

ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)

محمد هاشم اعتمادزاده
عضو هیات علمی دانشگاه
آزاد اسلامی - واحد سبزوار

کتاب تالیفی دیگر

- | | |
|------|---------------------------|
| ۱۳۸۵ | ۱- ریاضیات (۱) و مسایل آن |
| ۱۳۸۹ | ۲- ریاضیات کاربردی |

بنام آنکه جان را فکرت آموخت
ز فضلش هر دو عالم گشت روشن
در آدم شد پدید این عقل و تمییز
همه از وهم توست این صورت غیر

چراغ دل ز نور جان بر افروخت
ز فیضش خاک آدم گشت گلشن
که تا دانست از آن اصل همه چیز
که نقطه دایره است از سرعت سیر

مقدمه

ریاضیات در تمام دوران جزء علوم پیشرو بوده است، از این جهت که مفاهیم ریاضی که به صورت انتزاعی بیان گردیده در همان زمان و یا در زمانی پس از آن مورد استفاده و کاربرد علوم دیگر قرار گرفته است؛ مثلاً هندسه ناقلیدسی ابتدا بصورت محض مطرح گردید ولی سالیانی بعد مبنایی برای نظریه نسبیت در فیزیک شد، از طرفی دیگر بعضی از مفاهیم ریاضی به ضرورت وارد این علم شده‌اند، مانند سری فوریه که از مطالعه فیزیک حرارت وارد ریاضیات شد؛ همچنین یک شاخه مهم ریاضیات بنام "تحقیق در عملیات" از کاوش دانشمندان در خلال تحقیق در عملیات جنگی ایجاد گردید.

در کتاب حاضر مفاهیم اولیه ریاضی برای دانشجویان رشته حسابداری و مدیریت آمده و هدف آن فراگیری فنون مشتق گیری و کاربردهای مشتق است، به جای اثبات قضایا و تعاریف دقیق، جنبه محاسباتی آن ترجیح داده شده و سعی بر این بوده که تمرینات متناسب با متن درس باشد تا دانشجویان با مراجعه به متن درس بتوانند تمرینات را حل کنند.

کتاب با مجموعه اعداد آغاز و در دو فصل بعدی به بررسی توابع و حد و پیوستگی آنها می‌پردازد. دو فصل آخر نیز در پایان به مشتق توابع و کاربردهای آن اختصاص یافته‌اند. از آقای مرتضی حیدرپور جهت ترسیم اشکال و تمام عزیزانی که در تهیه و تنظیم کتاب تلاش نموده‌اند صمیمانه سپاسگزارم .

محمد هاشم اعتمادزاده

زمستان ۱۳۹۰

فهرست مطالب

فصل اول. مجموعه اعداد

- ۱- یادآوری مجموعه‌ها ۱
- ۲- مجموعه اعداد صحیح، گویا و حقیقی ۶
- ۳- فاصله در اعداد حقیقی ۹
- ۴- مجموعه اعداد مختلط ۱۵
- ۵- تمرین ۱۷

فصل دوم. آشنایی با توابع

- ۱- تعریف تابع ۱۹
- ۲- تابع زوج و فرد و تابع معکوس ۲۵
- ۳- معادلات خط و دایره در صفحه ۳۰
- ۴- چند خاصیت رسم نمودارها ۳۹
- ۵- تمرین ۴۱
- ۶- تابع قدرمطلق و جزء صحیح ۴۳
- ۷- توابع نمایی و لگاریتمی ۴۶
- ۸- رشد نمایی ۵۲
- ۹- توابع مثلثاتی ۵۴
- ۱۰- تمرین ۶۲

فصل سوم. حد و پیوستگی

- ۱- حد تابع در نقطه ۶۵
- ۲- حد و بینهایت ۷۱
- ۳- تمرین ۷۳
- ۴- مجانب‌های تابع ۷۴

۷۶	 ۵- یک حد مهم
۷۸	 ۶- پیوستگی
۸۱	 ۷- تمرین

فصل چهارم . مشتق توابع

۸۵	 ۱- تعریف مشتق
۸۷	 ۲- محاسبه مشتق
۸۹	 ۳- تعبیر هندسی مشتق
۹۱	 ۴- مشتق توابع مثلثاتی
۹۲	 ۵- مشتق توابع نمایی و لگاریتمی
۹۴	 ۶- ارتباط بین پیوستگی و مشتق پذیری
۹۵	 ۷- تمرین
۹۷	 ۸- مشتق تابع مرکب
۱۰۰	 ۹- مشتق مراتب بالاتر
۱۰۲	 ۱۰- مشتق گیری ضمنی
۱۰۴	 ۱۱- تمرین
۱۰۵	 ۱۲- دیفرانسیل تابع
۱۰۷	 ۱۳- مشتق تابع معکوس
۱۰۹	 ۱۴- مشتق لگاریتمی
۱۱۰	 ۱۵- تمرین

فصل پنجم . کاربردهای مشتق

۱۱۳	 ۱- اکسترمم‌ها و نقاط بحرانی
۱۱۵	 ۲- تعیین اکسترمم‌های نسبی
۱۱۹	 ۳- تعیین اکسترمم‌های مطلق
۱۲۱	 ۴- نقطه عطف
۱۲۳	 ۵- تمرین
۱۲۴	 ۶- رسم نمودار توابع

۱۳۱	قاعده هوپیتال
۱۳۵	تمرین
۱۳۶	چند مثال کاربردی
۱۴۳	منابع

فصل اول

مجموعه اعداد

بسیاری از مباحث در ارتباط با مجموعه اعداد می‌باشند، مثلاً محاسبات ساده، روی مجموعه اعداد طبیعی یا اعداد کسری است و مفاهیمی مانند حد و مشتق روی فاصله‌ها در مجموعه اعداد حقیقی قابل بیان هستند.

معادله $x^2 + x + 1 = 0$ در مجموعه اعداد حقیقی جواب ندارد ولی در مجموعه بزرگتری با عنوان مجموعه اعداد مختلط دو جواب دارد.

۱- یادآوری مجموعه‌ها

دانشجویان عموماً در دوره دبیرستان و یا در درس ریاضیات پیش دانشگاهی با مجموعه‌ها آشنا شده‌اند. در اینجا به یادآوری آن می‌پردازیم.

هرگاه با دسته‌ای از اشیاء که مشخص و متمایز باشند مواجه شویم، آن را مجموعه می‌نامیم. مجموعه‌ها را معمولاً با حروف بزرگ نمایش می‌دهیم.

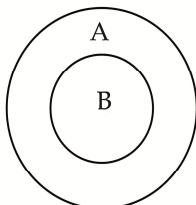
$$A = \{2, 4, \Delta, \oplus\}, \quad B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$$

$$\oplus \in A, \quad 6 \notin A, \quad 15 \in B, \quad 7 \notin B$$

A یک مجموعه متناهی و B یک مجموعه نامتناهی است.

۲ فصل اول

اگر هر عنصر مجموعه B متعلق به مجموعه A باشد، B را زیر مجموعه A می‌نامیم.

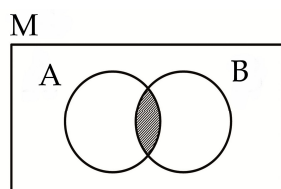


مجموعه بدون عضو را با $\emptyset$ نشان داده می‌شود و همواره $\emptyset \subseteq A$ ، در هر زمینه‌ای که با مجموعه‌ها سرو کار داریم به طور قراردادی می‌توان مجموعه‌ای را به عنوان **مجموعه مرجع** انتخاب کرد به طوریکه سایر مجموعه‌ها زیر مجموعه آن باشند، معمولاً مجموعه مرجع را با M یا U نمایش می‌دهند.

اعمال روی مجموعه‌ها

اشتراک دو مجموعه

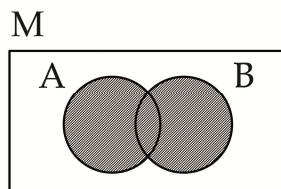
$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$



$$A \cap B$$

اجتماع دو مجموعه

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

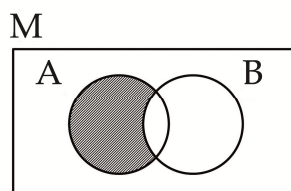


$$A \cup B$$

مجموعه اعداد ۳

تفاضل دو مجموعه

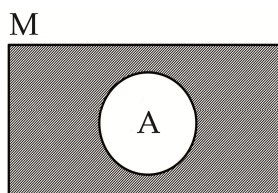
$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$



$$A - B$$

متمم مجموعه

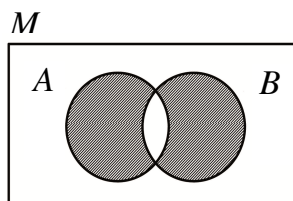
$$A' = \{x \mid x \in M, x \notin A\}$$



$$A'$$

تفاضل متقارن دو مجموعه

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



$$A \Delta B$$

چند خاصیت و رابطه در مجموعه‌ها

$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases} \quad \text{خاصیت جابجایی}$$

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases} \quad \text{خاصیت پخش پذیری}$$

$$\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases} \quad \text{خاصیت شرکت پذیری}$$

$$\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases} \quad \text{خاصیت دمورگان}$$

$$\begin{cases} A \cup \phi = A \\ A \cap \phi = \phi \\ A \cap M = A \\ A \cup M = M \\ A \cup A' = M \\ A \cap A' = \phi \\ A - B = A \cap B' \\ A' = M - A \end{cases}$$

مثال. اگر $M = \{1, 2, 3, \dots, 7, 8\}$ ، $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$ ، روابط زیر را تحقیق کنید.

$$A - B = A \cap B' \quad \text{الف)}$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \quad \text{ب)}$$

مجموعه اعداد ۵

$$A - B = \{1, 3\}$$

(حل الف)

$$B' = \{1, 3, 5, 7, 8\} \Rightarrow A \cap B' = \{1, 3\}$$

بنابراین

$$A - B = A \cap B'$$

(حل ب)

$$\begin{cases} A - B = \{1, 3\} \\ B - A = \{6\} \end{cases} \Rightarrow A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 3, 6\}$$

از طرفی

$$\begin{cases} A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\} \\ A \cap B = \{2, 4\} \end{cases} \Rightarrow (A \cup B) - A \cap B = \{1, 3, 6\}$$

بنابراین

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

مثال. اگر $M = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ و $A = \{8, 9, 10\}$ و $B = \{7, 8, 9\}$ و روابط زیر را تحقیق کنید.

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{(الف)}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{(ب)}$$

(حل الف)

$$A \cup B = \{7, 8, 9, 10\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\begin{cases} A' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ B' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\} \end{cases} \Rightarrow A' \cap B' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

بنابراین

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

(حل ب)

$$B \cup C = \{3, 4, 7, 8, 9\} \Rightarrow A \cap (B \cup C) = \{8, 9\}$$

$$\begin{cases} A \cap B = \{۸, ۹\} \\ A \cap C = \{۸\} \end{cases} \Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{۸, ۹\}$$

بنابراین

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

۲- مجموعه اعداد صحیح، گویا و حقیقی

مجموعه اعدادی که شمارش با آنها انجام می‌گیرد مجموعه اعداد طبیعی نام دارند، این مجموعه را با N نمایش می‌دهیم.

$$N = \{۱, ۲, ۳, ۴, \dots\}$$

مثال. اعضای مجموعه‌های زیر در مقابل آن آمده است.

$$A = \{x \in N \mid x^2 = ۴\} = \{۲\}$$

$$B = \{x \in N \mid x + ۵ < ۱۰\} = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

$$C = \{x \in N \mid x = ۲k - ۱, k \in N\} = \{۱, ۳, ۵, ۷, \dots\}$$

مثال. اگر A مجموعه اعداد طبیعی زوج کمتر از ۵۱ و B مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳ کمتر از ۳۱ باشد، $A \cap B$ و $B - A$ را بیابید.

حل.

$$A = \{۲, ۴, ۶, \dots, ۴۸, ۵۰\}$$

$$B = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۲۱, ۲۴, ۲۷, ۳۰\}$$

$$A \cap B = \{۶, ۱۲, ۱۸, ۲۴, ۳۰\}$$

$$B - A = \{۳, ۹, ۱۵, ۲۱, ۲۷\}$$

مجموعه اعداد صحیح را با Z نمایش می‌دهیم و عبارت است از

$$Z = \{\dots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$$

بسادگی دیده می‌شود $N \subseteq Z$.

مجموعه اعداد گویا را با Q نمایش می‌دهیم و اعضای آن کسرهایی با صورت ومخرج اعداد صحیح می‌باشند.

مجموعه اعداد ۷

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

$$\frac{5}{2} \in Q, \quad 2 = \frac{2}{1} \in Q, \quad -\frac{4}{5} \in Q, \quad 0 = \frac{0}{1} \in Q$$

هر عدد صحیح را می‌توان به یک کسر با مخرج یک تبدیل کرد. بنابراین

$$N \subseteq Z \subseteq Q$$

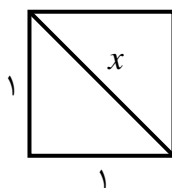
مثال. اعضای مجموعه‌های زیر در مقابل آن آمده است.

$$A = \left\{ x \in Q \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = 0 \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, -3 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in Z \mid \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = 0 \right\} = \{-3\}$$

$$C = \{x \in Z \mid 5x + 1 = 3\} = \emptyset$$

مربعی به طول واحد را در نظر می‌گیریم، بنا به رابطه فیثاغورث



$$x^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow x^2 = 2$$

به سادگی می‌توان ثابت نمود که x نمی‌تواند یک کسر باشد، در واقع عددی وجود دارد که قطر

مربعی به طول واحد است ولی گویا نیست. این نوع اعداد را که گویا نیستند اعداد گنگ یا اصم

نامیده و با Q' نمایش می‌دهیم.

مثال. اعداد اعشاری زیر گویا هستند.

$$0.12 = \frac{12}{100} \in Q$$

$$2.25 = 2 + \frac{25}{100} = \frac{225}{100} \in Q$$

۸ فصل اول

$$\begin{aligned} 0/1234 &= \frac{1234}{10000} \in Q \\ -1/07 &= -(1 + \frac{7}{100}) = -\frac{107}{100} = \frac{-107}{100} \in Q \end{aligned}$$

مثال. عدد $2/3$ گنگ است یا گویا؟

حل. قرار می‌دهیم

$$x = 2/3$$

$$10x = 23/3$$

طرفین دو معادله بالا را از هم کم می‌کنیم.

$$10x - x = 23/3 - 2/3$$

$$9x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{9}$$

بنابراین

$$2/3 = \frac{21}{9} \in Q$$

با توجه به مثال‌های فوق، اعداد اعشاری که تعداد اعشار آنها متناهی و یا دارای دوره گردش هستند گویا می‌باشند. از طرفی دیگر، اعداد اعشاری که تعداد اعشار آنها نامتناهی و بدون دوره گردش است اعداد گنگ می‌باشند.
مثال. اعداد اعشاری زیر گنگ هستند.

$$0/24681012..... \in Q'$$

$$\pi = 3/141592... \in Q'$$

$$\sqrt{2} = 1/41421... \in Q'$$

$$\sqrt[3]{5} = 1/70997... \in Q'$$

$$e = 2/718281... \in Q'$$

چند نکته:

۱- جمع یک عدد گویا با یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲- ضرب یک عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۳- معکوس یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۴- اگر n مربع کامل نباشد، $\sqrt{n}$ عددی گنگ است. ($n \in N$)

$$\sqrt{5} \in Q', \quad \sqrt{16} = 4 \in N, \quad 5 + \sqrt{2} \in Q'$$

$$5\sqrt{3} \in Q', \quad \frac{1}{\pi} \in Q'$$

مجموعه اعداد حقیقی را با R نشان می‌دهیم و اعضای آن اجتماع تمام اعداد گویا و گنگ می‌باشد، به عبارت دیگر

$$R = Q \cup Q'$$

بنا به تعریف R ، هر عدد گویا، عددی حقیقی می‌باشد، بنابراین

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$$

مثال. اعضای مجموعه‌های زیر در مقابل آن آمده است.

$$A = \{x \in R \mid x^2 = 2\} = \{\pm\sqrt{2}\}$$

$$B = \{x \in Q \mid x^2 = 2\} = \emptyset$$

مفاهیم ریاضیات عمومی معمولاً روی اعداد حقیقی بیان می‌شوند. (مانند حد، مشتق، انتگرال) لذا این مجموعه از اهمیت خاصی برخوردار است. هر عدد حقیقی، متناظر با یک نقطه روی خط زیر است.



این خط را محور اعداد حقیقی می‌نامیم.

۳- فاصله در اعداد حقیقی

فاصله بسته

$$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$$



۱۰ فصل اول

فاصله باز

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



فاصله نیمه باز

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



فاصله بی کران

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$



فاصله بی کران

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$



مثال. اگر $A = (-2, 2)$ ، اعضای A تمام اعداد حقیقی بین -2 و 2 می باشد.



مجموعه اعداد ۱۱

$$1 \in A, \sqrt{2} \in A, -1 \in A, 2 \notin A$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \in A, \sqrt{3} + \sqrt{2} \notin A$$

مثال. اگر $A = [-3, 1]$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 1\}$ ، مجموعه B زیرمجموعه A است ولی با A مساوی نیست. (چرا؟)

مثال. جواب نامعادله $3x - 6 \geq 0$ را به صورت فاصله بنویسید.
حل.

$$3x - 6 \geq 0 \rightarrow 3x \geq 6 \rightarrow x \geq 2$$

بنابراین

$$x \in [2, +\infty)$$

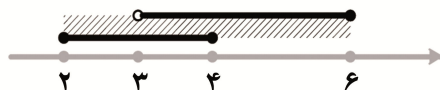
مثال. عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $[2, 4] \cup (3, 6]$

ب) $(-\infty, 3) \cap [-1, 4]$

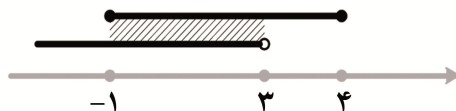
حل الف)

$$[2, 4] \cup (3, 6] = [2, 6]$$



حل ب)

$$(-\infty, 3) \cap [-1, 4] = [-1, 3)$$



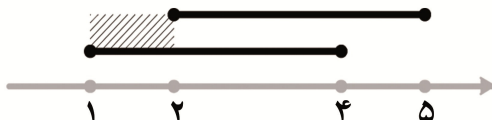
مثال. عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $[1, 4] - [2, 5]$

ب) $[-1, 2)'$

حل الف)

$$[1,4] - [2,5] = [1,2)$$



حل ب)

$$[-1,2)' = (-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$$



حاصل ضرب دکارتی

هرگاه A و B دو مجموعه باشند، حاصل ضرب دکارتی A و B به صورت زیر است.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

در تعریف بالا، عبارت (a, b) زوج مرتب و هر زیرمجموعه $A \times B$ یک رابطه از A به B نامیده می‌شود.

