده 5^{27} را بر عدد ۳ بیابید.

$$5^2 = 25 \equiv 1 \pmod{3} \quad (3)$$

$$5^{26} = (5^2)^{13} \equiv (1)^{13} = 1 \pmod{3} \quad (3)$$

$$5^{27} = 5 \times 5^{26} \equiv 5 \times 1 \equiv 2 \pmod{3} \quad (3)$$

بنابراین باقی مانده این تقسیم 5^{27} بر ۳ است.

مثال: باقی مانده تقسیم 2^{230} بر ۶ را بیابید.

حل:

$$2^2 = 4 \equiv -2 \pmod{6} \quad (6)$$

$$2^{10} = (2^2)^5 \equiv (-2)^5 = -32 \equiv -2 \pmod{6} \quad (6)$$

$$2^{100} = (2^{10})^{10} \equiv (-2)^{10} = 1024 \equiv -2 \pmod{6} \quad (6)$$

$$2^{200} = (2^{100})^2 \equiv (-2)^2 = 4 \equiv -2 \pmod{6} \quad (6)$$

از طرفی:

$$2^{30} = (2^{10})^3 \equiv (-2)^3 = -8 \equiv -2 \pmod{6} \quad (6)$$

پس:

$$2^{230} = 2^{200} \times 2^{30} \equiv -2 \times -2 = 4 \pmod{6} \quad (6)$$

بنابراین باقی مانده 2^{230} بر ۶ است.

قضیه: فرض کنیم p عددی اول و p مقسوم علیه عدد a نباشد. در این صورت:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

چند مثال:

$$2^{10} = 2^{11-1} \equiv 1 \pmod{11} \quad (11)$$

$$6^{22} = 6^{23-1} \equiv 1 \pmod{23} \quad (23)$$

$$5^6 = 5^{7-1} \equiv 1 \pmod{7} \quad (7)$$

مثال: باقی مانده تقسیم 8^{32} بر ۱۷ را بیابید.

حل: برای $p = 17$ داریم:

$$8^{16} = 8^{17-1} \equiv 1 \quad (17)$$

$$8^{32} = (8^{16})^2 \equiv (1)^2 = 1 \quad (17)$$

بنابراین باقی مانده این تقسیم $r = 1$ است.

مثال: باقی مانده تقسیم 7^{122} بر ۱۳ را بیابید.

حل: برای $p = 13$ داریم:

$$7^{12} = 7^{13-1} \equiv 1 \quad (13)$$

$$7^{120} = (7^{12})^{10} \equiv (1)^{10} = 1 \quad (13)$$

$$7^2 \equiv 10 \quad (13) \quad \text{از طرفی:}$$

پس:

$$7^{122} = 7^{120} \times 7^2 \equiv 1 \times 10 \quad (13)$$

بنابراین باقی مانده این تقسیم $r = 10$ است.

تمرین

۱- با استقراء نشان دهید، برای هر عدد طبیعی n ، 5^n مضربی از ۵ است.

۲- با استقراء نشان دهید برای هر عدد طبیعی n ، $n \geq 2$ ، 3^n مضربی از ۹ است. راهنمایی: شروع استقراء از $n = 2$ است.

۳- با استقراء نشان دهید برای $n \geq 5$ ، $n^2 \geq 5n + 1$

۴- با استقراء نشان دهید برای هر عدد طبیعی n

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۵- باقی مانده تقسیم عدد طبیعی n بر ۸ چه اعدادی هستند؟

۶- بین اعداد ۱ تا ۱۵۰ چند عدد بر ۷ بخش پذیر است؟

۷- (ب.م.م) و (ک.م.م) اعداد زیر را بیابید.

الف) ۸ و ۱۲ ب) ۷ و ۲۱

۸- اگر p عددی اول باشد، (ب.م.م) و (ک.م.م) دو عدد p و $p+1$ را به دست آورید.

۹- همه مقسوم علیه های مثبت عدد ۱۴۷ را بیابید.

۱۰- تعداد مقسوم علیه های مثبت اعداد زیر را بیابید.

الف) $a = 108$ ب) $b = 2^3 \times 5^2 \times 13$

۱۱- (ب.م.م) و (ک.م.م) دو عدد زیر را بیابید.

$$a = 3^4 \times 5^2 \times 7, b = 2^2 \times 3 \times 11^3$$

۱۲- اعداد صحیح را به ۴ طبقه متمایز افراز کنید. (هر طبقه بی نهایت عضو داشته باشد)

۱۳- عدد ۳- به هنگ ۵ با چه عدد مثبت کوچک تر از ۵ هم نهشت است؟

۱۴- باقی مانده تقسیم را بیابید.

الف) 2^{45} بر ۵

ب) 6^{43} بر ۴

ج) 7^{40} بر ۸ راهنمایی: $(8) \quad 7^3 \equiv -1$

۱۵- باقی مانده تقسیم 6^{163} را بر ۱۷ بیابید. راهنمایی: از اول بودن $p = 17$ استفاده کنید.

۱۶- باقی مانده تقسیم 9^{302} را بر ۱۱ بیابید. راهنمایی: از اول بودن $p = 11$ استفاده کنید.

فصل پنجم ماتریس و دترمینان

در هر جایی که ترتیبی خاص از اشیاء (اعداد) مطرح باشد، می‌توان نمایش آن را به صورت ماتریس بیان کرد. ماتریس‌ها در علوم مختلف از جمله در خود ریاضیات کاربرد دارند. در فصل بعدی یکی از کاربردهای آن برای حل دستگاه خطی بیان می‌گردد.

ماتریس‌ها

آرایی شامل m سطر و n ستون از اشیاء را یک ماتریس $m \times n$ می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ماتریس A را با علامت $A = [a_{ij}]$ نیز نشان می‌دهند، هر a_{ij} یک "درآیه یا عنصر" ماتریس A نام دارد.

مثال. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ یک ماتریس 2×3 است.

در این ماتریس $a_{11} = 2$ ، $a_{23} = 6$ ، $a_{12} = -1$ به طور کلی a_{ij} عنصری است که در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ ماتریسی سطری و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ یک ماتریسی ستونی است.

مثال. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ و $a_{ij} = 2i - 3j$ ، اعضای ماتریس A را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف. هرگاه درآیه‌های نظیر به نظیر دو ماتریس یکسان باشند. آن دو ماتریس را مساوی می‌نامند.

$$\text{مثال. اگر } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & c \\ 0 & k \end{bmatrix} \text{ در این صورت: } \begin{cases} c = -1 \\ k = 4 \end{cases}$$

ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن برابر باشد، $(n=m)$ "ماتریس مربع" نام دارد. ماتریس مربع A را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

اعضای روی خط ممتد را "قطر اصلی" و اعضای روی خط چین را "قطر فرعی" ماتریس A می‌نامند.

اگر در یک ماتریس مربع، اعضای خارج از قطر اصلی صفر باشند، آن را "ماتریس قطری" می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هرگاه در یک ماتریس قطری تمام اعضای روی قطر اصلی یک باشند، آن را "ماتریس یکه (واحد)" می‌نامند و با I_n نمایش می‌دهند.