مثال. اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{-3, 0, 1\}$ داریم

$$A \times B = \{(1, -3), (1, 0), (1, 1), (2, -3), (2, 0), (2, 1)\}$$

$$B \times A = \{(-3, 1), (-3, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$$

در این مثال دیده می‌شود که

$$A \times B \neq B \times A$$

اگر A مجموعه n عضوی و B مجموعه m عضوی باشد، $A \times B$ مجموعه $n \times m$ عضوی است.

مثال. فرض کنیم $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{2, 3, 7, 8\}$ ، مجموعه $(A \cap B) \times B$ چند عضو دارد؟

مجموعه اعداد ۱۳

حل. $A \cap B = \{2, 3\}$ پس $A \cap B$ مجموعه ۲ عضوی و B مجموعه ۴ عضوی است، بنابراین $(A \cap B) \times B$ مجموعه ۸ عضوی می باشد.

بسط دوجمله ای نیوتن

از اتحادها داریم

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

اگر n عددی طبیعی باشد، به طور کلی فرمولی برای $(x + y)^n$ وجود دارد، برای بیان این فرمول، ابتدا چند نماد ریاضی را تعریف می کنیم.

نماد $\sum$

برای جمع چند متغیر اندیس دار از نماد سیگما استفاده می کنیم.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

به مثالهای زیر توجه کنید.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_9 = \sum_{i=1}^9 x_i$$

$$x_3 + x_4 + \dots + x_{15} = \sum_{i=3}^{15} x_i$$

$$x_0 + x_1 + \dots + x_8 = \sum_{i=0}^8 x_i$$

نماد $n!$

فرض کنیم n عددی صحیح و مثبت باشد، تعریف n فاکتوریل به صورت زیر است.

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

مثلاً

$$1! = 1 \quad \text{و} \quad 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6, \quad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

تعریف می کنیم $0! = 1$

$$\binom{n}{r} \text{ نماد}$$

فرض کنیم n و r اعدادی صحیح و مثبت باشند و $r \leq n$ ، ضریب دوجمله‌ای $\binom{n}{r}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثلاً

$$\binom{6}{0} = \frac{6!}{0!(6-0)!} = 1 \quad \text{و} \quad \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4, \quad \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

فرض کنیم n عددی طبیعی باشد، داریم

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r y^{n-r}$$

فرمول بالا را بسط دوجمله‌ای نیوتن می‌نامیم، مثلاً به ازای $n=2$ اتحاد مربع بدست می‌آید.

$$(x+y)^2 = \sum_{r=0}^2 \binom{2}{r} x^r y^{2-r} = \binom{2}{0} x^0 y^2 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^2 y^0$$

$$(x+y)^2 = y^2 + 2xy + x^2$$

مثال. ضریب x^4 را در بسط $(1+x)^6$ بیابید.

حل. جمله‌ای را در بسط در نظر می‌گیریم که شامل x^4 باشد.

$$\binom{6}{2} (1)^2 \cdot x^4 = 15x^4$$

مثال. ضریب x^{10} را در بسط $(2+x^2)^8$ بیابید.

حل. جمله‌ای را در بسط در نظر می‌گیریم که شامل x^{10} باشد.

$$\binom{8}{3} (x^2)^3 \cdot (x^2)^5 = \binom{8}{3} \times 8x^{10} = 56 \times 8x^{10} = 448x^{10}$$

مثال. ضریب x^{14} را در بسط $(x^4 - x^2)^5$ بیابید.

حل. در بسط $(x^4 + (-x^2))^5$ جمله‌ای را در نظر می‌گیریم که شامل x^{14} باشد.

$$\binom{5}{2} (x^4)^2 \cdot (-x^2)^3 = -\binom{5}{2} x^8 \cdot x^6 = -10x^{14}$$

۴- مجموعه اعداد مختلط

می‌دانیم در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر $\Delta \geq 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی دارد و اگر

$\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد. در اینجا مجموعه اعدادی معرفی می‌شوند که هر

معادله درجه دوم به صورت بالا ریشه داشته باشد. معادله $x^2 + 1 = 0$ ریشه حقیقی ندارد

ولی می‌توان x را بدست آورد.

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

$\sqrt{-1}$ عدد حقیقی نیست ولی ریشه معادله می‌باشد، قرار می‌دهیم $i = \sqrt{-1}$ لذا $i^2 = -1$.

فرض کنیم $x, y \in R$ عبارت $x + iy$ را یک عدد مختلط با قسمت حقیقی x و قسمت

موهومی y می‌نامیم. مثلاً $z = 2 + 3i$ عددی مختلط است با قسمت حقیقی ۲ و قسمت

موهومی ۳ همچنین $z = 5 - 4i$ عددی مختلط است با $x = 5$ ، $y = -4$ ، مجموعه

اعداد مختلط را با C نشان می‌دهیم.

$$C = \{x + iy \mid x, y \in R\}$$

$$2 + 3i \in C, \quad 7 = 7 + 0i \in C, \quad 4i = 0 + 4i \in C$$

اگر قسمت موهومی را برابر با صفر قرار دهیم، هر عدد حقیقی یک عدد مختلط نیز هست

بنابراین

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$$

۱۶ فصل اول

جمع و ضرب اعداد مختلط مانند اعداد حقیقی است

$$(2+3i) + (4+5i) = 6+8i$$

$$(-2+i) + (7-3i) = 5-2i$$

$$(2+i) - (-3+4i) = 5-3i$$

$$2-3i+4-4i+3=9-7i$$

$$(2+3i)(1+4i) = 2+8i+3i-12 = -10+11i, \quad (i^2 = -1)$$

$$(1-i)(-3+2i) = -3+2i+3i+2 = -1+5i$$

اگر $z = x+iy$ ، عدد $\bar{z} = x-iy$ مزدوج عدد z نامیده می شود.

$$z = 4+5i \rightarrow \bar{z} = 4-5i$$

$$z = 3-2i \rightarrow \bar{z} = 3+2i$$

برای تقسیم دو عدد مختلط، صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم.

$$\frac{2+3i}{1+2i} = \frac{2+3i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{2-4i+3i+6}{1-2i+2i+4} = \frac{8-i}{5} = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$$

نکته. اگر $a > 0$

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a \times -1} = \sqrt{a} i$$

$$\sqrt{-\lambda} = \sqrt{\lambda} i$$

مثال. ریشه های معادله $x^2 - 2x + 4 = 0$ را بیابید.

حل.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 16 = -12$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 + \sqrt{12} i}{2} = 1 + \sqrt{3} i$$

مجموعه اعداد ۱۷

$$x_r = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 - \sqrt{12}i}{2} = 1 - \sqrt{3}i$$

اگر $x + iy$ ، قدر مطلق z به صورت زیر است.

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثلاً

$$|3 - 4i| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

مثال. اگر $z_1 = 1 - 3i$ و $z_2 = 2 - i$ مقدار $\left| \frac{z_1 + 2z_2}{z_1 z_2} \right|$ را بیابید.

حل.

$$z_1 + 2z_2 = 1 - 3i + 2(2 - i) = 1 - 3i + 4 - 2i = 5 - 5i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - 3i)(2 - i) = 2 - i - 6i - 3 = -1 - 7i$$

$$\frac{z_1 + 2z_2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{5 - 5i}{-1 - 7i} \times \frac{-1 + 7i}{-1 + 7i} = \frac{-5 + 35i + 5i + 35}{1 - 7i + 7i + 49}$$

$$= \frac{30 + 40i}{50} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

$$\left| \frac{z_1 + 2z_2}{z_1 \cdot z_2} \right| = \left| \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$$

۵- تمرین

۱- اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

$$A = \{x \in N \mid 4 \leq x + 3 \leq 8\}$$

$$B = \{x \in Z \mid 16 \leq x^2 \leq 36\}$$

$$C = \{x \in N \mid x = 2k, k \in N\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x - \frac{1}{4})(x^2 - 5) = 0\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - \frac{1}{4})(x^2 - 5) = 0\}$$

۲- اعداد $0/4$ و $1/\sqrt{21}$ را به کسر تبدیل کنید.

۳- عبارت های زیر را به دست آورید.

$$(-2, 4) \cap (1, 2] \quad , \quad (-\infty, 4] \cap [-4, +\infty]$$

$$[-1, 4) \cup [0, 2] \quad , \quad [1, 4] - (-1, 2]$$

$$(-\infty, 5] \cup (2, 4] \quad , \quad N \cap (-4, 4)$$

۴- بسط دوجمله ای $(x + y)^4$ را بیابید.

۵- ضریب y^3 را در بسط $(y - 1)^6$ بیابید.

۶- ضریب x را در بسط $(x + \frac{1}{x})^6$ بیابید.

۷- اگر $z_1 = 1 - 2i$ و $z_2 = 2 + 3i$ ، محاسبات زیر را انجام دهید.

$$z_1 z_2 \quad \text{ب)} \quad -2z_1 + 3z_2 \quad \text{الف)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} \quad \text{ت)} \quad iz_1 - 2z_2 \quad \text{پ)}$$

۸- ساده کنید.

$$\left| \frac{2+i}{(1-i)(1+2i)} \right| \quad \text{ب)} \quad \left| i^{26} - 5i^3 + 7 \right| \quad \text{الف)}$$

۹- ریشه های معادلات زیر را بیابید.

$$2x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^3 + x^2 + x = 0$$

۱۰- اگر $A = \{3, 4, 5\}$ و $B = \{2, 3, 8\}$ ، یک رابطه از A به B بنویسید که ۶ عضوی باشد.

۱۱- اگر $A_i = \{x \in N \mid x \leq i\}$ ، مجموعه $(A_4 - A_3) \times A_3$ چند عضو دارد؟

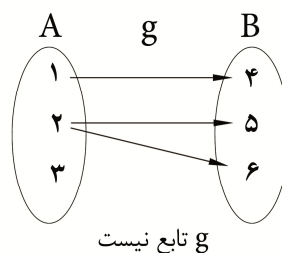
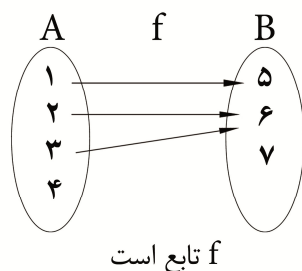
فصل دوم

آشنایی با توابع

هرگاه بین دو متغیر ارتباط وجود داشته باشد، تغییر یکی از این دو باعث تغییر دیگری می‌شود، این ارتباط در بسیاری از موارد با تابع بیان می‌شود. مثلاً اگر شعاع دایره‌ای r باشد، مساحت آن از رابطه $S = \pi r^2$ بدست می‌آید. در این مثال با تغییر شعاع، مساحت دایره تغییر می‌کند و مساحت دایره تابعی از شعاع آن است.

۱- تعریف تابع

یک تابع f از مجموعه A به مجموعه B ، یک رابطه از A به B است، به طوری که هر $x \in A$ حداکثر با یک $y \in B$ در رابطه است و آن را با علامت $f: A \rightarrow B$ یا $A \xrightarrow{f} B$ نشان می‌دهیم.



علامت $y = f(x)$ به این معناست که عضو x تحت تابع f با عضو y در رابطه است معمولاً توابع دارای ضابطه هستند.

مثال. تابع $f: R \rightarrow R$ با ضابطه $f(x) = x^2 - 1$ داده شده است، داریم

$$f(0) = -1, \quad f(2) = 3, \quad f(-1) = 0$$

تعریف. هر تابعی به صورت $f: R \rightarrow R$ تابع حقیقی نام دارد (در این کتاب، توابع حقیقی فرض می‌شوند).

تعریف. هرگاه $y = f(x)$ یک تابع باشد، مجموعه تغییرات x را دامنه f و مجموعه تغییرات y را برد f می‌نامیم و به ترتیب با علامت D_f و R_f نشان می‌دهیم.

مثال. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2x-1}$ را تعیین کنید.

حل. باید زیر رادیکال مثبت باشد.

$$2x-1 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$D_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

مثال. دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ را بیابید.

حل. باید مخرج کسر مخالف صفر باشد.

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$D_f = R - \{\pm 1\}$$

مثال. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2x-4}}$ را بیابید.

حل. باید زیر رادیکال مثبت باشد.

$$\frac{1-x}{2x-4} \geq 0$$

کسر را تعیین علامت می‌کنیم.

$$1-x=0 \rightarrow x=1$$

$$2x-4=0 \rightarrow x=2$$

آشنایی با توابع ۲۱

x		۱		۲	
$۱-x$	+	•	-		-
$۲x-۴$	-		-	•	+
$\frac{۱-x}{۲x-۴}$	-		±		-

بنابراین

$$D_g = [۱, ۲)$$

مثال. برد تابع $f(x) = x^۴ + ۳$ را تعیین کنید.

حل. قرار می‌دهیم $y = x^۴ + ۳$

$$x^۴ \geq ۰ \rightarrow x^۴ + ۳ \geq ۳ \rightarrow y \geq ۳$$

برد، مجموعه تغییرات y می‌باشد، بنابراین

$$R_f = [۳, +\infty)$$

مثال. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ + x - ۶}$ را بیابید.

حل.

$$x^۲ + x - ۶ \geq ۰$$

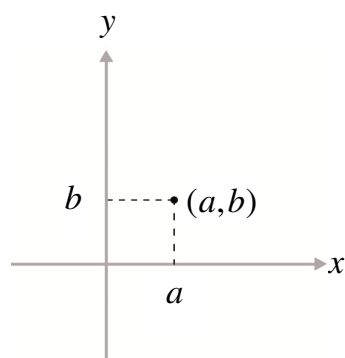
$$x^۲ + x - ۶ = (x - ۲)(x + ۳) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۳ \end{cases}$$

x		-۳		۲	
$x^۲ - x + ۶$	±	•	-	•	±

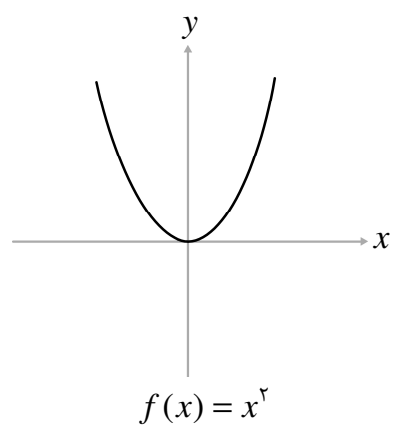
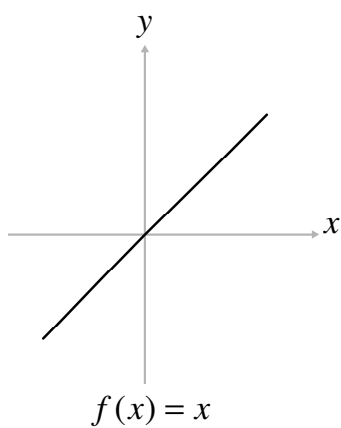
$$D_f = (-\infty, -۳] \cup [۲, +\infty)$$

نمودار توابع

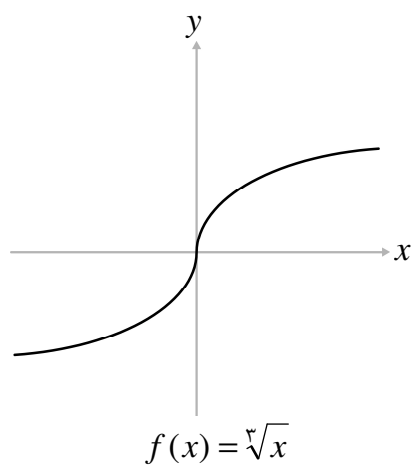
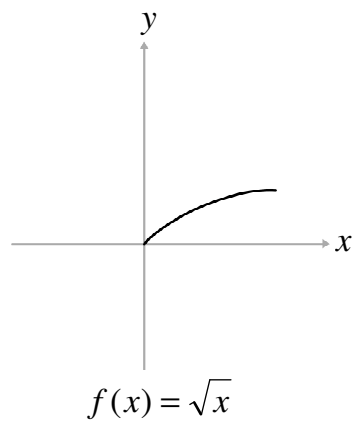
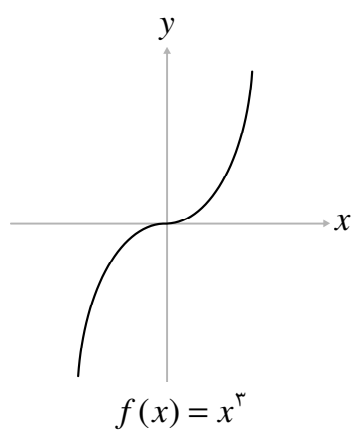
صفحه مختصات از دو محور اعداد حقیقی تشکیل شده است که بر هم عمود هستند و هر زوج مرتب (a, b) متناظر با یک نقطه در صفحه می‌باشد.



تعریف . نمودار تابع $y = f(x)$ نقاطی در صفحه است که مختصات آن در معادله $y = f(x)$ صدق کند.
مثال. نمودار چند تابع در زیر آمده است.

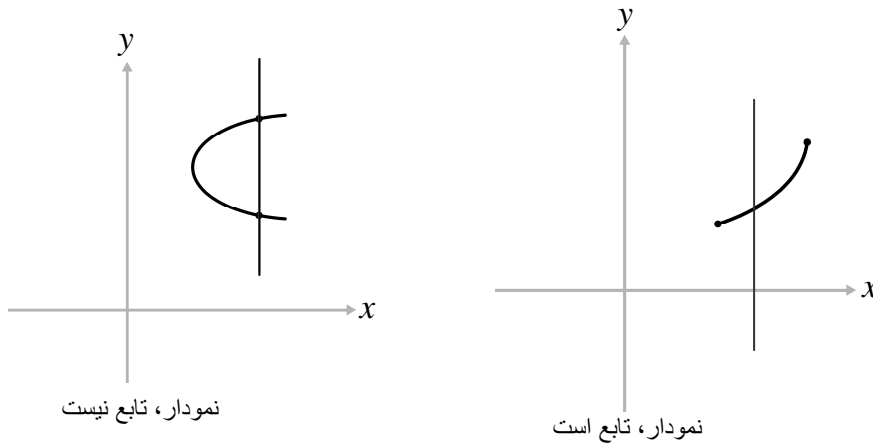


آشنایی با توابع ۲۳



۲۴ فصل دوم

توجه. اگر هر خط موازی محور y ها، حداکثر نمودار f را در یک نقطه قطع کند، f تابع است.



اعمال روی توابع

تابع f با g مساوی است، هرگاه دامنه و ضابطه یکسان داشته باشند.

مثال. نشان دهید توابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ و $g(x) = x^2 - 1$ مساوی هستند.

حل. داریم

$$D_f = D_g$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = x^2 - 1 = g(x)$$

بنابراین تابع f با تابع g مساوی است.

مثال. تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ با تابع $g(x) = x - 1$ مساوی نیست. (چرا؟)

هرگاه f و g دو تابع حقیقی باشند، برای جمع، ضرب و تقسیم آنها، ضابطه‌های آنها را با هم به ترتیب، جمع، ضرب یا تقسیم می‌کنیم.

ترکیب تابع f با g را **تابع مرکب** می‌نامیم و بدین صورت تعریف می‌شود.

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

آشنایی با توابع ۲۵

مثال. اگر $f(x) = \frac{1}{x+4}$ و $g(x) = \sqrt{x+3}$ موارد زیر را بیابید.

$$f \circ g(x), \quad g \circ f(x), \quad f \circ f(x)$$

حل.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)+4} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+4}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)+3} = \sqrt{\frac{1}{x+4}+3}$$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x+4}+4}$$

در این مثال ملاحظه می‌شود $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$

۲- تابع زوج و فرد و تابع معکوس

تابع $y = f(x)$ را زوج می‌نامیم، هرگاه $x, -x \in D_f$ و $f(-x) = f(x)$

تابع $y = f(x)$ را فرد می‌نامیم، هرگاه $x, -x \in D_f$ و $f(-x) = -f(x)$

مثال. زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \frac{x^5 + 1}{x^6}, \quad g(x) = x^3, \quad h(x) = x^5 + x + 1$$

حل.

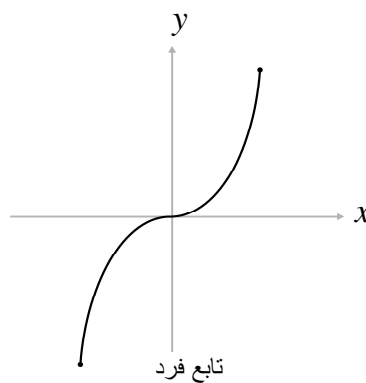
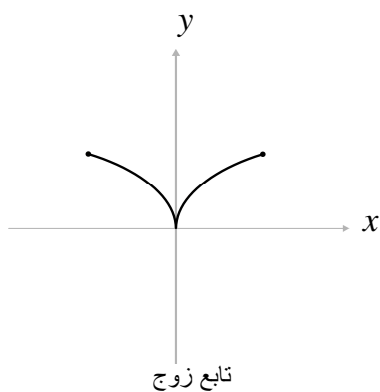
$$f(-x) = \frac{(-x)^5 + 1}{(-x)^6} = \frac{x^5 + 1}{x^6} = f(x) \quad \text{زوج}$$

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x) \quad \text{فرد}$$

$$h(-x) = (-x)^5 + (-x) + 1 = x^5 - x + 1 \neq \begin{cases} h(x) \\ -h(x) \end{cases} \quad \text{هیچ کدام}$$

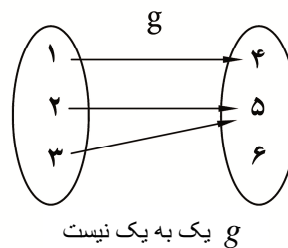
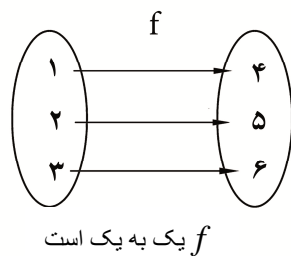
۲۶ فصل دوم

نکته. نمودار تابع زوج، نسبت به محور y متقارن و نمودار تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.



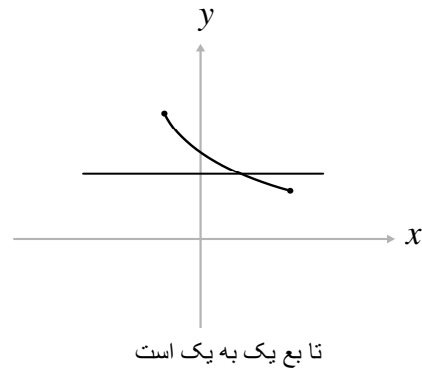
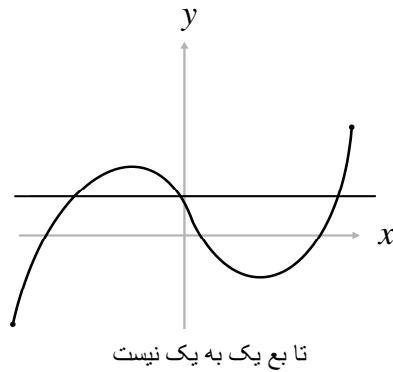
تابع معکوس

تابع $y = f(x)$ را یک به یک می‌نامیم، هرگاه برای هر $y \in R_f$ دقیقاً یک $x \in D_f$ باشد، به طوری که $y = f(x)$



نکته. اگر هر خط موازی محور x ها، نمودار تابع f را حداکثر در یک نقطه قطع کند، f تابع یک به یک است.

آشنایی با توابع ۲۷



تعریف. فرض کنیم $y = f(x)$ تابعی یک به یک باشد، معکوس تابع f ، تابعی مانند f^{-1} است که ضابطه آن به صورت زیر است

$$f^{-1}(a) = b \Leftrightarrow f(b) = a$$

مثلاً اگر $f(2) = 3$ بنا به تعریف، $f^{-1}(3) = 2$ ، یعنی اگر نقطه $(2, 3)$ روی نمودار f باشد، نقطه $(3, 2)$ روی نمودار f^{-1} است.

تذکر. در تعریف بالا اگر شرط یک به یک بودن f حذف شود، f^{-1} لزوماً تابع نیست.

چند خاصیت

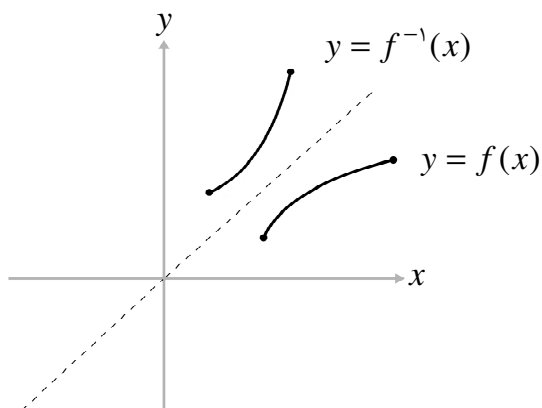
۱- در تابع معکوس جای دامنه و برد عوض می‌شود.

$$\begin{cases} D_{f^{-1}} = R_f \\ R_{f^{-1}} = D_f \end{cases}$$

۲- ترکیب هر تابع با معکوس خودش، x می‌شود.

$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x \\ f^{-1} \circ f(x) = x \end{cases}$$

۳- نمودار تابع f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (خط $y = x$) متقارن است.



مثال. اگر $f = \{(2, 3), (-2, 5), (7, -8)\}$ تابع f^{-1} را بیابید.

حل. بنا به تعریف f^{-1} داریم

$$f^{-1} = \{(3, 2), (5, -2), (-8, 7)\}$$

برای تعیین ضابطه f^{-1} از ضابطه f استفاده می‌کنیم، به مثال‌های زیر توجه نمایید.

مثال. معکوس تابع $f(x) = 3x + 4$ را بیابید.

حل. قرار می‌دهیم $y = 3x + 4$ ، سپس x را برحسب y به دست می‌آوریم.

$$y = 3x + 4 \rightarrow 3x = y - 4 \rightarrow x = \frac{1}{3}y - \frac{4}{3}$$

اکنون با تعویض x با y به دست می‌آید

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

ضابطه f^{-1} برابر است با

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

مثال. معکوس تابع $f(x) = \frac{x+1}{x}$ را بیابید.

حل. قرار می دهیم $y = \frac{x+1}{x}$

$$y = \frac{x+1}{x} \rightarrow yx = x+1$$

$$yx - x = 1 \rightarrow x(y-1) = 1$$

$$x = \frac{1}{y-1}$$

با تعویض x با y به دست می آید

$$y = \frac{1}{x-1}$$

ضابطه f^{-1} برابر است با

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$$

مثال. معکوس تابع $f(x) = x^2 + 4$ ($x \geq 0$) را بیابید.

حل. قرار می دهیم $y = x^2 + 4$

$$y = x^2 + 4 \rightarrow x^2 = y - 4$$

$$x = \pm \sqrt{y-4} \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{y-4}$$

با تعویض x با y داریم

$$y = \sqrt{x-4}$$

بنابراین

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-4}$$

مثال. معکوس تابع $y = x^2 - 2x + 3$ ($x \geq 1$)، تابع $y = x - 3$ را با کدام طول قطع می کند؟

۳۰ فصل دوم

حل. معکوس تابع $y = x - 3$ را بدست می‌آوریم.

$$y = x - 3 \rightarrow x = y + 3$$

با تعویض x با y داریم

$$y = x + 3$$

نقاط برخورد $y = x + 3$ و $y = x^2 - 2x + 3 (x \geq 1)$ را می‌یابیم.

$$x^2 - 2x + 3 = x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

بنا به شرط $x \geq 1$ ، فقط $x = 3$ قابل قبول است. نقطه $(3, 6)$ نقطه برخورد

$y = x^2 - 2x + 3$ و معکوس تابع $y = x - 3$ است، بنابراین برخورد معکوس تابع

$y = x^2 - 2x + 3 (x \geq 1)$ و تابع $y = x - 3$ در نقطه $(6, 3)$ با طول $x = 6$ است.

۳- معادلات خط و دایره در صفحه

رابطه $y = mx + b$ معادله یک خط در صفحه است، m را شیب خط (ضریب زاویه خط) و b را عرض از مبدأ خط می‌نامیم.

هرگاه دو نقطه از خط مانند $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ معلوم باشند، شیب و معادله خط به صورت زیر است.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{و} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال. معادله خطی را بیابید که دو نقطه آن $A(2, -3)$ و $B(1, 2)$ است.

حل. بنا به فرمول

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 2}{2 - 1} = -5$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = -5(x - 2)$$

$$y + 3 = -5x + 10$$

$$y = -5x + 7$$

آشنایی با توابع ۳۱

قضیه. دو خط با هم موازی هستند، هرگاه $m_1 = m_2$ و دو خط برهم عمود هستند، هرگاه

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

مثال. معادله خطی را بیابید که از نقطه $A(2,0)$ عبور می‌کند و با خط

$$-2x + 4y = 1$$
 موازی است.

حل. ابتدا شیب خط را می‌یابیم

$$-2x + 4y = 1 \rightarrow 4y = 2x + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$$

معادله خط به صورت زیر است.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

مثال. معادله خطی را بیابید که از نقطه $A(-1,2)$ عبور می‌کند و بر خط $y = -2x + 3$

عمود است.

حل. ابتدا شیب خط را می‌یابیم.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$-2m_2 = -1 \rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

معادله خط به صورت زیر است.

$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

مثال. نقطه برخورد دو خط $y = 2x + 1$ و $y = 5x - 2$ را تعیین کنید.

۳۲ فصل دوم

حل. از تساوی $y = y$ داریم

$$2x + 1 = 5x - 2 \rightarrow -3x = -3 \rightarrow x = 1$$

به ازای $x = 1$ داریم $y = 3$ ، بنابراین نقطه برخورد این دو خط $A(1, 3)$ می باشد.

مثال. نقطه برخورد دو خط $2x - y = 1$ و $3y - x = 3$ را تعیین کنید.

حل. داریم

$$2x - y = 1 \rightarrow y = 2x - 1$$

$$3y - x = 3 \rightarrow y = \frac{x}{3} + 1$$

از تساوی $y = y$ داریم

$$2x - 1 = \frac{x}{3} + 1 \rightarrow \frac{5}{3}x = 2 \rightarrow x = \frac{6}{5}$$

به ازای $x = \frac{6}{5}$ داریم $y = \frac{7}{5}$ ، بنابراین نقطه برخورد این دو خط $A(\frac{6}{5}, \frac{7}{5})$ می باشد.

مثال. مقدار t را طوری بیابید که سه نقطه $A(1, 2)$ ، $B(3, 4)$ و $C(4, t)$ روی یک خط راست باشند.

حل. باید شیب خطی که از نقاط A و B عبور می کند با شیب خطی که از نقاط A و C عبور می کند مساوی باشد.

$$m_{AC} = \frac{2-t}{1-4} \text{ و } m_{AB} = \frac{2-4}{1-3} = 1$$

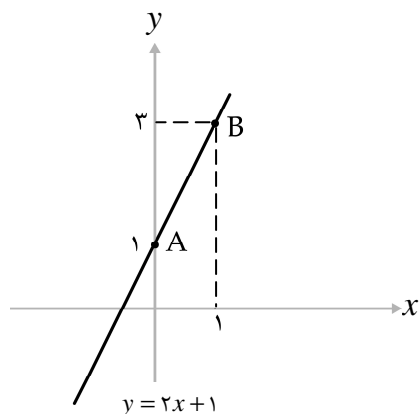
$$m_{AB} = m_{AC} \rightarrow 1 = \frac{2-t}{1-4} \rightarrow t = 5$$

مثال. نمودار تابع $f(x) = 2x + 1$ را رسم کنید.

حل. دو نقطه دلخواه خط $y = 2x + 1$ را بدست می آوریم.

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \rightarrow A(0, 1), \quad \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \rightarrow B(1, 3)$$

آشنایی با توابع ۳۳



تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ -x + 3, & x < 1 \end{cases}$ تابعی دوضابطه‌ای است که به ازای $x \geq 1$ ، مقدار f از ضابطه اول و به ازای $x < 1$ ، مقدار f از ضابطه دوم محاسبه می‌گردد.

$$f(2) = 5, \quad f(0) = 3, \quad f(1) = 2$$

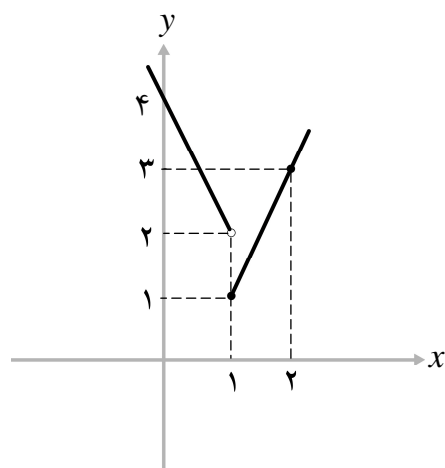
نقطه $x = 1$ ، نقطه مرزی تابع f نامیده می‌شود.

مثال. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq 1 \\ -2x + 4, & x < 1 \end{cases}$ را رسم کنید.

حل. دو ضابطه را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

$$x \geq 1 \rightarrow y = 2x - 1, \quad A(1, 1), \quad B(2, 3)$$

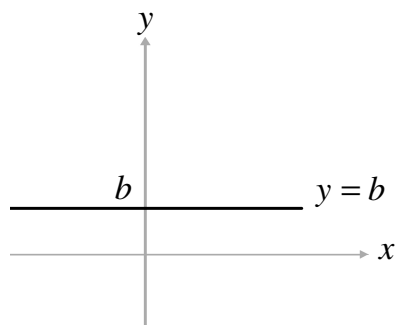
$$x < 1 \rightarrow y = -2x + 4, \quad A(1, 2), \quad B(0, 4)$$



تذکر. در رسم توابع چند ضابطه‌ای، باید مقدار نقطه مرزی در هر ضابطه تعیین شود.

دو حالت خاص.

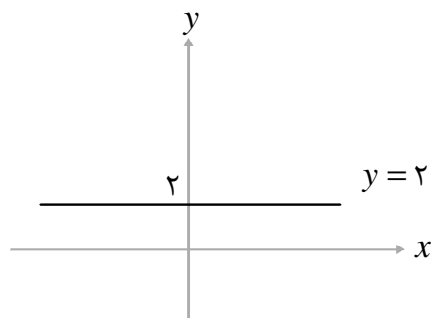
الف) نمودار $y = b$ ، خطی است موازی محور x ها که محور y ها را در نقطه b قطع می‌کند.