مثال. ماتریس‌های یکه 2×2 و 3×3 در ذیل نشان داده شده‌اند:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هرگاه تمام درآیه‌های ماتریس صفر باشند. آن را "ماتریس صفر" می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هرگاه جای سطرها و ستون‌ها را در ماتریس A عوض کنیم، ماتریس حاصل را "ترانژاده (تراسپوز)" ماتریس A می‌نامند و با علامت A^T

نشان می‌دهند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

هرگاه $A = A^T$ ، ماتریس A را "متقارن" می‌نامند، به عبارت دیگر:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

مثال. ماتریس‌های ذیل متقارن هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

هرگاه $A = -A^T$ ، ماتریس A را "شبه‌متقارن" می‌نامند، به عبارت دیگر:

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

مثال. ماتریس‌های ذیل شبه متقارن هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

هرگاه اعضای زیر قطر اصلی ماتریس مربع A صفر باشند. ماتریس A را "بالا مثلثی" و هرگاه اعضای بالای قطر اصلی صفر باشند. ماتریس A را "پایین مثلثی" می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{بالا مثلثی}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{پایین مثلثی}$$

در یک ماتریس مربع A ، مجموع عناصر روی قطر اصلی را "اثر ماتریس" می‌نامند و با علامت $Tr(A)$ نشان می‌دهند.

$$\text{مثال. در ماتریس } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ داریم:}$$

$$Tr(A) = 0 + 2 + (-3) = -1$$

جمع دو ماتریس

برای جمع دو ماتریس، درآیه‌های نظیر به نظیر را با هم جمع می‌کنیم. (ابعاد دو ماتریس باید یکسان باشند).
مثال.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & -5 \end{bmatrix}$$

تفاضل دو ماتریس

برای تفاضل دو ماتریس، درآیه‌های نظیر به نظیر را از هم کم می‌کنیم. (ابعاد دو ماتریس باید یکسان باشند).
مثال.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در ماتریس

برای ضرب یک عدد در ماتریس، عدد را در تمامی درآیه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم.

$$2 \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad -3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -6 & 12 & -3 \end{bmatrix}$$

ضرب دو ماتریس

برای ضرب ماتریس A در ماتریس B ، سطرهای ماتریس A را در ستون‌های ماتریس B ضرب می‌کنیم. این تعریف ایجاب می‌کند که تعداد ستون‌های A برابر با تعداد سطرهای B باشد. به عبارت دیگر، باید $A_{n \times p}$ و $B_{p \times m}$ باشند.

مثال. حاصل ضرب $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ را بیابید.

$$c_{11} = [2, 0] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \times 1 + 0 \times 2 = 2$$

$$c_{12} = [2, 0] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \times 0 + 0 \times 4 = 0$$

$$c_{13} = [2, 0] \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \times 2 + 0 \times -1 = 4$$

$$c_{21} = [1, 4] \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \times 1 + 4 \times 2 = 9$$

$$c_{22} = [1, 4] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \times 0 + 4 \times 4 = 16$$

$$c_{23} = [1, 4] \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \times 2 + 4 \times -1 = -2$$

پس:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 9 & 16 & -2 \end{bmatrix}$$

مثال. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، حاصل ضرب‌های $A \times B$ و $B \times A$ را محاسبه کنید.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

در این مثال، دیده می‌شود: $A \times B \neq B \times A$

مثال. در صورت ضرب‌پذیر بودن، ضرب‌های ذیل را انجام دهید.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \text{ضرب پذیر نیست}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۲ & -۴ & -۸ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۷ \end{bmatrix}$$

مثال. اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ موارد ذیل را محاسبه کنید.

$$۲I_۲ + A = ۲ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ -۱ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$۲A + ۳B = ۲ \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} + ۳ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ -۲ & ۸ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۹ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۶ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$A - ۳B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} - ۳ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳ & -۶ \\ -۹ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -۶ \\ -۱۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$۲A \times ۳B = ۲ \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} \times ۳ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ -۲ & ۸ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۹ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۲ & ۲۴ \\ ۶۶ & -۳۶ \end{bmatrix}$$

$$(A + I) \times (B - I) = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۶ \\ ۱۵ & -۱۲ \end{bmatrix}$$

چند خاصیت جبری ماتریس‌ها

$$A + [0] = A$$

$$A \times [0] = [0]$$

$$A + B = B + A$$

$$A \times I = I \times A = A \quad (A \text{ مربع است})$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

می‌دانیم در اعداد حقیقی، از تساوی $ab = 0$ نتیجه می‌شود: $a = 0$ یا $b = 0$ اما در ماتریس‌ها، این خاصیت برقرار نیست. به مثال ذیل توجه کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0]$$

دو ماتریس سمت چپ مخالف صفر هستند، ولی حاصل ضرب آنها صفر شده است.

در اعداد حقیقی خاصیت حذف داریم، به عبارت دیگر، اگر $a \neq 0$

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

اما این خاصیت در ماتریس‌ها برقرار نیست، مثلاً اگر

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با محاسبه بررسی کنید که $AB = AC$ ولی $B \neq C$ است.

اگر A یک ماتریس مربع باشد، توان‌های A به صورت ذیل می‌باشند:

$$A^2 = AA$$

$$A^3 = A^2 A$$

$\vdots$

$$A^n = A^{n-1} A$$

مثال. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، A^2 و A^3 را محاسبه کنید.

حل.

$$A^{\tau} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{\tau} = A^{\tau} \times A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 0 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A^{\Delta 2}$ را به دست آورید.

$$A^{\tau} = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

$$A^{\tau} = A^{\tau} \times A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}$$

با این محاسبات می توان حدس زد:

$$A^{\Delta 2} = \begin{bmatrix} 2^{\Delta 2} & 0 \\ 0 & 2^{\Delta 2} \end{bmatrix}$$

مثال. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ، ماتریس $A^{\vee 5}$ را به دست آورید.

$$A^{\tau} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{\tau} = A^{\tau} \times A = I \times A = A$$

$$A^{\tau} = A^{\tau} \times A^{\tau} = I \times I = I$$

بنابراین:

$$A^{\vee 5} = A$$

◀ دترمینان ماتریس مربع

دترمینان یک ماتریس مربع A ، مقدار عددی است که به صورت ذیل نشان داده می شود:

$$|A| \quad \text{یا} \quad \det(A)$$

دترمینان ماتریس ۲×۲

دترمینان ماتریس ۲×۲ برابر است با حاصل ضرب قطر اصلی، منهای حاصل ضرب قطر فرعی

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - (2 \times 4) = -5$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times -2 - (1 \times 2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \times 4 - (2 \times -3) = 6$$

همان‌طور که دیده می‌شود، مقدار دترمینان می‌تواند مثبت، منفی و یا صفر شود.

دترمینان ماتریس ۳×۳

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

از حذف سطر اول و ستون اول، زیر دترمینان $A_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ حاصل می‌شود.