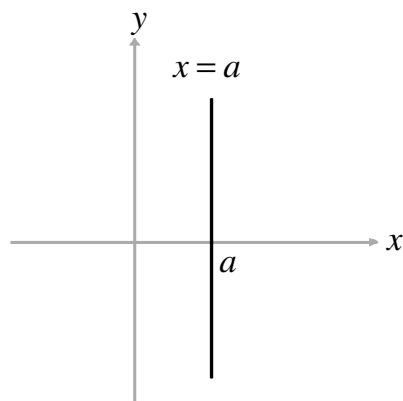
هر عدد حقیقی b را می‌توان به عنوان تابع ثابت $y = f(x) = b$ در نظر گرفت. مثلاً $f(x) = 2$ تابعی ثابت است و نمودار آن بدین صورت است.

$$f(1) = 2, f(0) = 2, f(-3) = 2$$

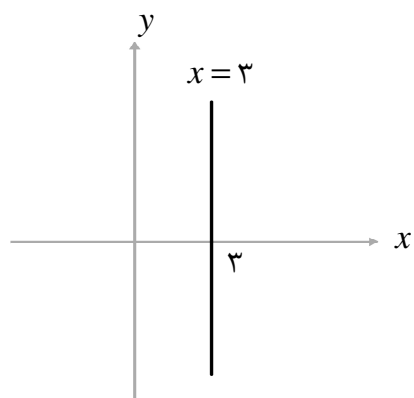
آشنایی با توابع ۳۵



ب) نمودار $x = a$ ، خطی است موازی محور y ها که محور x ها را در نقطه a قطع می‌کند.

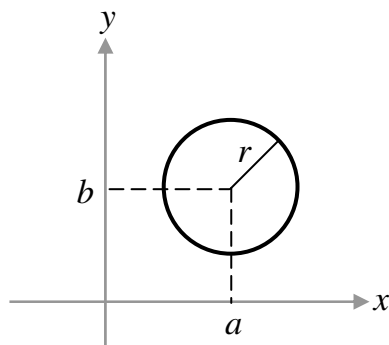


به طور مثال نمودار خط $x = 3$ به صورت زیر است.



معادله دایره

دایره‌ای به مرکز $C(a, b)$ و شعاع r را در نظر می‌گیریم.



معادله این دایره برابر است با

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

مثال. معادله دایره‌ای را بیابید که

الف) مرکز آن $C(2, 4)$ و شعاع آن ۳ باشد.

ب) مرکز آن $C(0, -2)$ و شعاع آن ۴ باشد.

حل الف) بنا به فرمول دایره

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 3^2$$

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$$

حل ب) بنا به فرمول دایره

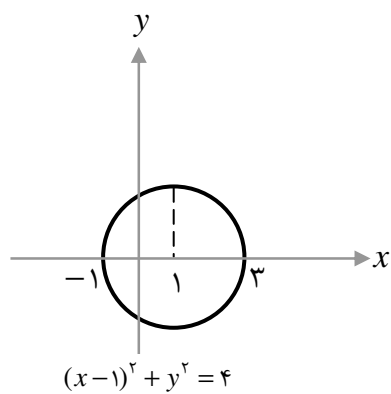
$$(x-0)^2 + (y+2)^2 = 4^2$$

$$x^2 + (y+2)^2 = 16$$

مثال. مرکز و شعاع دایره $x^2 + y^2 = 4$ را بیابید و آن را رسم کنید.

حل. بنا به فرمول، مرکز دایره $C(0, 0)$ و شعاع آن $r = 2$ است.

آشنایی با توابع ۳۷



مثال. مرکز و شعاع دایره $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ را بیابید و آن را رسم کنید.

حل. با استفاده از اتحاد مربع، معادله را به فرم معادله دایره تبدیل می‌کنیم.

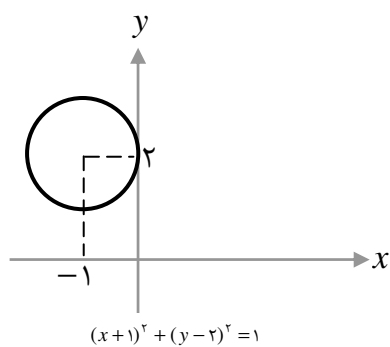
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$$

$$x^2 + 2x + (y^2 - 4y + 4) = 0$$

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 4) = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

مرکز و شعاع دایره به ترتیب $C(-1, 2)$ و $r = 1$ است.



مثال. نقاط برخورد خط $y = x + 1$ و دایره واحد به مرکز $C(0,0)$ را بیابید.
 حل. مرکز و شعاع این دایره به ترتیب $C(0,0)$ و $r = 1$ است و معادله آن برابر است با

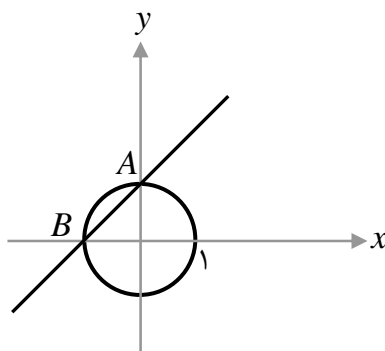
$$x^2 + y^2 = 1$$

در معادله دایره بجای y ، عبارت $x + 1$ را قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (x + 1)^2 = 1$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 1 \rightarrow 2x^2 + 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$A(0,1)$ و $B(-1,0)$ نقاط برخورد خط و دایره هستند.



فاصله نقطه از خط

فاصله یک نقطه از یک خط، کوتاهترین پاره خط بین نقطه و خط است، می‌توان معادله هر خط را به صورت $Ax + By + C = 0$ تبدیل کرد. در این حالت، فاصله نقطه (x_0, y_0) تا خط $Ax + By + C = 0$ با فرمول زیر بدست می‌آید.

$$d = \frac{\pm (Ax_0 + By_0 + C)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

انتخاب بین مثبت و منفی طوری است که مقدار d همواره مثبت شود.

مثال. فاصله نقطه $M(3, 2)$ از خط $4x + 2y - 3 = 0$ را بیابید.

حل. داریم $A = 4$ ، $B = 2$ و $C = -3$

$$d = \frac{\pm (4(3) + 2(2) - 3)}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{20}}$$

۴- چند خاصیت رسم نمودارها

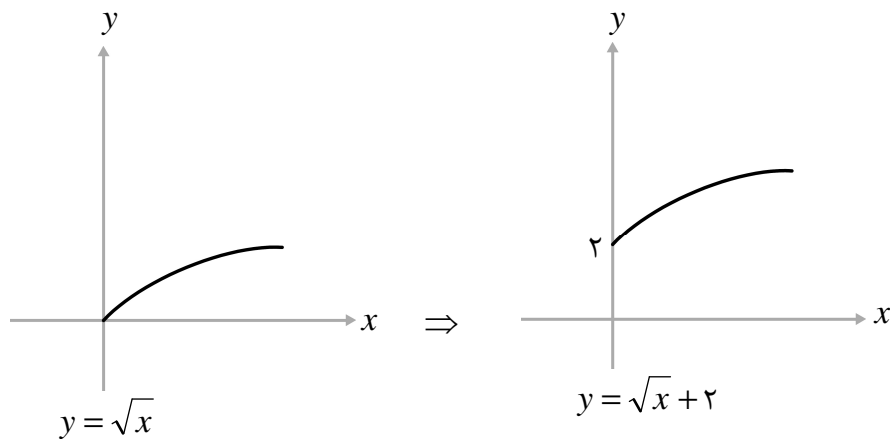
۱- برای رسم نمودار $y = f(x) + c$ ، نمودار f را به اندازه c به سمت بالا ($c > 0$) یا پایین ($c < 0$) انتقال می‌دهیم.

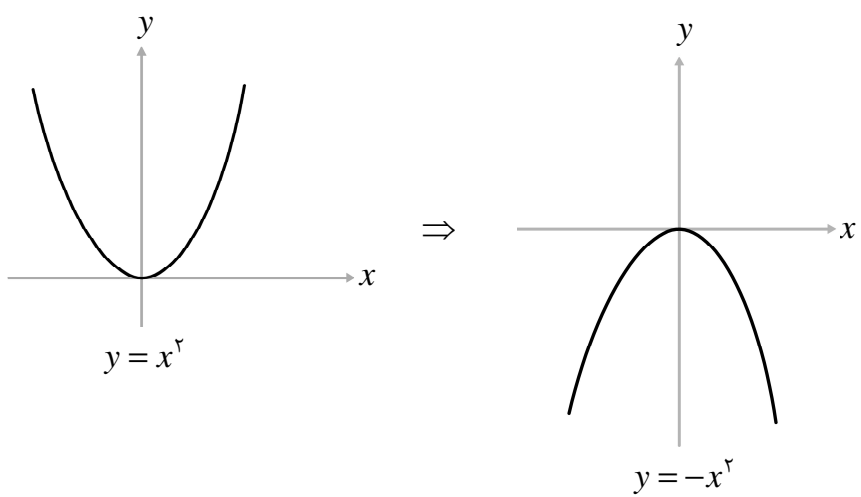
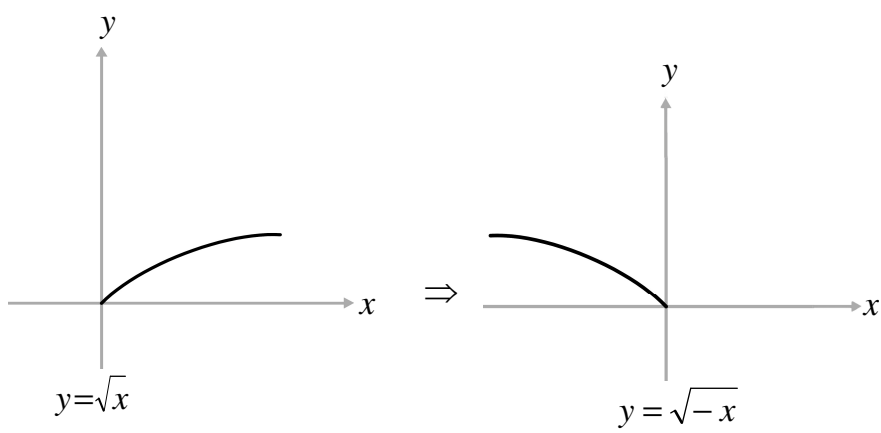
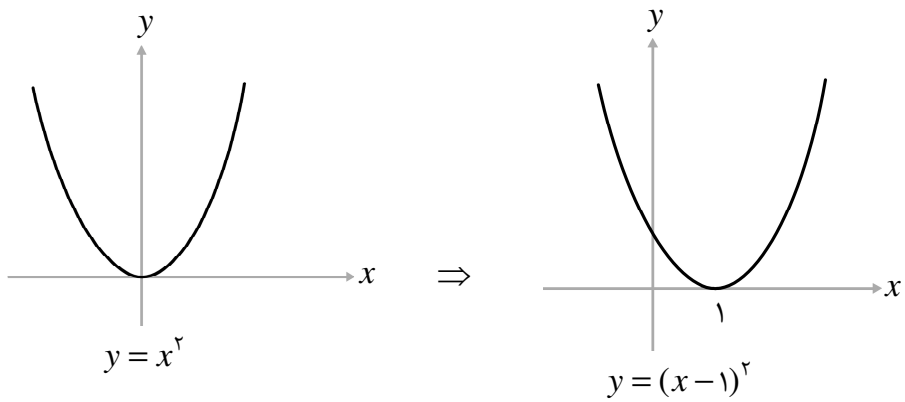
۲- برای رسم نمودار $y = f(x - c)$ ، نمودار f را به اندازه c به سمت راست ($c > 0$) یا چپ ($c < 0$) انتقال می‌دهیم.

۳- برای رسم نمودار $y = -f(x)$ ، قرینه نمودار f را نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم.

۴- برای رسم نمودار $y = f(-x)$ ، قرینه نمودار f را نسبت به محور y ها رسم می‌کنیم.

مثال. چند تابع با استفاده از این خواص رسم شده‌اند.





آشنایی با توابع ۴۱

۵- تمرین

۱- دامنه توابع زیر را بیابید.

$$g(x) = \frac{-1}{\sqrt{x-1}} \quad (\text{ت})$$

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 1 \quad (\text{الف})$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x + 3}} \quad (\text{ث})$$

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3} \quad (\text{ب})$$

$$g(x) = \sqrt{-x^2 + x - 3} \quad (\text{ج})$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{-3x+1}} \quad (\text{پ})$$

۲- برد توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = x^2 - 3, \quad g(x) = \frac{1}{x+4}$$

۳- اگر $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$ و $g(x) = x^2 - 1$ توابع مرکب $f \circ g$ ، $g \circ f$ ، $f \circ g \circ f$ و $g \circ g \circ f$ را بیابید.

۴- اگر $f(x) = 3x^2 + 4x$ و $g(x) = \frac{x+1}{x}$ ، مقدار $f \circ g(1)$ را بیابید.

۵- در کدامیک از موارد زیر دو تابع f و g با هم مساوی هستند؟

$$f(x) = \sqrt{x^2}, \quad g(x) = (\sqrt{x})^2 \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{x^4 + x^2}{x^2 + 1} \quad (\text{ب})$$

۶- زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + 2, \quad g(x) = \sqrt[3]{x}, \quad h(x) = \frac{x}{x^4 + 3}$$

۷- معکوس توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = 4x + 1, \quad g(x) = x^3 - 1, \quad h(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

۸- اگر تابع f با معکوس خود برابر باشد، ($f = f^{-1}$) نمودار f چه ویژگی دارد؟

۹- اگر $f(x) = -7x + 4$ ، تابع $g(x)$ را طوری بیابید که $f \circ g(x) = x$

۴۲ فصل دوم

۱۰- معادله خطی را بیابید که از نقطه $A(2,3)$ عبور کند و با خط $-2x + 4y + 1 = 0$ موازی باشد.

۱۱- معادله خطی را بیابید که از نقطه $A(0,-1)$ عبور کند و بر خط $3x - 6y + 2 = 0$ عمود باشد.

۱۲- دو خط $2x - y = 4$ و $y = 3x + 1$ در چه نقطه‌ای با هم برخورد دارند؟
۱۳- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = -x + 3, \quad g(x) = 2x - 1$$

۱۴- نمودار خط $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ را رسم کنید.

۱۵- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & x \geq 2 \\ x + 3 & x < 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 0 \\ 3 & x < 0 \end{cases}$$

۱۶- معادله دایره‌ای را بیابید که مرکز آن $C(1,4)$ و شعاع آن $\sqrt{2}$ باشد.

۱۷- مرکز و شعاع دایره $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$ را بیابید.

۱۸- فاصله مبدأ مختصات با خط $3x + 2y = 1$ چقدر است؟

۱۹- فاصله خط $3x - y = 1$ با مرکز دایره $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ را بیابید.
۲۰- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y = x^2 + 3, \quad y = -\sqrt{x}, \quad y = (x+1)^3$$

$$y = (x-1)^2 + 2, \quad y = \sqrt{x-4}$$

۲۱- اگر $A(2,3)$ و $B(-1,4)$ دو نقطه باشند، معادله خط عمود منصف پاره خط $\overline{AB}$ را بیابید.

راهنمایی. اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه باشند، مختصات وسط پاره خط $\overline{AB}$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \text{ برابر است با}$$

۶- تابع قدر مطلق و جزء صحیح

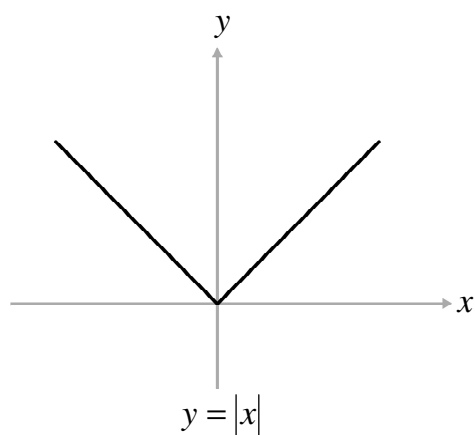
قدر مطلق x یک تابع دوضابطه‌ای با تعریف زیر است.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثلاً

$$|4| = 4, |-5| = 5$$

مثال. نمودار تابع $f(x) = |x|$ در زیر رسم شده است.



$$|x| = \sqrt{x^2} \quad \text{توجه.}$$

چند خاصیت $|x|$

$$|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a, \quad a > 0$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \quad a > 0$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ یا } x < -a, \quad a > 0$$

$$|x \pm y| \leq |x| \pm |y|$$

$$|-x| = |x|$$

$$|x|^r = |x^r| = x^r$$

$$|x - y| = |y - x|$$

مثال. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{3 - |x - 2|}$ را بیابید.

حل. باید زیر رادیکال مثبت باشد.

$$3 - |x - 2| \geq 0 \rightarrow |x - 2| \leq 3$$

$$-3 \leq x - 2 \leq 3 \rightarrow -1 \leq x \leq 5$$

$$D_f = [-1, 5]$$

مثال. دامنه تابع $f(x) = \frac{x + 4}{|x| - 3}$ را بیابید.

حل. باید مخرج کسر مخالف صفر باشد.

$$|x| - 3 = 0 \rightarrow |x| = 3 \rightarrow x = \pm 3$$

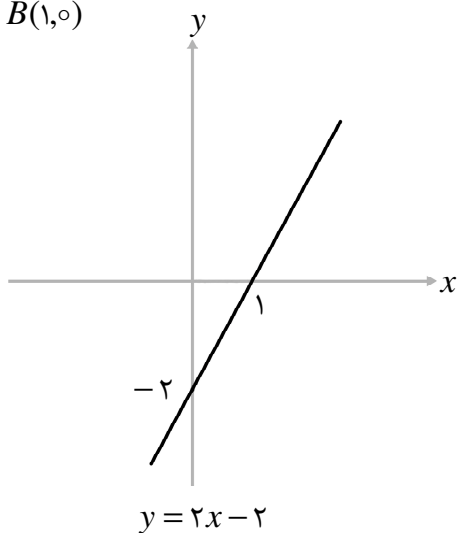
$$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$$

برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ ، نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده و سپس قسمتی از نمودار که زیر محور x ها قرار دارد حذف و قرینه آن را نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم.

مثال. نمودار $y = |2x - 2|$ را رسم کنید.

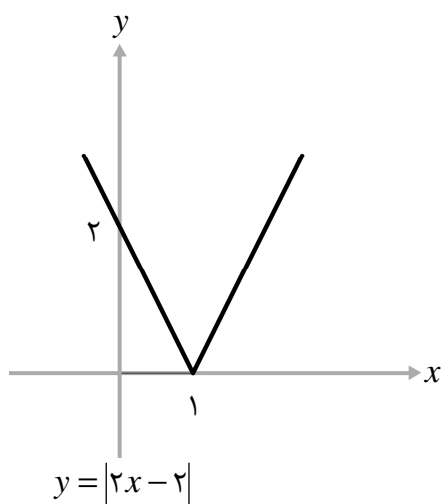
حل. ابتدا نمودار $y = 2x - 2$ را رسم می‌کنیم

$$A(0, -2), B(1, 0)$$



آشنایی با توابع ۴۵

قسمت زیر محور x ها را حذف و قرینه آن نسبت به محور x ها رسم می‌شود.



تابع جزء صحیح

جزء صحیح x را با علامت $[x]$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$$

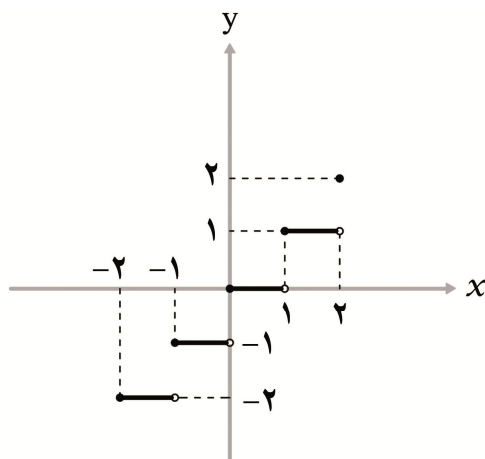
مثلاً

$$[3/8] = 3 \Leftrightarrow 3 \leq 3/8 < 4$$

$$[-3/8] = -4 \Leftrightarrow -4 \leq -3/8 < -3$$

$$[\sqrt{3}] = 1 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{3} < 2$$

نمودار تابع $f(x) = [x]$ روی فاصله $[-2, 2]$ از چند پاره خط موازی (به صورت پله‌ای) تشکیل شده است.

چند خاصیت $[x]$

$$[x+n] = [x] + n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$[n] = n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x-1 < [x] \leq x$$

مثال. دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{[x+1]-4}$ را بیابید.

حل. ریشه‌های مخرج را بدست می‌آوریم.

$$[x+1]-4=0 \rightarrow [x]+1-4=0$$

$$\rightarrow [x]=3 \rightarrow 3 \leq x < 4$$

$$D_f = \mathbb{R} - [3, 4)$$

۷- توابع نمایی و لگاریتمی

هر تابع به صورت $f(x) = a^x$ را یک تابع نمایی با پایه a می‌نامیم. ($a > 0$ و $a \neq 1$)

$$D_f = \mathbb{R}$$

چند خاصیت a^x

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

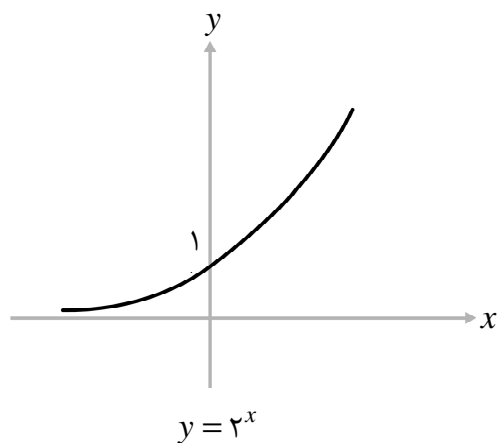
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^0 = 1$$

مثال. تابع $f(x) = 2^x$ یک تابع نمایی با پایه ۲ است.

$$f(1) = 2, \quad f(0) = 2^0 = 1, \quad f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

نمودار $f(x) = 2^x$

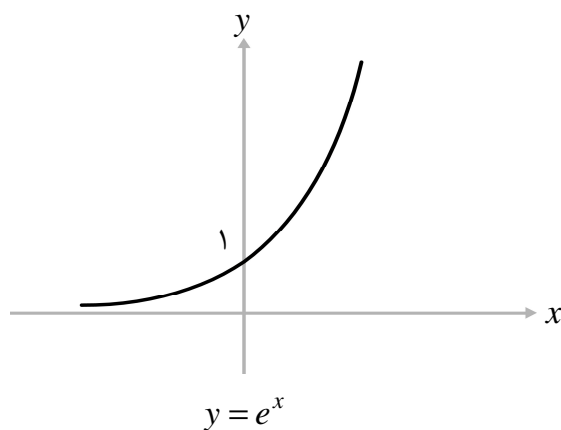


در بسیاری از پدیده‌ها مانند رشد جمعیت، میزان تغییر دما، یا محاسبه سود سرمایه، عدد ثابت

e ظاهر می‌گردد. e عددی گنگ است و تقریباً برابر است با

$$e \cong 2.7182 \quad (e \text{ را عدد نپر می‌نامند}).$$

نمودار $f(x) = e^x$



تابع لگاریتم

معکوس تابع a^x را با $\log_a x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در پایه a می‌خوانیم، به عبارت دیگر، اگر $f(x) = a^x$ باشد، آنگاه $f^{-1}(x) = \log_a x$. بنا به تعریف داریم

$$a^t = s \Leftrightarrow \log_a s = t$$

مثلاً

$$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$$

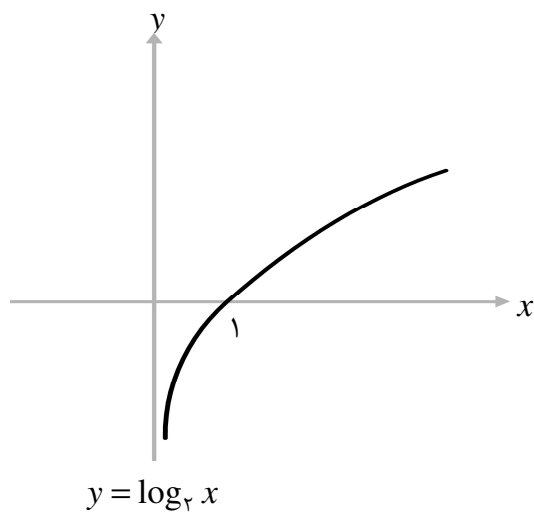
$$10^2 = 100 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$$

$$3^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{1}{9} \right) = -2$$

$$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$$

دامنه تابع $f(x) = \log_a x$ اعداد مثبت است. $D_{\log} = (0, +\infty)$

نمودار $f(x) = \log_r x$

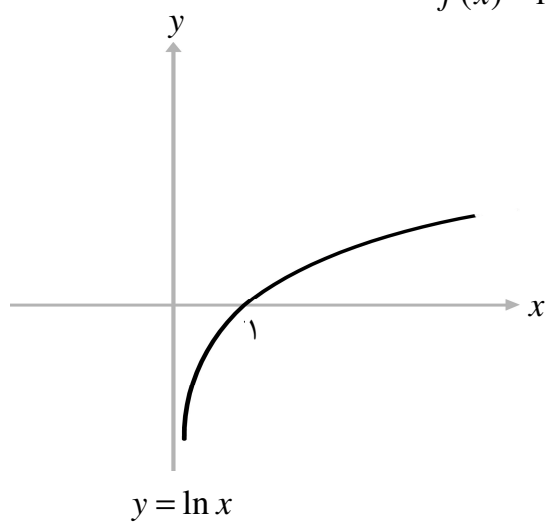


لگاریتم در پایه e را لگاریتم طبیعی می‌نامیم و با علامت $\ln$ نشان می‌دهیم.

$$\log_e x = \ln(x)$$

دامنه تابع $f(x) = \ln(x)$ اعداد مثبت است. $D_{\ln} = (0, +\infty)$

نمودار $f(x) = \ln(x)$



مثال. دامنه تابع $f(x) = \ln(4 - 2x)$ را بیابید.

حل. باید داخل تابع $\ln$ مثبت باشد.

$$4 - 2x > 0 \rightarrow 4 > 2x \rightarrow x < 2$$

$$D_f = (-\infty, 2)$$

مثال. دامنه تابع $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x+2}\right)$ را بیابید.

حل. باید داخل تابع $\ln$ مثبت باشد.

$$\frac{1-x}{x+2} > 0$$

کسر را تعیین علامت می کنیم.

$$1 - x = 0 \rightarrow x = 1$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

x	-2	1	
$1-x$	+	+	-
$x+2$	-	+	+
$\frac{1-x}{x+2}$	-	+	-

بنابراین

$$D_f = (-2, 1)$$

چند خاصیت $\log_a x$ (این خواص برای $\ln$ نیز برقرار هستند.)

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a (x^r) = r \log_a x$$

آشنایی با توابع ۵۱

$$\log_a(a^x) = x, \quad (\ln e^x = x)$$

$$a^{\log_a x} = x, \quad (e^{\ln x} = x)$$

$$\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

مثال. لگاریتم‌های زیر را بدست آورید.

$$\log_2 8, \quad \log_5 \left(\frac{1}{25} \right), \quad \log_2 (\sqrt[3]{4}), \quad \log_{\frac{1}{2}} (8)$$

حل. از خواص لگاریتم استفاده می‌کنیم

$$\log_2 8 = \log_2 (2^3) = 3 \log_2 2 = 3 \times 1 = 3$$

$$\log_5 \left(\frac{1}{25} \right) = \log_5 (1) - \log_5 (25) = 0 - 2 \log_5 5 = -2 \times 1 = -2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (\sqrt[3]{4}) = \log_{\frac{1}{2}} \left(4^{\frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} 4 = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (8) = \log_{2^{-1}} (8) = \frac{1}{-1} \log_2 (8) = \frac{1}{-1} \times 3 = -3$$

تذکر. $\log x$ به معنای $\log_{10} x$ است.

مثال. دامنه تابع $f(x) = \log \left(\frac{1}{-x} \right)$ را بیابید.

حل. داخل لگاریتم باید مثبت باشد.

$$\frac{1}{-x} > 0 \rightarrow x < 0$$

$$D_f = (-\infty, 0)$$

مثال. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\log(16 - x^2)}$ را بیابید.

حل. داخل لگاریتم باید مثبت باشد.

$$16 - x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 16 \\ \rightarrow -4 < x < 4 \rightarrow x \in (-4, 4)$$

از طرفی داخل رادیکال نیز باید مثبت باشد.

$$\log(16 - x^2) \geq 0$$

$$\log(16 - x^2) \geq 0 = \log 1 \rightarrow 16 - x^2 \geq 1$$

$$x^2 \leq 15 \rightarrow -\sqrt{15} \leq x \leq \sqrt{15} \rightarrow x \in [-\sqrt{15}, \sqrt{15}]$$

بنابراین

$$D_f = (-4, 4) \cap [-\sqrt{15}, \sqrt{15}] = [-\sqrt{15}, \sqrt{15}]$$

۸- رشد نمایی

هرگاه آهنگ تغییر کمیتی مانند A نسبت به زمان، متناسب با آن کمیت در واحد زمان باشد، A برحسب زمان به صورت $A(t) = ce^{kt}$ می‌باشد. در این تابع، t زمان، k نرخ رشد و C مقدار A در لحظه $t = 0$ است. $A(t)$ را تابع رشد نمایی می‌نامیم.

رشد جمعیت

مثال. آهنگ افزایش جمعیت شهری، متناسب با جمعیت این شهر است. اگر جمعیت این شهر در سال ۱۳۸۳، دویست هزار نفر و نرخ رشد جمعیت ۳٪ بوده باشد، در سال ۱۳۸۸ جمعیت به چه تعدادی رسیده است؟

حل. $k = 3\%$ و $C = 200000$ و t زمان برحسب سال است.

$$A(t) = 200000 e^{0.03t}$$

۵ سال فاصله ۱۳۸۳ تا ۱۳۸۸ است.

$$A(5) = 200000 e^{0.03 \times 5} = 232366$$

جمعیت این شهر در سال ۱۳۸۸ حدود ۲۳۲۳۶۶ نفر بوده است.

مثال. اگر نرخ افزایش جمعیت کشوری به طور متوسط ۲٪ باشد، این جمعیت پس از ۵۰ سال تقریباً چند برابر می‌شود؟

حل. $k = 2\%$ و t برحسب سال است.

$$A(t) = ce^{0.02t}$$

آشنایی با توابع ۵۳

$$A(0) = c, \quad A(50) = ce^{0.02 \times 50} = ce^1$$

$$\frac{A(50)}{A(0)} = \frac{ce}{c} = e \cong 2.71$$

جمعیت این کشور در این مدت ۲/۷۱ برابر می‌شود.

سود پیوسته

هرگاه به مبلغ سپرده گذاری شده در هر لحظه سود تعلق گیرد، سود به طور پیوسته محاسبه شده است. در این حالت می‌توان نشان داد افزایش سپرده متناسب با مبلغ سپرده در واحد زمان است.

مثال. شخصی مبلغ هزار دلار را به مدت سه سال با سود پیوسته سالانه ۵٪ سرمایه گذاری کرده است، موجودی وی در پایان ۳ سال چقدر است؟

حل. $k = 5\%$ و $C = 1000$ و t زمان برحسب سال است.

$$A(t) = 1000 e^{0.05t}$$

در $t = 3$ داریم

$$A(3) = 1000 e^{0.05 \times 3} = 1161$$

موجودی این شخص در پایان سه سال حدود ۱۱۶۱ دلار است.

مثال. مبلغی با سود پیوسته در مدت ۱۰ سال ۴ برابر شده است. سود سالانه در این ده سال چه مقدار بوده است؟

حل. فرض کنیم k سود سالانه و t زمان برحسب سال باشد.

$$A(t) = ce^{kt}$$

$$A(0) = c, \quad A(10) = ce^{10k}$$

بنا به فرض

$$A(10) = 4A(0)$$

$$ce^{10k} = 4c$$

$$e^{10k} = 4$$

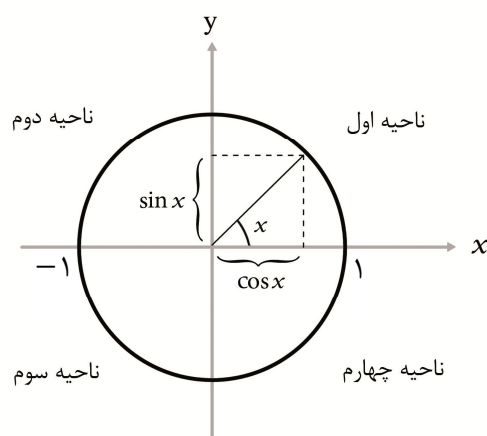
بنا به تعریف $\ln$

$$\ln ۴ = ۱۰k \rightarrow k = \frac{\ln ۴}{۱۰} = ۰/۱۴$$

سود سالانه حدود ۰/۱۴ بوده است.

۹- توابع مثلثاتی

اندازه زاویه را معمولاً برحسب واحد درجه یا رادیان بیان می‌کنند، هر ۱۸۰° درجه معادل با π رادیان است. ($۱۸۰^\circ \equiv \pi$ رادیان). توابع $\sin x$ و $\cos x$ روی دایره واحد تعریف می‌شوند. (دایره‌ای به شعاع یک)



چهار تابع مثلثاتی دیگر برحسب $\sin x$ و $\cos x$ به صورت زیر هستند.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

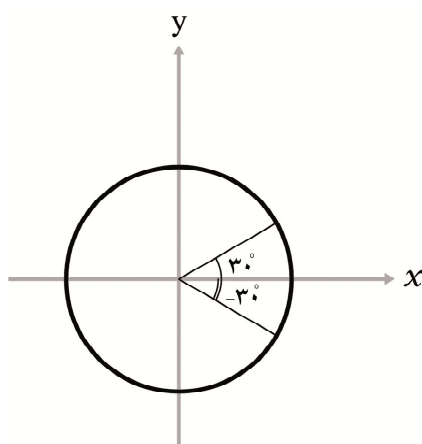
بنا به تعریف $\sin x$ و $\cos x$ داریم

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

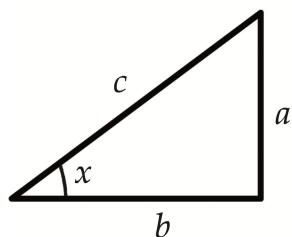
$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

آشنایی با توابع ۵۵

تذکر. زاویه مثبت در جهت عکس عقربه‌های ساعت و زاویه منفی در جهت عقربه‌های ساعت اندازه گیری می‌شود.



مقادیر مثلثاتی روی مثلث قائم الزاویه به صورت زیر است.



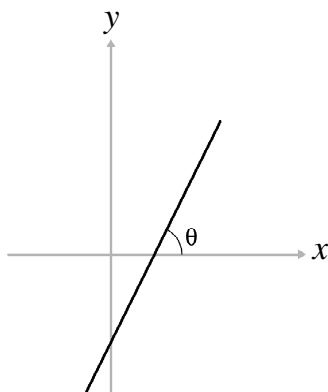
$$\sin x = \frac{a}{c}, \quad \cos x = \frac{b}{c}, \quad \tan x = \frac{a}{b}, \quad \cot x = \frac{b}{a}$$

مقادیر مثلثاتی چند زاویه در جدول آمده است.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\cot x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

توجه. اگر θ زاویه بین یک خط و محور x ها باشد، شیب این خط برابر است با

$$m = \tan \theta$$



مثال. معادله خطی را بیابید که از نقطه $A(1, 2)$ عبور می‌کند و در ناحیه اول با محور x ها زاویه 45° درجه می‌سازد.

آشنایی با توابع ۵۷

$$m = \tan(45^\circ) = 1 \quad \text{حل. داریم}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = 1(x - 1)$$

$$y = x + 1$$

مثال. معادله خطی را بیابید که از نقطه $A(2, 0)$ عبور می‌کند و در ناحیه اول با محور x ها

زاویه $\frac{\pi}{3}$ رادیان می‌سازد.