A_1 را "دترمینان کهاد (فرعی) عنصر a_{11} " و عبارت $A_1^{+1}(-1)$ را "همسازه عنصر a_{11} " می‌نامند. به طور مشابه، دترمینانی

است که از حذف سطر دوم و ستون سوم ماتریس A حاصل می‌شود.

$$A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{دترمینان کهاد عنصر } a_{23}$$

$$(-1)^{2+3} A_{23} = -A_{23} \quad \text{همسازه عنصر } a_{23}$$

به راحتی دیده می‌شود که ماتریس ۳×۳ نه همسازه دارد. فرمول محاسبه دترمینان ۳×۳ به روش بسط، (روی سطر اول) در ذیل آمده است.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} A_{13}$$

دترمینان‌های زیر، با روش بسط (روی سطر اول) بدست آمده‌اند.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + -3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1) + -3(2) + 4(1) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4) + 1(6) + -3(2) = 8$$

به طور مشابه، می‌توان دترمینان 3×3 را به روش بسط روی سطر دوم یا سوم محاسبه کرد. همچنین می‌توان دترمینان را با بسط روی ستون‌های ماتریس نیز به‌دست آورد.

مثال. دترمینان $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ را به روش بسط (روی سطر سوم) به‌دست آورید.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + -1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-3) + -1(-6) + 0(-3) = 0$$

نکته. مقدار دترمینان یک ماتریس با بسط روی هر سطر یا هر ستون، یکسان به‌دست می‌آید.

دترمینان ماتریس $n \times n$

روش محاسبه‌ی دترمینان $n \times n$ همانند محاسبه‌ی دترمینان 3×3 است. دترمینان ذیل با روش بسط (روی سطر اول) محاسبه شده است.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

ماتریس و دترمینان ۷۳

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4) + (-3)(6) + 0(-2) + (-2)(1) = -12$$

برای محاسبه سریع تر دترمینان، بهتر است سطر یا ستونی را انتخاب کنیم که صفر بیشتر دارد.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4(5) = -20$$

روش ساروس برای دترمینان ۳×۳

در این روش دو ستون اول را تکرار و بعد مجموع حاصل ضرب قطره‌های اصلی را از مجموع حاصل ضرب قطره‌های فرعی کم می‌کنیم.

مثال. دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ را حساب کنید.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = [(1 \times 0 \times 5) + (-1 \times 4 \times -1) + (2 \times 3 \times 2)]$$

$$- [(-1 \times 3 \times 5) + (1 \times 4 \times 2) + (2 \times 0 \times -1)]$$

$$= (0 + 4 + 12) - (-15 + 8 + 0) = 23$$

خواص دترمینان

۱- اگر تمامی عناصر یک سطر، صفر باشند، مقدار دترمینان صفر است:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

۲- اگر یک سطر، مضربی از سطر دیگر باشد، مقدار دترمینان صفر است:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

سطر چهارم دو برابر سطر دوم است:

$$(6, 4, -2, -4) = 2(3, 2, -1, -2)$$

از این خاصیت نتیجه می شود که اگر دو سطر برابر باشند، دترمینان صفر است:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۳- اگر در دترمینان جای دو سطر را عوض کنیم، مقدار دترمینان در یک منفی ضرب می شود:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

۴- اگر ماتریس مثلثی باشد، دترمینان آن برابر است با حاصل ضرب قطر اصلی:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times -3 \times 7 = -21$$

۵- اگر مضربی از یک سطر را به سطر دیگر اضافه کنیم، مقدار دترمینان ثابت می ماند:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 10 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

دو برابر سطر اول به سطر دوم اضافه شده است:

$$2(1, 2, 3) + (-1, 2, 4) = (2, 4, 6) + (-1, 2, 4) = (1, 6, 10)$$

۶- دترمینان ماتریس، با دترمینان ترانژاده آن برابر است.

$$|A| = |A^T|$$

۷- برای ضرب عدد در یک دترمینان، عدد را در یک سطر (دلخواه) ضرب می کنیم:

$$-2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \\ -6 & -4 & -2 \end{vmatrix}$$

عدد ۲- در سطر سوم ضرب شده است.

۸- اگر A و B دو ماتریس مربع باشند، داریم:

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

۹- اگر يك سطر بر حسب چند سطر ديگر باشد، مقدار دترمینان برابر با صفر است:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

سطر چهارم، مجموع سطر اول و دوم است:

چند نکته.

الف) در تمامی خواص بالا، اگر به جای کلمه «سطر» کلمه «ستون» را قرار دهیم، باز هم این خواص برقرارند.

ب) با استفاده از این خواص، می توان هر دترمینانی را مثلی نمود.

ج) هرگاه ابعاد دترمینان بزرگ باشد، با خواص دترمینان سریع تر محاسبه می گردد.

معکوس يك ماتریس مربع

تعریف. فرض کنیم A يك ماتریس مربع $n \times n$ باشد، ماتریس B را معکوس A می نامند، هرگاه:

$$A \times B = B \times A = I_n$$

اگر B را با A^{-1} نشان دهیم، داریم:

$$A^{-1} \times A = I_n$$

در اعداد حقیقی، هر عدد مخالف صفر، معکوس پذیر است. در ماتریس ها، شرط لازم و کافی برای اینکه A معکوس پذیر باشد این است که $|A| \neq 0$ باشد.

محاسبه A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{الف) } A \text{ ماتریس } 2 \times 2 \text{ باشد.}$$

بنا به فرمول:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(جای عناصر قطر اصلی عوض شده و قطر فرعی در منفی ضرب شده است.)

مثال. معکوس ماتریس های ذیل را بیابید.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

حل.

$$|A| = -14 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{4}{14} & \frac{-2}{14} \end{bmatrix}$$

$$|B| = 1 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|C| = 0 \quad \text{ماتریس } C \text{ معکوس پذیر نیست:}$$

ب) A ماتریس 3×3 باشد:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس A با فرمول $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A$ تعریف می شود.

که در آن $\text{adj}A$ ماتریس "الحاقی" A نام دارد و به صورت ذیل است:

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

A_{ij} دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A به دست می آید.

$$\text{مثال. معکوس ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ را به دست آورید.}$$

حل.

$$|A| = -18$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 \quad -A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$-A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10 \quad -A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad -A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{-18} \begin{bmatrix} -8 & -4 & 5 \\ 2 & 10 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-18} \begin{bmatrix} -8 & 2 & -4 \\ -4 & 10 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ج) ماتریس $n \times n$ باشد.

در حالت $n \times n$ ، فرمول معکوس A ، مانند فرمول 3×3 است:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A$$

$\text{adj}A$ ترانهاد ماتریس همسازهای A می باشد. (شبه 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{مثال. اگر } a_{23} \text{ عنصر } A \text{ را در ماتریس } A^{-1} \text{ بیابید.}$$

$$a_{23} = \frac{-A_{32}}{|A|} \quad \text{حل. با توجه به فرمول } A^{-1} \text{ داریم:}$$

$$|A| = -1, \quad -A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$a_{23} = \frac{-5}{-1} = 5 \quad \text{بنابراین:}$$

چند خاصیت

$$(A \times B)^{-۱} = B^{-۱} \times A^{-۱} \quad (\text{الف})$$

$$|A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|} \quad (\text{ب})$$

$$(I_n)^{-۱} = I_n \quad (\text{ج})$$

مثال. اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ ، دترمینان $|A^{-۱}|$ را بیابید.

حل. $|A| = ۸$ ، بنا به خاصیت: $|A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|} = \frac{۱}{۸}$

مثال. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ ، مطلوبست $A^{-۲}$

حل. داریم:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۳} \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۲} = A^{-۱} \times A^{-۱} = \frac{۱}{۹} \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۹} \begin{bmatrix} ۹ & ۸ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

تمرین

۱- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ ، موارد ذیل را محاسبه کنید.

(ب) $۲A - ۴B$

(الف) $A + B$

(د) $B \times (A - B)$

(ج) $۳A^T + B$

۲- اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ موارد ذیل را در صورت امکان به دست آورید.

(ب) $B \times A$

(الف) $A \times B$

(د) $A \times (A - ۲B)$

(ج) $A^۲$

۳- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ موارد ذیل را محاسبه کنید.

الف) $B \times A$ ب) $A - 4I_3$

ج) $Tr(A^T)$ د) $A - B + 3I_3$

۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^{40} را به دست آورید.

۵- اگر $A^T = A$ ، ماتریس A^{100} را بیابید.

۶- آیا اتحاد $A^T - B^T = (A - B) \times (A + B)$ برای ماتریس‌ها برقرار است؟

۷- دترمینان‌های ذیل را بیابید. (روش بسط)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

۸- دترمینان‌های 3×3 تمرین قبل را به روش ساروس بیابید.

۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $A \times B$ را بیابید.

۱۰- مقدار x را طوری بیابید که دترمینان ذیل صفر شود:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

۱۱- با يك مثال، نشان دهید، تساوي $|A + B| = |A| + |B|$ همواره برقرار نیست.

۱۲- معکوس ماتریس‌های ذیل را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

۱۳- ماتریس B را طوری بیابید که

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۴- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^{-3} را بیابید.

۱۵- معکوس ماتریس‌های ذیل را به‌دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۱۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ ، درآیه $a_{۱۲}$ را در ماتریس A^{-1} بیابید.

فصل ششم

دستگاه معادلات خطي

در هر جا که تعدادي معادله خطي با تعدادي مجهول داشته باشیم، دستگاه معادلات خطي تشکیل می شود. یافتن نقطه‌ی برخورد دو خط و یا نقاط برخورد دو صفحه از موارد کاربرد دستگاه‌ها هستند.

دستگاه معادلات خطي

یک دستگاه معادلات خطي m معادله و n مجهول به این صورت است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

در این دستگاه، x_i ها مجهول‌های دستگاه، a_{ij} ها ضرایب دستگاه و b_i ها اعداد ثابت دستگاه می باشند. هرگاه $x_1, \dots, x_n$ در تمامی معادلات دستگاه صدق کنند. $x_1, \dots, x_n$ را "جواب دستگاه" می نامند.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{دستگاه دو معادله و سه مجهول:}$$

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + y + 4z = 1 \\ -x + y + 5z = 2 \end{cases} \quad \text{دستگاه مربع سه معادله و سه مجهول:}$$

دستگاهی که تمام b_i ها صفر باشند، "دستگاه همگن" نام دارد.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \text{دستگاه همگن:}$$

جوابهاي يك دستگاه معادلات خطی به یکی از حالات ذیل است:

(الف) دستگاه يك حواب منحصر به فرد دارد.

(ب) دستگاه جواب ندارد. (دستگاه ناسازگار)

(ج) دستگاه بی نهایت جواب دارد.

➤ حل دستگاه مربع به روش ماتریسی

دستگاه مربع زیر مفروض است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

به این دستگاه یک ماتریس نسبت می دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس ضرایب دستگاه}$$

اگر $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ماتریس مجهول‌ها و $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ ماتریس اعداد ثابت دستگاه باشند، داریم:

$$A \times X = B$$

طرفین را در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \quad (|A| \neq \circ)$$

$$I \times X = A^{-1} \times B$$

$$X = A^{-1} \times B$$

بنابراین اگر دستگاه مربع و دترمینان ضرایب دستگاه مخالف صفر باشد، فرمول حل دستگاه به روش ماتریسی، به این صورت است:

$$X = A^{-1} \times B$$

مثال: دستگاه $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$ را به روش ماتریسی حل کنید.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \times B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \text{دستگاه يك جواب دارد.}$$

مثال: دستگاه $\begin{cases} -2x + y = 4 \\ x - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$ را به روش ماتریسی حل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{دستگاه از اين روش حل نمي شود.}$$

مثال: دستگاه زیر را به روش ماتریسی حل کنید.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{دستگاه یک جواب دارد.}$$

◀ حل دستگاه به روش کرامر

در این روش نیز باید دستگاه مربع و دترمینان ضرایب دستگاه، مخالف صفر باشد. ($|A| \neq 0$) فرمول روش کرامر به صورت ذیل است:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n$$

A ماتریس ضرایب دستگاه و A_i ماتریسی است که از تعویض ستون i ام ماتریس A با b_i ها حاصل می‌شود.

مثال: دستگاه زیر را به روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} -x + 3y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{2}{-5}, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-6}{-5} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases} \quad \text{دستگاه یک جواب دارد.}$$

مثال: دستگاه داده شده را به روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + 10y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$$

حل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 46$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 92, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -46$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{92}{46} = 2, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{0}{46} = 0, \quad z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-46}{46} = -1$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{دستگاه یک جواب دارد.}$$

نکته. در يك دستگاه مربع، هرگاه $|A| \neq 0$ باشد، دستگاه يك جواب منحصر به فرد دارد و اگر $|A| = 0$ باشد، دستگاه بي نهايت جواب و يا بدون جواب است.

مثال. مقدار a را طوري پاييد كه دستگاه ذيل ناسازگار باشد. (بدون جواب)

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -6x + ay = 5 \end{cases}$$

حل: بايد $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a - 18 = 0 \Rightarrow a = 9$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

مثال: به ازای چه مقدار a ، دستگاه فقط یک جواب بدیهی دارد.

$$\text{حل: یک جواب بدیهی دستگاه} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ است. اگر } |A| \neq 0, \text{ این تنها جواب دستگاه خواهد بود.}$$

$$|A| \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$2 - 4a \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{1}{2}$$

حل دستگاه به روش حذفی گاوس

در روش حذفی گاوس، مجهول‌ها را طوری حذف می‌کنیم که دستگاه، بالا مثلثی شود و بعد مجهول‌ها را یک به یک به دست می‌آوریم. اگر دستگاه مربع نباشد با افزودن صفرهای مناسب، دستگاه را مربع می‌کنیم. هیچ محدودیتی برای حل دستگاه در این روش وجود ندارد.