حل. داریم

$$m = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

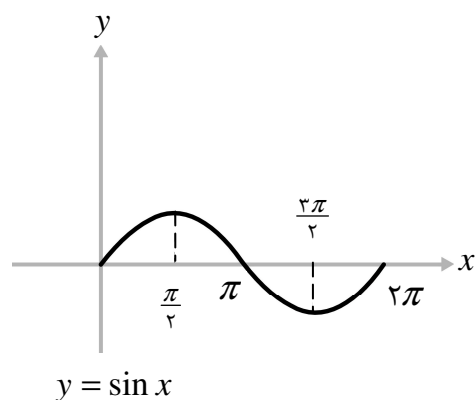
$$y - 0 = \sqrt{3}(x - 2)$$

$$y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$$

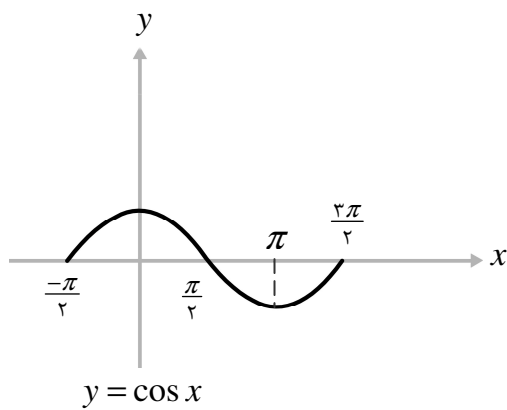
نمودار توابع مثلثاتی

دامنه توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ تمام اعداد حقیقی و دوره تناوب این توابع 2π است. نمودار این توابع در یک دوره تناوب رسم شده‌اند (برحسب رادیان است).

$$f(x) = \sin x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

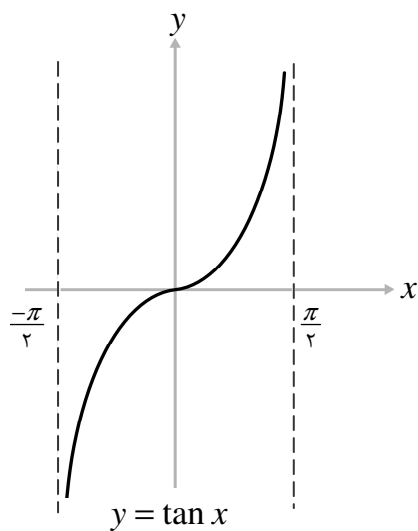


$$f(x) = \cos x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

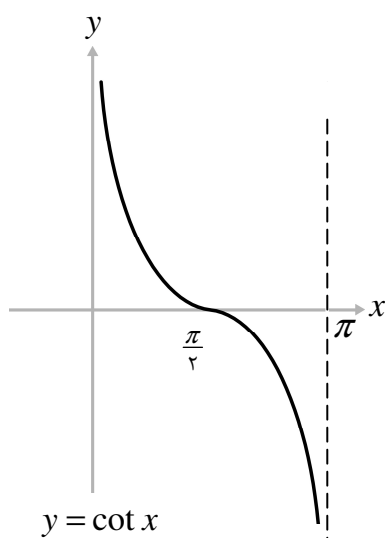


توابع مثلثاتی $f(x) = \tan x$ و $f(x) = \cot x$ دارای دوره تناوب π می‌باشند. نمودار این توابع در یک دوره تناوب رسم شده است.

$$f(x) = \tan x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



$$f(x) = \cot x, \quad x \in (0, \pi)$$



توجه. نمودار توابع مثلثاتی روی دایره، از تکرار نمودار در یک دوره تناوب بدست می‌آید.

چند رابطه مثلثاتی

ارتباط بین توابع مثلثاتی

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

مقادیر مثلثاتی زاویه منفی

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$

دوره تناوب توابع مثلثاتی

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x$$

$$\cot(x + \pi) = \cot x$$

مقادیر مثلثاتی جمع دو زاویه

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

$$\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$$

مقادیر مثلثاتی دو برابر زاویه

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

دو فرمول مهم دیگر

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

آشنایی با توابع ۶۱

مثال. مقادیر زیر با استفاده از روابط مثلثاتی محاسبه شده اند.

$$\sin(-45^\circ) = -\sin(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(21^\circ) = \tan(3^\circ + 18^\circ) = \tan(3^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin(75^\circ) = \sin(3^\circ + 45^\circ) = \sin(3^\circ) \cdot \cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) \cdot \cos(3^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos(15^\circ) = \cos(45^\circ - 3^\circ) = \cos(45^\circ) \cdot \cos(3^\circ) - \sin(45^\circ) \cdot \sin(3^\circ)$$

$$= \cos(45^\circ) \cdot \cos(3^\circ) + \sin(45^\circ) \cdot \sin(3^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

مثال. رابطه $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ را به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ تحقیق کنید.

حل.

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

معکوس توابع مثلثاتی

توابع $\sin^{-1} x$ ، $\cos^{-1} x$ ، $\tan^{-1} x$ و $\cot^{-1} x$ به ترتیب معکوس توابع $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ و $\cot x$ می باشند.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cot^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

توجه. دامنه توابع $\sin^{-1} x$ و $\cos^{-1} x$ ، فاصله بسته $[-1, 1]$ است.

مثال. دامنه تابع $f(x) = \sin^{-1}(2x - 1)$ را بیابید.

حل. داخل تابع $\sin^{-1}$ باید در فاصله $[-1, 1]$ باشد.

$$-1 \leq 2x - 1 \leq 1$$

$$0 \leq 2x \leq 2$$

$$0 \leq x \leq 1$$

بنابراین

$$D_f = [0, 1]$$

مثال. دامنه تابع $f(x) = \cos^{-1}(x^2 - 7)$ را بیابید.

حل. داخل تابع $\cos^{-1}$ باید در فاصله $[-1, 1]$ باشد.

$$-1 \leq x^2 - 7 \leq 1$$

$$6 \leq x^2 \leq 8$$

$$\sqrt[3]{6} \leq x \leq 2$$

بنابراین

$$D_f = [\sqrt[3]{6}, 2]$$

۱۰- تمرین

۱- معادله $|-2x + 4| = 3$ را حل کنید.

۲- دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sqrt{|x| - 3}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - |x + 1|}}, \quad h(x) = \sqrt{[x] - x}$$

۳- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = |x^2 - 4|, \quad g(x) = |x| + 2, \quad h(x) = |x^3|$$

۴- معادله $\ln x + \ln x^2 = \ln 8$ را حل کنید.

آشنایی با توابع ۶۳

۵- دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad g(x) = \ln(x^2 - 4), \quad h(x) = \sqrt{\ln x - 2}$$

۶- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\log(11x - 2x^2)}$ را بیابید.

۷- محاسبه کنید.

$$\log_5(\sqrt[5]{125}), \quad \ln(\sqrt[5]{e}), \quad \log\left(\frac{1}{1000}\right), \quad \log_{25}(125)$$

۸- نشان دهید تابع $f(x) = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ زوج است.

۹- نشان دهید تابع $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ فرد است.

۱۰- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = |\ln x|, \quad g(x) = 2^{-x}, \quad h(x) = -e^x$$

۱۱- جمعیت کشوری در مدت ۳۰ سال دوبرابر شده است، نرخ رشد جمعیت این کشور چقدر است؟

۱۲- مبلغ دو هزار دلار در بانکی با سود پیوسته ۷٪ سرمایه گذاری شده است، پس از چند سال مبلغ سپرده دو برابر می شود؟

۱۳- شخصی مبلغی را با سود پیوسته ۱۰٪ در بانکی سرمایه گذاری کرده است، بعد از ۴ سال مبلغ ۱۰۴۴ دلار دریافت می کند، مبلغ سپرده گذاری چقدر بوده است؟

۱۴- معادله خطی را بیابید که از نقطه $A(2, 3)$ عبور می کند و در ناحیه چهارم با محور x ها زاویه $\frac{\pi}{4}$ می سازد.

۱۵- روابط زیر را به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ تحقیق کنید.

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad (\text{ب}) \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad (\text{الف})$$

۱۶- محاسبه کنید.

$$\sin(120^\circ), \quad \cos(210^\circ), \quad \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right), \quad \sin(15^\circ), \quad \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

۱۷- اگر $\sin x = -\frac{1}{4}$ و انتهای کمان در ناحیه سوم باشد، سایر مقادیر مثلثاتی را بیابید.

۶۴ فصل دوم

۱۸- محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) & , & \sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ \tan^{-1}(\sqrt{3}) & , & \cos\left(\tan^{-1}(1)\right) \end{aligned}$$

۱۹- دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sin^{-1}(-2x + 4) \quad , \quad g(x) = \cos^{-1}(\sqrt{2x-1}) \quad , \quad h(x) = \sin^{-1}\left(\frac{1+x^2}{2x}\right)$$

فصل سوم

حد و پیوستگی

حد، رفتار تابع را در اطراف یک نقطه توضیح می‌دهد، به طور مثال، در اطراف نقطه

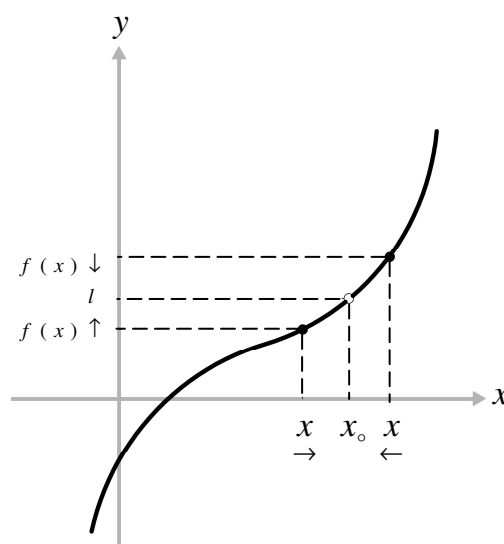
$$x = \frac{1}{2} \text{ تابع } f(x) = \frac{8x^3 - 1}{2x - 1} \text{ چگونه خواهد بود؟}$$

در پیوستگی علاوه بر رفتار تابع در اطراف نقطه، مقدار تابع در آن نقطه نیز از اهمیت برخوردار است. تابعی که بدون برداشتن قلم از روی کاغذ نمودار آن رسم شود، تابعی پیوسته است.

۱- حد تابع در نقطه

تعریف. تابع $y = f(x)$ در نقطه x_0 حد l دارد، هرگاه با نزدیک شدن x به قدر کافی به x_0 ، تابع $f(x)$ به دلخواه به l نزدیک شود و آن را با علامت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ نشان

می‌دهیم.



حد تابع در نقطه x_0

از آنجا که محاسبه حد توابع در این فصل مورد نظر ما می باشد (و نه اثبات) از نکات زیر استفاده می کنیم.

نکته اول. حد روی جمع، ضرب و تقسیم توابع باز می شود.

نکته دوم. برای محاسبه حد بسیاری از توابع در نقطه x_0 ، به جای x مقدار x_0 را قرار می دهیم.

مثال. حد تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ را در نقطه $x_0 = 2$ بیابید.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2}$$

حد و پیوستگی ۶۷

مثال. حد تابع $f(x) = \sqrt[3]{9+x}$ را در نقطه $x_0 = -1$ بیابید.
حل.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{9+x} = \sqrt[3]{8} = 2$$

مثال. حد تابع $f(x) = \sin^2(x)$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ بیابید.
حل.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin^2 x = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

توجه. حد عدد ثابت در هر نقطه برابر با خودش می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow 3} 8 = 8, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

در محاسبه حد توابع ممکن است صورت مبهم $\frac{0}{0}$ بدست آید، در این حالت باید از حد رفع ابهام گردد.

مثال. حد توابع زیر به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ بدست می‌آید که بعد از رفع ابهام، حد آنها محاسبه شده است.

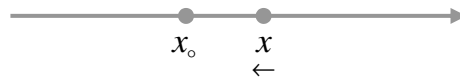
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{1} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}$$

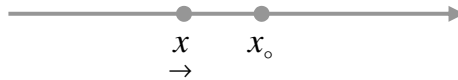
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x}-3) \times (\sqrt{x}+3)}{(x-9) \times (\sqrt{x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

حد راست و چپ

اگر x فقط از سمت راست به x_0 نزدیک و مقدار تابع به دلخواه نزدیک l ($x > x_0$) شود گوییم تابع در x_0 حد راست دارد و آن را با علامت $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ نشان می‌دهیم.



همچنین اگر x فقط از سمت چپ به x_0 نزدیک و مقدار تابع به دلخواه نزدیک l ($x < x_0$) شود، گوییم تابع در x_0 حد چپ دارد و آن را با علامت $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ نشان می‌دهیم.



قضیه. تابع f در نقطه x_0 حد چپ و راست مساوی دارد اگر و فقط اگر f در x_0 حد داشته باشد.

مثال. حد تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.
حل.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

بنا به قضیه بالا f در $x = 0$ حد ندارد.

مثال. حد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , x > 1 \\ 1 - x & , x \leq 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

حل.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 4 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - x = 0\end{aligned}$$

لذا تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ حد ندارد.

در این مثال $1 \in D_f$ ولی f در $x = 1$ حد ندارد.

مثال. حد تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 2 \\ 9-x, & x > 2 \end{cases}$ را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید.

حل.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 9 - x = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x + 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$$

در این مثال $2 \notin D_f$ ولی f در $x = 2$ حد دارد.

مثال. حد تابع $f(x) = [x]$ را در نقطه $x = 3$ بررسی کنید.

حل. هرگاه x سمت راست ۳ باشد، x را آنقدر نزدیک ۳ اختیار می‌کنیم به طوری که

$$3 < x < 4, \text{ لذا } [x] = 3 \text{ پس}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} [x] = \lim_{x \rightarrow 3^+} 3 = 3$$

هرگاه x سمت چپ ۳ باشد، x را آنقدر نزدیک ۳ اختیار می‌کنیم به طوری که $2 < x < 3$

$$\text{لذا } [x] = 2 \text{ پس}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [x] = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2 = 2$$

بنابراین تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = 3$ حد ندارد.

تذکره. تابع $f(x) = [x]$ در نقاط صحیح حد ندارد.

حد تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ در نقطه $x = 0$ صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود، بدون اثبات می‌پذیریم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (*)$$

مثال. حد تابع $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ را در نقطه $x = 0$ بیابید.

حل.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times 1 = 1\end{aligned}$$

مثال. حد تابع $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$ را در نقطه $x = 0$ بیابید.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 \times 0 = 0$$

مثال. حد تابع $f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x-2}$ را در نقطه $x = 2$ بیابید.

حل. قرار می‌دهیم $t = x - 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

با استفاده از حد (*) می‌توان نشان داد

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{a}{b}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$$

مثلاً

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(-5x)} = \frac{3}{-5}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{x} = 6$$

۲- حد و بی‌نهایت

وقتی می‌گوییم x به طور نامحدود افزایش می‌یابد، $(x \rightarrow +\infty)$ یعنی x از هر عدد مثبت بزرگی، بزرگتر می‌شود.

تعریف. حد تابع $y = f(x)$ وقتی x به طور نامحدود افزایش می‌یابد برابر با l است، هرگاه با بزرگ شدن x به اندازه کافی، $f(x)$ به دلخواه نزدیک l شود.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

تعریف. تابع $y = f(x)$ در نقطه x_0 به طور نامحدود افزایش می‌یابد، هرگاه با نزدیک شدن x به اندازه کافی به x_0 ، تابع $f(x)$ به دلخواه بزرگ شود.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

در محاسبه حد از عبارتهای صوری زیر می‌توان استفاده کرد. (C عددی ثابت است).

$$\infty + C = \infty, \quad \frac{C}{0} = \infty, \quad e^{+\infty} = +\infty$$

$$\infty \times C = \infty, \quad \frac{C}{\infty} = 0, \quad e^{-\infty} = 0$$

$$\infty + \infty = \infty, \quad \infty \times \infty = \infty, \quad (\infty)^n = \infty, \quad n > 0$$

$$\ln(+\infty) = +\infty, \quad \frac{\infty}{C} = \infty, \quad \sqrt[n]{\infty} = \infty$$

$$\ln(0) = -\infty$$

عبارتهای زیر همگی صورت‌های مبهم می‌باشند.

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \times \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

هرگاه با هر یک از صورت‌های مبهم مواجه شدیم باید با روشی مناسب، آن را رفع ابهام کنیم.

مثال. حد راست و چپ تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ را در $x=2$ حساب کنید.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+4}{x-2} = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+4}{x-2} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

مثال. حد چپ تابع $f(x) = \frac{1}{\lambda - x^3}$ را در $x = 2$ بیابید.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\lambda - x^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

مثال. حد راست و چپ تابع $f(x) = \frac{[x]-1}{x-1}$ را در نقطه $x = 1$ بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{0}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

مثال. حدهای زیر در $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ حساب شده‌اند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+4} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$$

نکته. هرگاه $x \rightarrow \pm\infty$ ، برای رفع ابهام از توابع کسری، فقط جملات شامل بزرگترین درجه

در صورت و مخرج کسر باقی می‌مانند و بقیه جملات حذف می‌شوند.

مثال. حدهای زیر در $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ حساب شده‌اند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x+2x^2+1}{5x^2-x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-4x+1}{2x^4-x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

حد و پیوستگی ۷۳

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 4}}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

۳- تمرین

۱- حد بگیرید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$$

۲- حد تابع $f(x) = [x] - x$ را در نقطه $x = 3$ بررسی کنید.

۳- حد تابع $f(x) = [3x]$ را در نقطه $x = \frac{1}{3}$ بررسی کنید.

۴- آیا حد تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \geq -1 \\ x^2, & x < -1 \end{cases}$ در نقطه مرزی آن وجود دارد؟

۵- حد توابع مثلثاتی زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\tan(x-3)}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{4x}$$

۶- اگر $f(x) = x^2$ ، حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

۷- حد بگیرید.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+4}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x-3}{x(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-3}$$

۸- حد بگیریید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{-3x^3 + x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 4}{x^4 - 3x^2 + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x}}{3x}$$

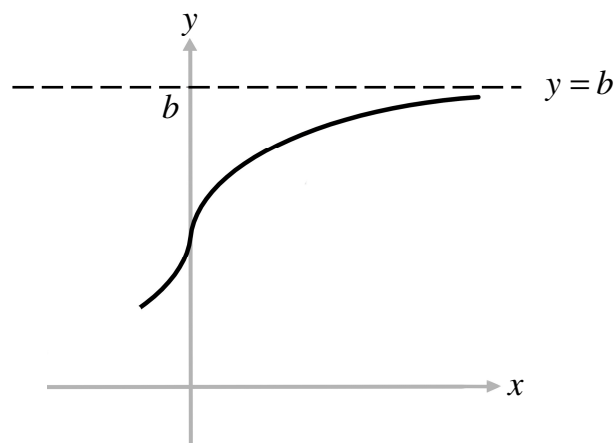
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{3x-1}{4x-5}$$

۹- حد تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x} + x$ را در $x \rightarrow -\infty$ بیابید.