مثال. دستگاه‌های داده شده را به روش حذفی حل کنید:

$$\begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \quad (\text{ج}) \quad \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 2x - 6y = 3 \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\text{حل الف)} \quad \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad \xrightarrow{(-2)} \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 0 + 5y = 1 \end{cases} \quad \text{دستگاه مثلثی است.}$$

$$5y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{5}$$

$$x - 2y = 1 \Rightarrow x - 2\left(\frac{1}{5}\right) = 1 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$$

$$\begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \text{دستگاه يك جواب دارد.}$$

حل ب)

$$\begin{aligned} & \text{دستگاه مثلثي است.} \\ & \begin{aligned} & \text{دستگاه} \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 2x - 6y = 3 \end{cases} \quad (2) \\ & \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 0 + 0 = 3 \end{cases} \end{aligned} \end{aligned}$$

در معادله ی آخر $0 = 3$ ، بنا به این تناقض، دستگاه جواب ندارد.

حل ج)

$$\begin{aligned} & \text{دستگاه} \begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \quad (1) \\ & \begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases} \quad \text{دستگاه مثلثي است.}$$

این دستگاه، يك معادله و دو مجهول دارد، يکي از مجهول‌ها را دلخواه مي‌گیریم.

$$x = k \quad \text{دلخواه}$$

$$-2x + 4y = 6 \Rightarrow -2k + 4y = 6$$

$$y = \frac{6+2k}{4} \Rightarrow y = \frac{3+k}{2}$$

$$\begin{cases} x = k \\ y = \frac{3+k}{2} \end{cases} \quad k \in R \quad \text{دستگاه بي‌نهايت جواب دارد.}$$

مثال. دستگاه‌هاي داده شده را به روش حذفی حل کنید.

$$\begin{aligned} & \text{الف)} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ z + y + 2x = -1 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \\ & \text{ب)} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -2x + y - z = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y - 4z = 0 \\ x + y - 3z = 8 \end{cases} \quad \text{ج)}$$

حل الف)

$$(-2)(1) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 0 + 3y - 3z = -3 \\ 0 + y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 0 + 3y - 3z = -3 \\ 0 + 0 + 3z = 6 \end{cases} \quad \text{دستگاه مثلثی است.}$$

$$3z = 6 \Rightarrow z = 2$$

$$3y - 3(2) = -3 \Rightarrow y = 1$$

$$x - (1) + 2(2) = 1 \Rightarrow x = -2$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{دستگاه یک جواب دارد.}$$

حل ب)

$$(2) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -2x + y - z = 4 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 0 - y + 3z = 6 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases} \quad \text{دستگاه مثلثی است.}$$

دلخواه $z = k$

$$-y + 3k = 6 \Rightarrow y = 3k - 6$$

$$x - y + 2z = 1 \Rightarrow x - (3k - 6) + 2k = 1 \Rightarrow x = k - 5$$

$$\begin{cases} z = k \\ y = 3k - 6 \\ x = k - 5 \end{cases} \quad k \in R \quad \text{دستگاه بی نهایت جواب دارد.}$$

حل ج) جای سطر اول و دوم عوض شده است.

$$\begin{array}{l} (1) \quad \rightarrow \\ (2) \quad \rightarrow \end{array} \begin{cases} -x + 2y - 4z = 0 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y - 3z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y - 4z = 0 \\ 0 + 3y - 7z = 5 \\ 0 + 3y - 7z = 8 \end{cases}$$

دستگاه در گام بعدی مثلثی می شود ولی دیده می شود که سطر دوم و سوم باهم ایجاد تناقض می کنند.

$$5 = 3y - 7z = 8 \Rightarrow 5 = 8$$

بنا به این تناقض دستگاه جواب ندارد.

مثال: دستگاه های زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ x + y = 0 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \quad \text{(الف)}$$

حل: با افزودن یک ستون صفر دستگاه مربع می شود. ولی برای سادگی یک دستگاه مربع از داخل آن انتخاب و سپس جواب را

در معادله ی باقی مانده قرار می دهیم.

$$(1) \quad \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 0 + 2y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

جواب را در معادله سوم قرار می دهیم ولی در معادله صدق نمی کند.

$$3x - y = 1 \Rightarrow 3\left(-\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{4}{3}\right) \neq 1 \quad \text{دستگاه جواب ندارد.}$$

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 3x - y = 0 \\ -2x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases} \quad \text{(ب)}$$

حل: یک دستگاه دو معادله و دو مجهول انتخاب می کنیم.

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

جواب در معادله ی سوم برقرار است:

$$-2x + 2y = -2(1) + 2(3) = 4$$

جواب را در معادله ی چهارم قرار می دهیم ولی در معادله صدق نمی کند.

$$3x + 4y = 3(1) + 4(3) \neq 0 \quad \text{دستگاه جواب ندارد.}$$

مثال: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} -x + y - z + 2t = 2 \\ x - y + 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

حل: دستگاه را به مربع تبدیل می‌کنیم.

$$(\) \rightarrow \begin{cases} -x + y - z + 2t = 2 \\ x - y + 2z + 3t = 0 \\ \cdot + \cdot + \cdot + \cdot = \cdot \\ \cdot + \cdot + \cdot + \cdot = \cdot \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y - z + 2t = 2 \\ \cdot + \cdot + z + 5t = 2 \\ \cdot + \cdot + \cdot + \cdot = \cdot \\ \cdot + \cdot + \cdot + \cdot = \cdot \end{cases}$$

دستگاه مثلثی شد.

دلخواه $t = k_1$

پس: $z = 2 - 5k_1$

با جایگذاری در معادله اول داریم:

$$-x + y = 2 + (2 - 5k_1) - 2k_1$$

$$-x + y = -7k_1 + 4$$

یک معادله و دو مجهول داریم، یکی از این دو را دلخواه می‌گیریم

$$x = k_2$$

$$y = -7k_1 + k_2 + 4$$

بنابراین:

$$\begin{cases} x = k_2 \\ y = -7k_1 + k_2 + 4 \\ z = 2 - 5k_1 \\ t = k_1 \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad \text{دستگاه بی نهایت جواب دارد.}$$

مثال: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ y - 2z + t = 4 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ -y + 2z = 4 \end{cases}$$

حل:

$$(-1) \rightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ \cdot + y - 2z + t = 4 \\ x - 3y + 2z + \cdot = 1 \\ \cdot - y + 2z + \cdot = 4 \end{cases}$$

$$(1)(2) \rightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ \cdot + y - 2z + t = 4 \\ \cdot - 2y + 2z + t = \cdot \\ \cdot - y + 2z + \cdot = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z - t = ۱ \\ ۰ + y - ۲z + t = ۴ \\ ۰ + ۰ - ۲z + ۳t = ۸ \\ ۰ + ۰ + ۰ + t = ۸ \Rightarrow t = ۸ \end{cases} \quad \text{دستگاه مثلی شد.}$$

$$\begin{aligned} -۲z + ۳t = ۸ &\Rightarrow -۲z + ۲۴ = ۸ \Rightarrow z = ۸ && \text{از معادله سوم داریم:} \\ y - ۲z + t = ۴ &\Rightarrow y - ۱۶ + ۸ = ۴ \Rightarrow y = ۱۲ && \text{از معادله دوم داریم:} \\ x - y + z - t = ۱ &\Rightarrow x - ۱۲ + ۸ - ۸ = ۱ \Rightarrow x = ۱۳ && \text{و از معادله اول داریم:} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = ۱۳ \\ y = ۱۲ \\ z = ۸ \\ t = ۸ \end{cases} \quad \text{دستگاه یک جواب دارد.}$$

تمرین

۱- دستگاه‌های ذیل را به روش ماتریسی حل کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & \begin{cases} x - y = ۱ \\ ۲x + ۳y = ۰ \end{cases} \\ \text{ب)} \quad & \begin{cases} ۳x - y = ۱ \\ x + ۴y = ۰ \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad & \begin{cases} x + y + z = ۱ \\ -x + y + ۲z = ۰ \\ x - y + z = ۰ \end{cases} \\ \text{د)} \quad & \begin{cases} x - y = ۱ \\ x + ۲z = ۰ \\ y - z = -۲ \end{cases} \end{aligned}$$

۲- دستگاه‌های تمرین قبل را به روش کرامر حل کنید.

۳- دستگاه همگن ذیل را حل کنید.

$$\begin{cases} x - y + z = ۰ \\ x + y - z = ۰ \\ y + ۲z = ۰ \end{cases}$$

۴- اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۵ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ ۳ & ۹ \end{bmatrix}$ ، با استفاده از دستگاه‌ها، ماتریسی مانند B بیابید به طوری که $A \times B = C$

۵- مقدار a را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} ۲x - ۳y = ۱ \\ -x + ay = ۴ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۶- a را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$ جواب‌های غیر بدیهی داشته باشد.

۷- دستگاه‌های ذیل را به روش حذفی حل کنید.

(الف) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 6x - y = 0 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ -8y + 4x = 7 \end{cases}$

(ج) $\begin{cases} -x - y = 2 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases}$ (د) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - y = 2 \\ 2x + \frac{2}{3}y = -4 \end{cases}$

۸- دستگاه‌های داده شده را به روش حذفی حل کنید.

(الف) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x - 2y = 1 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 3x - y + 4z = -1 \end{cases}$

(ج) $\begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ x + 4y - z = 0 \end{cases}$ (د) $\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 2x + y + 2z + t = 1 \\ 3x - 4y + 2t = -2 \end{cases}$

۹- دستگاه‌های ذیل را حل کنید.

(الف) $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ 2x + z + t = 0 \end{cases}$

(ج) $\begin{cases} x - y + z + t = 4 \\ 2x + y + 2z + t = 0 \\ -x - 2y + t = 1 \\ y + 2z + 2t = 0 \end{cases}$

۱۰- نقطه‌ی برخورد دو خط $2x + y = 4$ و $-x + 2y = 1$ را تعیین کنید.

۱۱- نقطه‌ی برخورد سه خط $y - x = 1$ ، $y = 2x$ و $y + 2x - 4 = 0$ را تعیین کنید.

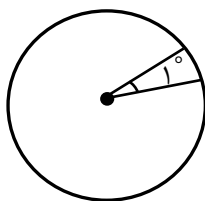
۱۲- نقاط برخورد دو صفحه $x - y + 4z = 1$ و $-x + 2y + z = 0$ را تعیین کنید.

فصل هفتم مثلثات

در بسیاری از محاسبات از مفاهیم مثلثات استفاده می‌شود. مقادیر مثلثاتی هم روی مثلث قائم الزاویه و هم روی دایره تعریف می‌گردند.

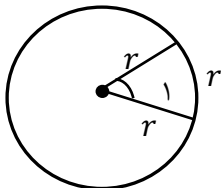
زاویه

اندازه یک زاویه را معمولاً برحسب درجه یا رادیان بیان می‌کنند. اگر دایره‌ای را به 360° قسمت مساوی تقسیم کنیم، زاویه مرکزی هر قسمت را یک درجه می‌نامند.



بنابر این تعریف یک دایره 360° درجه است. لذا نصف دایره 180° درجه می‌باشد.

دایره‌ای به شعاع r مفروض است، یک رادیان اندازه زاویه مرکزی است که طول قوس مقابل آن r باشد.



از آنجا که محیط دایره $2\pi r$ است، بنابراین محیط دایره 2π رادیان است.

رابطه بین درجه و رادیان:

$$(\text{درجه}) \quad 180^\circ \equiv \pi \text{ رادیان}$$

برای تبدیل واحد زاویه از این رابطه استفاده می‌کنیم.

مثال: 120° چند رادیان است؟

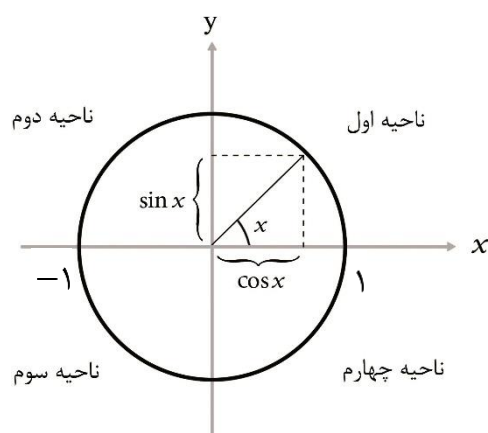
$$\begin{aligned} 180^\circ &\rightarrow \pi \\ 120^\circ &\rightarrow x \end{aligned} \Rightarrow x = \frac{120 \times \pi}{180} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 120^\circ \equiv \frac{2\pi}{3}$$

مثال: $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان چند درجه است؟

$$\begin{array}{l} \pi \rightarrow ۱۸۰^\circ \\ \frac{\pi}{۱۲} \rightarrow x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{۱۲} \times ۱۸۰}{\pi} = \frac{۱۸۰}{۱۲} = ۱۵^\circ$$

مقادیر مثلثاتی

اگر x زاویه باشد. $\sin x$ و $\cos x$ روی دایره واحد تعریف می‌شوند. (دایره‌ای به شعاع یک)

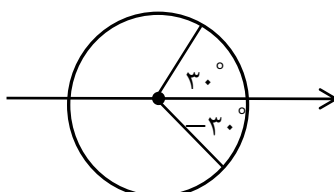


چهار مقادیر مثلثاتی دیگر برحسب $\sin x$ و $\cos x$ به صورت زیر هستند.

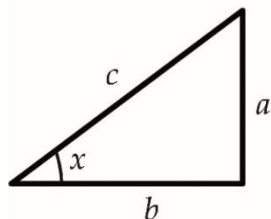
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{array} \quad \text{بنا به تعریف:}$$

تذکره. زاویه مثبت در جهت عکس عقربه‌های ساعت و زاویه منفی در جهت عقربه‌های ساعت اندازه گیری می‌شود.