۴- مجانب‌های تابع

خط $y = b$ یک مجانب افقی تابع $f(x)$ می‌باشد، هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

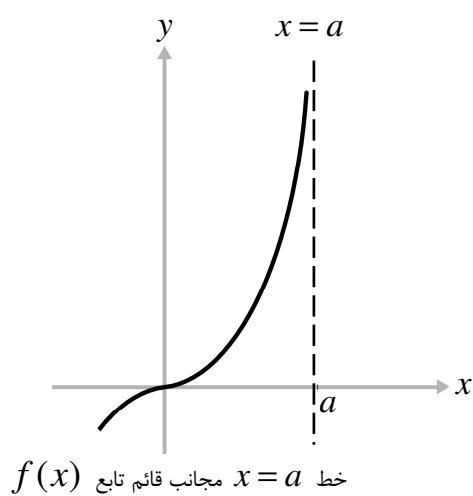


خط $y = b$ مجانب افقی تابع $f(x)$

حد و پیوستگی ۷۵

خط $x = a$ یک مجانب قائم تابع $f(x)$ می‌باشد، هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$



مثال. مجانب‌های افقی تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x^2 + x}$ را بیابید.

حل. برای یافتن مجانب‌های افقی باید حد تابع را در $x \rightarrow \pm\infty$ بدست آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

بنابراین خط $y = \frac{1}{3}$ تنها مجانب افقی تابع f است.

مثال. مجانب‌های افقی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 3}$ را بیابید.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

خط $y = 1$ و $y = -1$ مجانب‌های افقی تابع $f(x)$ هستند.مثال. مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 3}$ را بیابید.

حل. معمولاً ریشه‌های مخرج، مجانب‌های قائم هستند.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{0^+} = +\infty$$

خط $x = 3$ تنها مجانب قائم f است.مثال. مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{5}{x^2 + x}$ را بیابید.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{x(x+1)} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5}{x(x+1)} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

خط $x = 0$ و $x = -1$ مجانب‌های قائم $f(x)$ هستند.**۵- یک حد مهم**

همانطور که در فصل دوم اشاره شد، e یکی از اعداد ثابت مهم ریاضیات است. حد زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

حد و پیوستگی ۷۷

با استفاده از این حد، می‌توان حد بعضی از توابع را بدست آورد.

مثال. حد تابع $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ را در $x = 0$ بیابید.

حل. قرار می‌دهیم $t = \frac{1}{x}$ از اینکه $x \rightarrow 0$ نتیجه می‌گیریم $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

مثال. حد تابع $f(x) = \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x+2}$ را در $x \rightarrow +\infty$ بیابید.

حل. قرار می‌دهیم $t = x+2$ ، از اینکه $x \rightarrow +\infty$ نتیجه می‌شود $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x+2)+1}{x+2}\right)^{x+2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

مثال. حد تابع $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-2x+3}$ را در $x \rightarrow +\infty$ بیابید.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-2x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 = e^{-2} \times 1^3 = e^{-2}$$

۶- پیوستگی

تعریف. تابع $f(x)$ را در نقطه x_0 پیوسته می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

$$x_0 \in D_f \quad ۱-$$

۲- حد تابع در نقطه x_0 وجود داشته باشد.

۳- حد تابع در نقطه x_0 برابر با $f(x_0)$ شود، به عبارت دیگر

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

مثال. پیوستگی تابع $f(x) = x^2 + 3x$ را در نقطه $x_0 = 1$ بررسی کنید.

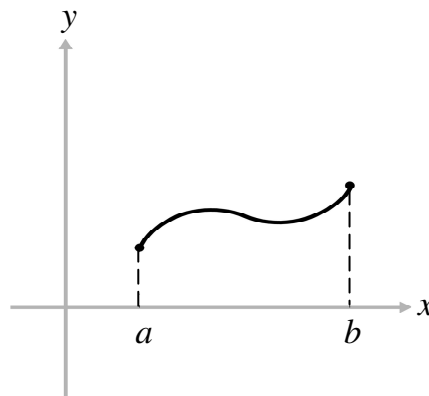
حل. $D_f = R$ پس $1 \in D_f$ (شرط اول برقرار است).

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4 \quad (\text{شرط دوم برقرار است.})$$

$$f(1) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \quad (\text{شرط سوم برقرار است.})$$

بنابراین تابع f در $x = 1$ پیوسته است.

توجه. از نظر هندسی، هرگاه نمودار f را بتوان بدون برداشتن قلم رسم نمود، تابع f روی دامنه پیوسته است.



تابع $y = f(x)$ در تمام نقاط دامنه پیوسته است.

حد و پیوستگی ۷۹

نکته. توابع چند جمله‌ای، توابع کسری، توابع رادیکالی، توابع نمایی، توابع لگاریتمی، توابع مثلثاتی، و معکوس مثلثاتی روی دامنه خود پیوسته هستند.

در مثال قبل، تابع $f(x) = x^2 + 3x$ یک چند جمله‌ای و لذا روی دامنه خود پیوسته است. به خصوص در $x = 1$ پیوسته می‌باشد.

از نکته قبل نتیجه می‌گیریم که باید توابع ناپیوسته را در بین توابع چند ضابطه‌ای و تابع جزء صحیح جستجو کرد.

مثال. پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & , \quad x \geq 2 \\ x^2 + 1 & , \quad x < 2 \end{cases}$ را در نقطه $x_0 = 2$ بررسی کنید.

حل. $2 \in D_f$ (شرط اول برقرار است).

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^3 - 1 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + 1 = 5$$

حد تابع در نقطه $x_0 = 2$ وجود ندارد (شرط دوم برقرار نیست) بنابراین تابع f در این نقطه ناپیوسته است.

تابع $y = f(x)$ در نقطه x_0 ناپیوستگی اساسی دارد، هرگاه حد تابع $f(x)$ در x_0 وجود نداشته باشد. (شرط دوم برقرار نباشد.) در مثال قبل، f در نقطه $x_0 = 2$ ناپیوستگی اساسی دارد.

مثال. پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x & , \quad x > 1 \\ 4 & , \quad x = 1 \\ x^2 - 1 & , \quad x < 1 \end{cases}$ را در نقطه مرزی بررسی کنید.

حل.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1-x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

پس تابع حد دارد. (شرط دوم برقرار است.) از طرفی $f(1) = 4$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

۸۰ فصل سوم

لذا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ (شرط سوم برقرار نیست.) بنابراین تابع f در نقطه $x_0 = 1$ ناپیوسته است.

تابع $y = f(x)$ در نقطه x_0 ناپیوستگی رفع شدنی دارد، هرگاه حد تابع $f(x)$ در x_0 وجود داشته باشد ولی $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ (شرط سوم برقرار نباشد.) در مثال قبل، تابع f در نقطه $x_0 = 1$ ناپیوستگی رفع شدنی دارد.

مثال. مقدار a را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 3 \\ ax + 2 & x < 3 \end{cases}$ روی R پیوسته باشد.

حل. a را طوری می‌یابیم که تابع f روی نقطه مرزی $x = 3$ پیوسته باشد.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - x = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} ax + 2 = 3a + 2 \end{aligned}$$

از تساوی حد راست و چپ به دست می‌آید

$$3a + 2 = 6 \rightarrow a = \frac{4}{3}$$

مثال. مقدار a را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^3 - 8|}{x - 2} & x < 2 \\ 2x + a & x \geq 2 \end{cases}$ روی R پیوسته باشد.

حل. باید f در نقطه مرزی $x = 2$ پیوسته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^3 - 8|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^3 - 8)}{x - 2}$$

حد و پیوستگی ۸۱

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 + 2x + 4)}{1} = -12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x + a = 4 + a$$

از تساوی حد چپ و راست بدست می‌آید.

$$4 + a = -12 \Rightarrow a = -16$$

$$\text{مثال. } a \text{ و } b \text{ را طوری بیابید که تابع } f(x) = \begin{cases} 1 - ax^2 & x \geq 1 \\ 2ax + b & 0 < x < 1 \\ x^3 - 5 & x \leq 0 \end{cases} \text{ روی } R$$

پیوسته باشد.

حل. f باید در نقاط مرزی $x = 0$ و $x = 1$ پیوسته باشد.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - ax^2 = 1 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2ax + b = 2a + b \end{cases} \Rightarrow 1 - a = 2a + b \quad (*)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2ax + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 - 5 = -5 \end{cases} \Rightarrow b = -5$$

اکنون با قرار دادن $b = -5$ در معادله (*) بدست می‌آید $a = 2$ ، بنابراین به ازای $a = 2$ و $b = -5$ تابع f روی R پیوسته است.

۷- تمرین

۱- مجانب‌های افقی توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{2x - 4x^2 + 1}{5x^2 - 6}, \quad g(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$$

۲- مجانب های قائم توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{3x+1}{x+4}, \quad g(x) = \frac{5x+1}{x^2+3x+2}$$

۳- تابع $f(x) = \frac{2x^3-4x+1}{x^3-2x^2}$ چند مجانب دارد؟

۴- تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ چند مجانب دارد؟

۵- حد بگیرید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+4}{x+3} \right)^{x+3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x+1} \right)^{2x+1}$$

۶- حد تابع $f(x) = (1+3 \ln 2^x)^{\frac{1}{x}}$ را در نقطه $x=0$ بیابید.

۷- پیوستگی توابع زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید.

$$f(x) = \sqrt{2x+5}, \quad x_0 = 2$$

$$g(x) = \begin{cases} -x+4 & x > 1 \\ x^2+2 & x \leq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

۸- نوع ناپیوستگی توابع زیر را در نقطه داده شده تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2-5x & x \geq -1 \\ x^3 & x < -1 \end{cases}, \quad x_0 = -1$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ x^3 & x < 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$$

حد و پیوستگی ۸۳

۹- a را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2ax^2 - 3 & x < 1 \end{cases}$ روی R پیوسته باشد.

۱۰- a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} x + 2a & x < -2 \\ 3ax + b & -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - b & x > 1 \end{cases}$ پیوسته باشد.

۱۱- a را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x > 1 \\ (a^2 + 3x)x + 2 & x < 1 \end{cases}$ پیوسته باشد.

۱۲- اگر خط $y = \frac{-1}{2}$ مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{ax^2 + 5x - 3}$ باشد، مقدار $f(1)$ را طوری تعریف کنید که تابع f در $x = 1$ پیوسته باشد.

یادداشت

فصل چهارم

مشتق توابع

ما در جهانی زندگی می‌کنیم که تغییرات در آن همواره جریان دارد، میزان تغییر یک کمیت نسبت به کمیت دیگر اهمیت ویژه‌ای دارد. مثلاً میزان تغییر مسافت به زمان، سرعت است یا میزان تغییر هزینه کل نسبت به مقدار تولید، هزینه نهایی است و یا میزان تغییر درآمد کل نسبت به مقدار تقاضا، درآمد نهایی است. این میزان تغییرها و موارد بسیاری دیگر برحسب مشتق قابل بیان هستند.

۱- تعریف مشتق

تعریف. فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در اطراف نقطه x_0 تعریف شده باشد، مشتق تابع $y = f(x)$ را در نقطه x_0 با $f'(x_0)$ نشان می‌دهیم و برابر با حد زیر است

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

در صورتی که حد فوق وجود داشته باشد، می‌گوییم تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر است.

مثال. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = 3x + 1$ را در نقطه $x_0 = 1$ بیابید.
حل.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x + 1) - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3 \end{aligned}$$

بنابراین

$$f'(1) = 3$$

مثال. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = x^3 + 2$ را در نقطه $x_0 = 2$ بیابید.
حل.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 + 2) - 10}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = 12 \end{aligned}$$

بنابراین

$$f'(2) = 12$$

مثال. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sin x$ را در نقطه $x_0 = 0$ بیابید.
حل.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 0}{x} = 1$$

بنابراین

$$f'(0) = 1$$

برای درک مفهوم مشتق، فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد. قرار می‌دهیم

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad \text{و} \quad \Delta x = x - x_0$$

هرگاه متغیر مستقل x از نقطه x_0 به مقدار Δx تغییر کند، متغیر $f(x)$ از $f(x_0)$ به میزان Δy تغییر می‌کند و داریم

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

لذا $f'(x_0)$ میزان تغییر $f(x)$ نسبت به x در نقطه x_0 می‌باشد.

مثال. مشتق تابع $f(x) = x^2$ را در نقطه $x_0 = 3$ بیابید و آن را تفسیر نمایید.
حل.

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = 6$$

بنابراین

$$f'(3) = 6$$

از طرفی

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6$$

لذا در اطراف نقطه $x_0 = 3$ ، میزان تغییرات $f(x) = x^2$ حدود ۶ برابر تغییرات x است.
مثلاً اگر $\Delta x = 0/1$ آنگاه $\Delta y \cong 6(0/1) = 0/6$ است.

۲- محاسبه مشتق

محاسبه مشتق با استفاده از تعریف آن همواره ساده نیست، معمولاً برای محاسبه مشتق از فرمول‌های مشتق استفاده می‌شود.

قواعد مشتق‌گیری

فرض کنیم $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند، داریم

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

$$(c)' = 0 \quad (c \text{ عددی ثابت است.})$$

مشتق توابع چند جمله‌ای و رادیکالی

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad n \in R \quad (*)$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

فرمول (*) به ازای هر عدد حقیقی n برقرار است، مشتق‌های زیر با استفاده از این فرمول محاسبه شده‌اند.

$$(x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2$$

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-2}$$

$$(x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

تذکر. مشتق توابع $\sqrt{x}$ و $\sqrt[3]{x}$ و $\frac{1}{x}$ از فرمول (*) بدست آمده‌اند.

مثال. مشتق تابع $f(x) = x^3$ را در نقطه $x_0 = 3$ بیابید.
حل.

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(3) = 6$$

مثال. مشتق تابع $f(x) = x^4 + 5x^3 - 7x + 5$ را بیابید.

حل. با استفاده از قواعد مشتق‌گیری داریم

$$f'(x) = 4x^3 + 15x^2 - 7 + 0$$

توجه. فرض کنیم $y = f(x)$ ، مشتق تابع f نسبت به x را با این نمادها نشان می‌دهند.

$$f'(x), \quad y'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}$$

مثال. اگر $y = \sqrt[3]{x^4}$ ، $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

حل.

$$\frac{dy}{dx} = \left(\sqrt[3]{x^4} \right)' = \left(x^{\frac{4}{3}} \right)' = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

مثال. مشتق تابع $y = \sqrt{x}(x^2 + x)$ را بیابید.

حل. با استفاده از قاعده ضرب داریم

$$y' = \left(\sqrt{x}(x^2 + x) \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) + (2x + 1)\sqrt{x}$$

مثال. مشتق تابع $f(x) = \frac{4x+3}{1+x^2}$ را بیابید.

$$f'(x) = \left(\frac{4x+3}{1+x^2} \right)' = \frac{4(1+x^2) - 2x(4x+3)}{(1+x^2)^2}$$

۳- تعبیر هندسی مشتق

یکی از مسائل مهم ریاضی دانان قرن هفدهم، یافتن معادله خط مماس بر منحنی در یک نقطه بود ، در نهایت شیب خط مماس، مشتق تابع تعریف شد.

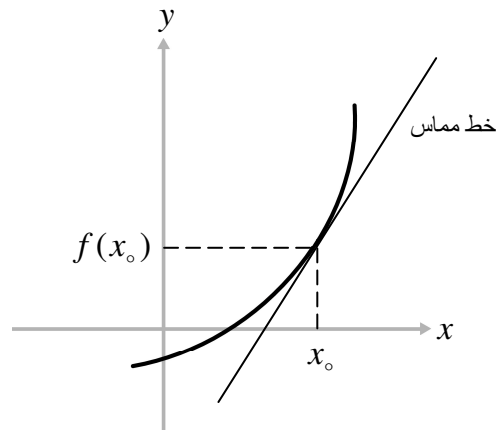
فرض کنیم $y = f(x)$ در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد، شیب خط مماس بر منحنی f

در نقطه x_0 برابر است با

$$m = f'(x_0)$$

و معادله خط مماس بر منحنی f در نقطه x_0 به صورت زیر است.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



خط مماس بر منحنی f در نقطه x_0

مثال. معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = x^3$ را در نقطه $x_0 = 1$ بیابید.
حل.

$$f(1) = 1 \quad \text{و} \quad f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(1) = 3$$

بنابراین

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

$$y = 1 + 3(x - 1)$$

$$y = 3x - 2$$

مثال. معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه $x_0 = 4$ بیابید.
حل.

$$f(4) = 2 \quad \text{و} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$$

بنابراین

$$y = f(4) + f'(4)(x - 4)$$

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) \rightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$$

مثال. شیب خط مماس بر منحنی $y = 2x^2 + \frac{1}{x}$ را در نقطه $x_0 = 1$ بیابید.

حل. شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $x_0 = 1$ برابر با $y'(1)$ است.

$$y' = 4x - \frac{1}{x^2}, \quad y'(1) = 3$$

۴- مشتق توابع مثلثاتی

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$

مثال. مشتق تابع $y = 5 \cos x + \frac{x}{3}$ را بیابید.

حل.

$$y' = -5 \sin x + \frac{1}{3}$$

مثال. $\frac{dy}{dx}$ را در تابع $y = x^2 \cdot \sin x$ بیابید.

حل.

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 \cdot \sin x)' = 2x \cdot \sin x + \cos x \cdot x^2$$

مثال. مقدار $y'(\frac{\pi}{3})$ را در تابع $y = \frac{\tan x}{3x - 1}$ بیابید.