مقادیر مثلثاتی روی مثلث قائم الزاویه:



$$\sin x = \frac{a}{c}, \quad \cos x = \frac{b}{c}, \quad \tan x = \frac{a}{b}, \quad \cot x = \frac{b}{a}$$

مقادیر مثلثاتی چند زاویه در جدول زیر آمده است:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\cot x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

چند رابطه مثلثاتی

ارتباط بین مقادیر مثلثاتی:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

مقادیر مثلثاتی زاویه منفی:

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \\ \tan(-x) &= -\tan x \\ \cot(-x) &= -\cot x\end{aligned}$$

دوره تناوب اصلی مقادیر مثلثاتی:

$$\begin{aligned}\sin(x + 2\pi) &= \sin x \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x \\ \tan(x + \pi) &= \tan x \\ \cot(x + \pi) &= \cot x\end{aligned}$$

دوره تناوب مقادیر مثلثاتی:

$$\begin{aligned}\sin(x + 2k\pi) &= \sin x, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \cos(x + 2k\pi) &= \cos x, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \tan(x + k\pi) &= \tan x, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \cot(x + k\pi) &= \cot x, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

مقادیر مثلثاتی جمع دو زاویه:

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x \\ \cos(x + y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ \tan(x + y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \\ \cot(x + y) &= \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}\end{aligned}$$

مقادیر مثلثاتی دو برابر زاویه:

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2 \sin x \cdot \cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}\end{aligned}$$

تبدیل ضرب مقادیر مثلثاتی به جمع:

$$\begin{aligned}\sin x \cdot \sin y &= \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \\ \cos x \cdot \cos y &= \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))\end{aligned}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

مربع مقادیر مثلثاتی:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

مثال: محاسبه کنید.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\tan(-30^\circ) = -\tan(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan(225^\circ) = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan(45^\circ) = 1$$

$$\cot(150^\circ) = \cot(180^\circ - 30^\circ) = \cot(-30^\circ) = -\sqrt{3}$$

$$\cos(300^\circ) = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos(-60^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(75^\circ) = \sin(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \sin(75^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\tan(315^\circ) = \tan(2 \times 180^\circ - 45^\circ) = \tan(-45^\circ) = -1$$

$$\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{12\pi + \pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{23\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{24\pi - \pi}{3}\right) = \tan(8\pi - \frac{\pi}{3}) = \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{28\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{28\pi + \pi}{2}\right) = \sin\left(14\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(7 \times 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\end{aligned}$$

مثال: تساوی $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ را به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ تحقیق کنید.

حل:

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

از (۱) و (۲) تساوی تحقیق می‌شود.

مثال: محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \sin(75^\circ) \\ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin(30^\circ) \cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) \cos(30^\circ) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\pi + \frac{-\pi}{3}\right) = \cos(\pi) \cdot \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) - \sin(\pi) \cdot \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \\ &= (-1) \left(\frac{1}{2}\right) - (0) \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \sin\left(\frac{13\pi}{3}\right) \\ &= \sin\left(\frac{10\pi + \pi}{3}\right) = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin(\pi + \pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin \pi \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \pi = (0) \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (-1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

مثال: رابطه $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$ را به ازای $x = 60^\circ$ و $y = 30^\circ$ تحقیق کنید.

حل:

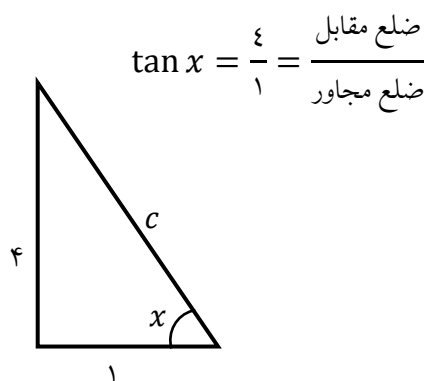
$$\begin{cases} x = 60^\circ \\ y = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 60^\circ \\ y = 30^\circ \end{cases} &\Rightarrow \frac{1}{2}(\cos(60^\circ - 30^\circ) + \cos(60^\circ + 30^\circ)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (2) \end{aligned}$$

از (۱) و (۲) تساوی تحقیق می‌شود.

مثال: اگر $\tan x = 4$ و انتهای کمان در ربع سوم باشد، سایر مقادیر مثلثاتی را بیابید.

حل:



$$c^2 = 4^2 + 1^2 \Rightarrow c^2 = 17 \Rightarrow c = \sqrt{17}$$

$$\cot x = \frac{1}{4}, \quad \sin x = -\frac{4}{\sqrt{17}}, \quad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

در ربع سوم $\sin x$ و $\cos x$ منفی است.

◀ معادلات ساده مثلثاتی

فرض کنیم α یک زاویه معلوم باشد. بنا به دور تناوب، جواب عمومی این معادلات به صورت زیر است:

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{الف})$$

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{ب})$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{ج})$$

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases} \text{ یا } , k \in \mathbb{Z} \quad (د)$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

$$2 \cos x = 1$$

حل:

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}, \quad (\alpha = \frac{\pi}{3})$$

جواب عمومی معادله:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

چند جواب خاص معادله:

$$k = 1 \Rightarrow x = 2\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = 4\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = -2\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$2 \tan(2x) = \sqrt{3}$$

حل:

$$\tan(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad (\alpha = \frac{\pi}{6})$$

جواب عمومی معادله:

$$2x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{6}}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

حل:

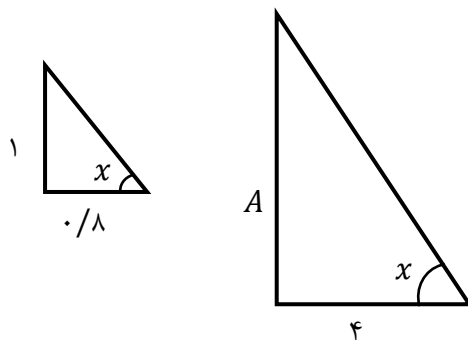
$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad (\alpha = -\frac{\pi}{4})$$

بنابراین:

$$\begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{\xi}) \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi + (\pi - (-\frac{\pi}{\xi})) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{\xi} \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{\xi} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

مثال: با استفاده از مثلثات چگونه طول ستون بلندی را محاسبه کنیم؟

حل: میله‌ای به طول معلوم (مثلاً یک متر) را به طور عمود در زمین قرار می‌دهیم، در یک لحظه طول سایه ستون ۴ متر و طول سایه میله ۰/۸ متر اندازه‌گیری شده است. فرض کنیم A طول ستون باشد.



چون طول سایه‌ها در یک لحظه اندازه‌گیری می‌شود، زاویه x در هر دو مثلث یکسان است.

$$\tan x = \frac{A}{4}, \quad \tan x = \frac{1}{0.8}$$

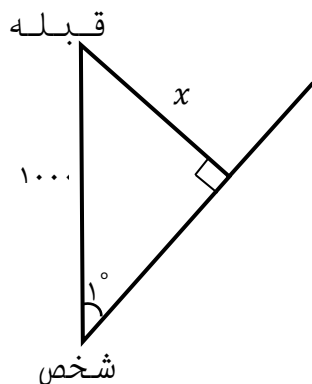
$$\frac{A}{4} = \frac{1}{0.8} \Rightarrow A = \frac{4}{0.8} = 5$$

بنابراین طول ستون ۵ متر است.

مثال: فرض کنید فاصله شهر A تا خانه کعبه ۱۰۰۰ کیلومتر باشد، اگر شخصی هنگام نماز از جهت قبله یک درجه انحراف داشته باشد،

کمترین فاصله در این جهت با قبله چقدر است؟

حل: کمترین فاصله یک نقطه با خط حالتی است که از نقطه به خط عمود رسم کنیم.



$$\sin(1^\circ) = \frac{x}{1000}$$

$$\Rightarrow x = 1000 \times \sin(1^\circ) \cong 1000 \times (0.017) \cong 17$$

بنابراین با انحراف یک درجه از قبله کمترین فاصله حدود ۱۷ کیلومتر است.

تمرین

۱- روابط زیر را به ازای مقادیر داده شده تحقیق کنید.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, x = -\frac{\pi}{3} \quad (\text{الف})$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, x = \pi \quad (\text{ب})$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ y = -\frac{\pi}{6} \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۲- محاسبه کنید.

$$\sin(15^\circ) = \quad (\text{ب}) \quad \tan(-225^\circ) = \quad (\text{الف})$$

$$\cot\left(\frac{6\pi}{3}\right) = \quad (\text{د}) \quad \cos(780^\circ) = \quad (\text{ج})$$

$$\cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) = \quad (\text{و}) \quad \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \quad (\text{ه})$$

۳- $\sin(22/5^\circ)$ را حساب کنید.

۴- در حالتی که $x = y$ فرمول $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$ را ساده کنید.

۵- اگر $\sin x = -\frac{1}{5}$ و انتهای کمان در ربع چهارم باشد، سایر مقادیر مثلثاتی را بیابید.

۶- اگر $\sin x = \frac{1}{4}$ و $\cos y = \frac{2}{3}$ مقدار $\cos(x+y)$ را بیابید. (x و y در ربع اول هستند.)

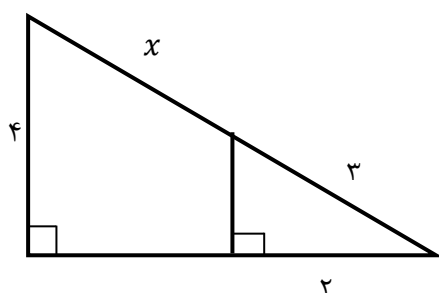
۷- معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$-2 \cos(2x) = \sqrt{2} \quad (\text{ب}) \quad 2 \tan(x) = -2 \quad (\text{الف})$$

$$\tan x - \cot x = 0 \quad (\text{د}) \quad \sin(4x) = 1 \quad (\text{ج})$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \quad (\text{و}) \quad \cot x + \sqrt{3} = 0 \quad (\text{ه})$$

۸- تساوی $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ را به ازای $\frac{\pi}{3}$ تحقیق کنید.



۹- با استفاده از مثلثات در شکل زیر فاصله x را بدست آورید.

۱۰- فاصله نقطه A تا B ۱۰۰ متر است. اگر از نقطه A با 45° درجه اختلاف به سمت نقطه B حرکت کنیم، بعد از پیمودن چند متر

کمترین فاصله را با نقطه B خواهیم داشت؟

۱۱- چگونه زاویه تابش نور خورشید به زمین را در یک زمان معین تعیین کنیم؟

معمای تقسیم ۱۷ شتر

جهت خُسن ختام این کتاب، معمای منسوب به امیر مؤمنان علی (ع) را مطرح و توضیح می‌دهیم.

پدری برای سه فرزند خود ۱۷ شتر به ارث می‌گذارد به طوری که به یک نفر $\frac{1}{2}$ و به دیگری $\frac{1}{3}$ و به سومی $\frac{1}{9}$ سهم ارث برسد. بعد از فوت

پدر، این سه نفر در تقسیم ارث با این شرایط دچار مشکل می‌شوند و بالاخره به حضرت مراجعه می‌کنند. امام علی (ع) یک شتر از

خودشان اضافه فرمودند پس جمع آن‌ها به ۱۸ شتر رسید.

$$18 \times \frac{1}{2} = 9 \quad \text{سهم نفر اول:}$$

$$18 \times \frac{1}{3} = 6 \quad \text{سهم نفر دوم:}$$

$$18 \times \frac{1}{9} = 2 \quad \text{سهم نفر سوم:}$$

بنابراین تمام ارث تقسیم شده است:

$$9 + 6 + 2 = 17$$

و حضرت هم یک شتر خود را برداشتند.

توضیح: مشکل ظاهری این معما در عدد ۱۷ نیست بلکه در جمع این سه نسبت است که برابر با یک نمی‌شود:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18} < 1$$

معمولاً در تقسیم یک مقدار معین، نسبت‌ها طوری هستند که جمع آن‌ها یک می‌شود.

با این حال با همین شرایط هم صورت معما اشتباه نیست و قابل حل است.

مثال ساده‌تر زیر را در نظر می‌گیریم:

مثال: ۹ تومان را بین دو نفر طوری تقسیم کنید که به یکی $\frac{1}{3}$ و به دیگری $\frac{1}{4}$ کل مبلغ سهم برسد.

حل: در این جا هم جمع نسبت‌ها کمتر از یک است.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

سهم هر نفر را به نسبت کل سهم حساب می‌کنیم.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{3} \rightarrow 9 \times \frac{7}{3} = 21 \quad \text{سهم نفر اول:}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{7} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \rightarrow 9 \times \frac{7}{4} = 15.75 \quad \text{سهم نفر دوم:}$$

$$21 + 15.75 = 36.75$$

پس تمام ۹ تومان به نسبت‌های تعیین شده تقسیم شده است.

اکنون معمای ۱۷ شتر را با همین دیدگاه حل می‌کنیم.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{17} \times \frac{17}{2} = \frac{17}{2} \rightarrow 17 \times \frac{17}{2} = 144.5 \quad \text{سهم نفر اول:}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{17} \times \frac{17}{3} = \frac{17}{3} \rightarrow 17 \times \frac{17}{3} = 96.33 \quad \text{سهم نفر دوم:}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{17} \times \frac{17}{9} = \frac{17}{9} \rightarrow 17 \times \frac{17}{9} = 32.33 \quad \text{سهم نفر سوم:}$$

$$144.5 + 96.33 + 32.33 = 273.16$$

پس تمام ارث با نسبت‌های تعیین شده تقسیم شده است.

نکته جالب در این معما ابتکار عمل زیبای حضرت است که معما را به زبان بسیار ساده حل فرموده‌اند.