حل.

$$y' = \frac{(\tan^2 x + 1)(3x - 1) - 3 \tan x}{(3x - 1)^2}$$

$$y'(\circ) = \frac{-1}{(-1)^2} = -1$$

مشتق توابع معکوس مثلثاتی

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\cot^{-1} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

مثال. مشتق تابع $f(x) = \tan^{-1} x + 5 \tan x$ را بیابید.

حل.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 5 \sec^2 x$$

مثال. مشتق تابع $f(x) = 4 \sin^{-1} x + x^2$ را در نقطه $x = \circ$ بیابید.

$$f'(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + 2x, \quad f'(\circ) = 4$$

۵- مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

مثال. مشتق تابع $y = -4e^x + 5 \ln x$ را بیابید.

حل.

$$\frac{dy}{dx} = (-4e^x + 5 \ln x)' = -4e^x + \frac{5}{x}$$

مثال. مشتق تابع $y = 2^x + 3 \log_4 x$ را بیابید.

حل.

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + \frac{3}{x \cdot \ln 4}$$

مثال. شیب خط مماس بر منحنی $f(x) = \sin x \cdot e^x$ را در نقطه $x = 0$ بیابید.

حل. شیب خط مماس در نقطه $x = 0$ برابر با $f'(0)$ است.

$$f'(x) = \cos x \cdot e^x + e^x \cdot \sin x$$

$$f'(0) = 1$$

مثال. مشتق تابع $y = \frac{1}{\ln x}$ را بیابید.

حل.

$$y' = \left(\frac{1}{\ln x} \right)' = \frac{0 - \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = -\frac{1}{x \ln^2 x}$$

مشتق قدر مطلق و جزء صحیح

$$(|x|)' = \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0$$

$$([x])' = 0, \quad x \in R - Z$$

مثال. مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x} \cdot |x|$ را بیابید.

حل.

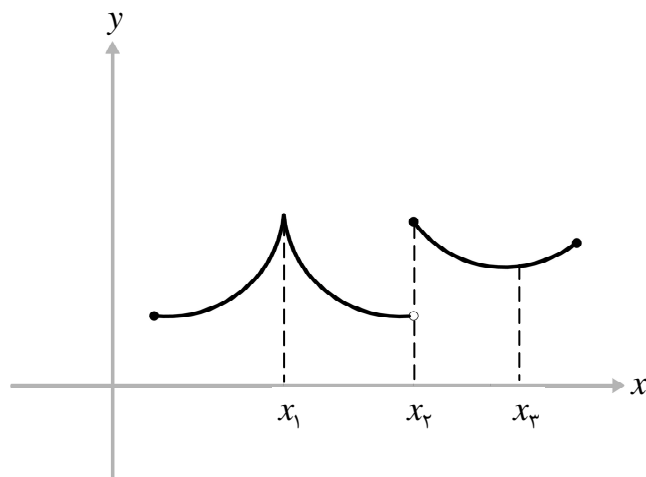
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot |x| + \sqrt{x} \cdot \frac{x}{|x|}$$

۶- ارتباط بین پیوستگی و مشتق پذیری

قضیه. اگر تابع $f(x)$ در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد، آنگاه f در نقطه x_0 پیوسته است.

مشتق پذیری $\Leftarrow$ پیوستگی

توجه. در نقاطی که نمودار تابع $f(x)$ دارای شکستگی است، تابع مشتق پذیر نیست.



تابع $f(x)$ در نقطه x_1 پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.

تابع $f(x)$ در نقطه x_2 نه پیوسته و نه مشتق پذیر است.

تابع $f(x)$ در نقطه x_3 پیوسته و مشتق پذیر است.

تابع $y = |x|$ در نقطه $x = 0$ شکستگی دارد لذا در این نقطه مشتق پذیر نیست.

مثال. تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ در چه نقاطی مشتق پذیر نیست؟

حل.

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

منحنی f در $x = \pm 2$ شکستگی دارد، لذا در این نقاط مشتق پذیر نیست.

مثال. تابع $f(x) = [x]$ در چه نقاطی مشتق پذیر نیست؟

حل. تابع $[x]$ در نقاط صحیح پیوسته نیست، بنابراین در این نقاط مشتق پذیر نیست.

مثال. a و b را طوری بیابید که تابع زیر روی R مشتق پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4 & x \geq 1 \\ 2bx & x < 1 \end{cases}$$

حل. فقط کافی است تابع در نقطه مرزی $x = 1$ مشتق پذیر باشد.

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & x \geq 1 \\ 2b & x < 1 \end{cases}$$

باید $f'(1)$ در ضابطه اول و دوم $f'(x)$ یکسان بدست آید، بنابراین $2a = 2b$ در نتیجه $a = b$ ، از طرفی هر تابع مشتق پذیر پیوسته است، لذا باید $f(x)$ در $x = 1$ پیوسته باشد.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 - 4 = a - 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2bx = 2b \end{cases} \Rightarrow a - 4 = 2b$$

با قرار دادن $a = b$ در معادله با لا بدست می آید

$$b = -4 \text{ و } a = -4$$

۷- تمرین

۱- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق توابع زیر را در نقاط داده شده بیابید.

$$f(x) = -5x + 1, \quad x_0 = 3$$

$$g(x) = x^2 + 4, \quad x_0 = 1$$

$$h(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 2$$

۲- با استفاده از تعریف مشتق به صورت $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ، مشتق

تابع $f(x) = x^2$ را بدست آورید.

۳- مشتق تابع $f(x) = x^2 - x$ را در نقطه $x_0 = 2$ بیابید و آن را تفسیر کنید.

۴- مشتق توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = -x^5 + 3x^2 + 4x - 1$$

$$g(x) = -\frac{2}{x} + 4\sqrt{x}$$

$$h(x) = \frac{x^2 - 2x}{1 - x}$$

۵- در توابع زیر $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

$$y = \frac{\sin x}{x^4}, \quad y = \frac{1}{\cot x}, \quad y = -5 \sin x + 8 \cos x$$

۶- معادله خط مماس بر منحنی‌های زیر را در نقطه داده شده بیابید.

$$f(x) = x^2 - 2x, \quad x_0 = 1$$

$$g(x) = x^4 - 3x, \quad x_0 = -1$$

$$h(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

۷- مشتق بگیرید.

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x, \quad g(x) = \ln(x^4), \quad h(x) = \frac{3^x}{x^2 + 4}$$

۸- شیب خط مماس بر منحنی $f(x) = x^2 \ln x$ را در نقطه $x_0 = 1$ بیابید.

۹- مشتق تابع $f(x) = x^3 \cdot [x]$ را در نقطه $x_0 = \frac{5}{2}$ بیابید.

۱۰- تابع $f(x) = |x^2 + x - 2|$ در چه نقاطی مشتق پذیر نیست؟

۱۱- اگر $f(x) = x^2 - 4 \sin^{-1} x$ ، $f'(0)$ را بیابید.

۱۲- اگر $f(x) = x^2 \tan^{-1} x$ ، $f'(-1)$ را بیابید.

۱۳- معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه $x = 0$ بیابید.

۱۴- a و b را طوری بیابید که تابع داده شده روی R مشتق پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + a & x \geq 2 \\ bx^2 + 1 & x < 2 \end{cases}$$

۸- مشتق تابع مرکب

قضیه مشتق تابع مرکب (قاعده زنجیری). فرض کنیم $y = f(u)$ تابعی مشتق پذیر از u و $u = u(x)$ تابعی مشتق پذیر از x باشد، در این صورت مشتق تابع f نسبت به x به صورت زیر است.

$$f'(u(x))_x = f'(u) \cdot u'(x)$$

به عبارت دیگر

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$$

توجه. قاعده زنجیری بر حسب نماد دیگر مشتق ، به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال. مشتق تابع $y = (4x - 1)^7$ را بیابید.

حل. قرار می دهیم $u = 4x - 1$ پس $y = u^7$ لذا

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$$

$$y' = 7u^6 \cdot (4) = 28(4x - 1)^6$$

نکته مهم. هرگاه $y = f(u(x))$ ، بنابه قاعده زنجیری به تمام فرمول های مشتق ضریب $u'(x)$ اضافه می گردد. برای نمونه چند فرمول مشتق مرکب در زیر آمده است.

$$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$(\tan u)' = \sec^2 u \cdot u'$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(|u|)' = \frac{u}{|u|} \cdot u'$$

$$(\tan^{-1} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

مثال. مشتق تابع $y = \sqrt{x^3 - 1}$ را بیابید.

حل.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u', \quad (u = x^3 - 1)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^3 - 1}} \cdot 3x^2$$

مثال. مشتق تابع $y = \sin(x^5 + 5x)$ را بیابید.

حل.

$$y' = \cos u \cdot u', \quad (u = x^5 + 5x)$$

$$y' = \cos(x^5 + 5x) \cdot (5x^4 + 5)$$

مثال. مشتق تابع $y = \ln(8x^3 + 1)$ را بیابید.

حل.

$$y' = \frac{u'}{u}, \quad (u = 8x^3 + 1)$$

$$y' = \frac{16x}{8x^2 + 1}$$

مثال. مشتق تابع $y = |\sin x|$ را بیابید.

حل.

$$y' = \frac{u}{|u|} \cdot u' \quad , \quad (u = \sin x)$$

$$y' = \frac{\sin x}{|\sin x|} \cdot \cos x$$

مثال. مشتق تابع $f(x) = \sin^3 x$ را در نقطه $x_0 = \frac{\pi}{4}$ بیابید.

حل.

$$y' = 3u^2 \cdot u' \quad , \quad (u = \sin x)$$

$$y' = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

مثال. شیب خط مماس بر منحنی $y = (x^2 - 3)^4$ را در نقطه $x_0 = 2$ بیابید.

حل.

$$y' = 4u^3 \cdot u'$$

$$y' = 4(x^2 - 3)^3 \cdot 2x$$

$$m = y'(2) = 32$$

مثال. شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = e^{\sqrt{x}+4}$ را در نقطه $x = 1$ بیابید.

حل.

$$y' = e^u \cdot u' \quad (u = \sqrt{x} + 4)$$

$$y' = e^{\sqrt{x}+4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$m = f'(1) = \frac{1}{2}e^5$$

مثال. اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin x$ ، مشتق $f \circ g(x)$ را نسبت به x بیابید.
حل.

$$y = f \circ g(x) = \sqrt{\sin x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' \quad , \quad (u = \sin x)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x$$

مثال. اگر $f'(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$ ، مشتق تابع $f(\sqrt{x})$ را بیابید.

حل. قرار می‌دهیم $u = \sqrt{x}$ و $y = f(u)$ داریم

$$y' = f'(u) \cdot u'(x)$$

$$y' = \frac{1}{u^3 + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{(\sqrt{x})^3 + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۹- مشتق مراتب بالاتر

اگر $y = f(x)$ ، مشتق مراتب بالاتر f به صورت زیر تعریف می‌شود.

$f'(x)$	مشتق مرتبه اول f
$f''(x) = (f'(x))'$	مشتق مرتبه دوم f
$f^{(3)}(x) = (f''(x))'$	مشتق مرتبه سوم f
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$	مشتق مرتبه n ام f

مشتق توابع ۱۰۱

توجه. مشتق مراتب بالاتر بر حسب نماد $\frac{df}{dx}$ به صورت زیر است.

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x)$$

⋮

$$\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

مثال. اگر $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 4$ مشتق مرتبه سوم f را بیابید.
حل.

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 18x - 2$$

$$f^{(3)}(x) = 24x - 18$$

مثال. اگر $f(x) = \ln x$ ، $f''(2)$ را بیابید.
حل.

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(2) = -\frac{1}{4}$$

مثال. اگر $y = \frac{x^3}{3} + x + 3$ ، مقدار x را طوری بیابید که در آن $y' = y''$

حل.

$$y' = x^2 + 1$$

$$y'' = 2x$$

$$y' = y'' \Rightarrow x^2 + 1 = 2x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

مثال. مشتق مرتبه صدم تابع $f(x) = e^{2x}$ را در نقطه $x = 0$ بیابید.
حل.

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

$$f''(x) = 4e^{2x} = 2^2 e^{2x}$$

$$f^{(3)}(x) = 8e^{2x} = 2^3 e^{2x}$$

$$\vdots$$

$$f^{(100)}(x) = 2^{100} e^{2x}$$

$$f^{(100)}(0) = 2^{100}$$

۱۰- مشتق گیری ضمنی

در تابع $y = x^2 - 3x$ ، y به طور صریح بر حسب x بیان شده است ولی در رابطه $x^2 + y^2 - 7xy = 0$ ، y به طور ضمنی بر حسب x می باشد، فرم کلی توابع ضمنی بصورت $f(x, y) = 0$ است. در زیر چند تابع ضمنی آورده شده است.

$$f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 4 = 0$$

$$f(x, y) = x^2 y^3 - x^4 + y^4 = 0$$

قضیه. فرض کنیم y تابعی مشتق پذیر از x باشد که با رابطه ضمنی $f(x, y) = 0$ تعریف شده باشد، تحت شرایط مناسب، مشتق y نسبت به x از فرمول زیر بدست می آید.

$$y' = \frac{-f_x}{f_y}$$

در این فرمول f_x ، مشتق f نسبت به x است. (y ثابت محسوب می شود). همچنین f_y مشتق f نسبت به y است. (x ثابت محسوب می شود).

مثال. در معادله $x^2 + y^2 = 4$ ، y' را بیابید.

مشتق توابع ۱۰۳

حل.

$$f = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

مثال. مشتق y نسبت به x را در معادله $x^2 y^2 = 4x + y + 5$ بیابید.

حل.

$$f = x^2 y^2 - 4x - y - 5 = 0$$

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2xy^2 - 4}{2x^2 y - 1}$$

مثال. معادله خط مماس بر منحنی $x^2 + xy + y^2 - 3y = 10$ را در نقطه $A(2, 3)$ بیابید.

بیابید.

حل.

$$f = x^2 + xy + y^2 - 3y - 10 = 0$$

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x + y}{x + 2y - 3}$$

به ازای $x = 2$ و $y = 3$ ، شیب خط مماس در نقطه $A(2, 3)$ بدست می‌آید.

$$m = y' = -\frac{4 + 3}{2 + 6 - 3} = -\frac{7}{5}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 3 = -\frac{7}{5}(x - 2)$$

$$y = -\frac{7}{5}x + \frac{29}{5}$$

۱۱- تمرین

۱- مشتق بگیرید.

$$f(x) = \sqrt{1-4x} \quad , \quad g(x) = \cos(x^2 + x) \quad , \quad h(x) = (x^3 - 7x)^{10}$$

۲- شیب خط مماس بر منحنی $y = \frac{x}{1 + \ln(x+1)}$ را در نقطه $x=0$ بیابید.

۳- مشتق بگیرید.

$$f(x) = \ln(\sin x) \quad , \quad g(x) = e^{x^{-2}} \quad , \quad h(x) = \sqrt[3]{\cos(4x)}$$

۴- در توابع زیر $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

$$y = \sqrt[3]{|x| + x} \quad , \quad y = |\ln x| \quad , \quad y = \tan\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$$

۵- اگر $f(x) = e^x$ و $u(x) = x^2 - 4$ و $y = f(u)$ ، مطلوبست $\frac{dy}{dx}$

۶- اگر $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 1$ ، مشتق مرتبه سوم f را در نقطه $x=1$ بیابید.

۷- در تابع $y = ax^2 + bx + c$ ، مقدار b را طوری بیابید که در نقطه $x=1$ داشته باشیم $y' = y''$

۸- با استفاده از مشتق گیری ضمنی، y' را در معادله $x^5 + 4xy^2 - 3y^2 = 2$ بیابید.

۹- با استفاده از مشتق گیری ضمنی، $\frac{dy}{dx}$ را در معادله $x^2 + xy + y^2 = 7$ بیابید.

۱۰- شیب خط مماس بر منحنی $y^2 = 2x + 4y + 1$ را در نقطه $A(-2, 1)$ بیابید.

۱۱- خط مماس بر منحنی $4 = y^2 + y \ln(2x+3) + x \ln(3y-5)$ در نقطه

$A(-1, 2)$ محور y ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند.

۱۲- اگر $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$ ، مشتق تابع $f(x^2 - 3x + 2)$ را

بیابید.

۱۳- مشتق مرتبه پنجاه و هشتم تابع $f(x) = 2 \sin x$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ بیابید.

۱۴- مشتق بگیرید.

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin^{-1}(\sqrt{x}) \\g(x) &= \tan^{-1}(\tan x) \\h(x) &= \sqrt{\sin^{-1}(\ln x)}\end{aligned}$$

۱۲- دیفرانسیل تابع

فرض کنیم $y = f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد، دیفرانسیل این تابع را با dy نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$dy = f'(x)\Delta x$$

مثال. دیفرانسیل تابع $y = x^4$ را بیابید.

حل.

$$dy = y' \cdot \Delta x = 4x^3 \cdot \Delta x$$

اگر تعریف دیفرانسیل را برای متغیر مستقل x بکار ببریم، داریم

$$dx = (x')\Delta x = \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$$

لذا دیفرانسیل تابع $y = f(x)$ برابر است با

$$dy = f'(x)dx$$

دیفرانسیل چند تابع در زیر حساب شده است.

$$d(4x^2 - 6x) = (8x - 6)dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx$$

$$d\left(\frac{1}{x} + 4x\right) = \left(-\frac{1}{x^2} + 4\right)dx$$

مثال. اگر $f(x) = x^4 - x$ ، دیفرانسیل f را در نقطه $x = 1$ حساب کنید.

حل.

$$df = f'(x)dx$$

$$df = (4x^3 - 1)dx$$

۱۰۶ فصل چهارم

به ازای $x=1$ داریم

$$df = 3dx$$

مثال. اگر $y = x^2 - 2x$ ، دیفرانسیل y را به ازای $x=2$ ، $\Delta x = 0/1$ حساب کنید.
حل.

$$dy = y'\Delta x$$

$$dy = (2x - 2)\Delta x$$

به ازای $x=2$ و $\Delta x = 0/1$ داریم

$$dy = 2 \times 0/1 = 0/2$$

تذکر. ما قبلاً $\frac{dy}{dx}$ را به عنوان مشتق تابع $y = f(x)$ نسبت به x بیان کرده بودیم، این نماد با مفهوم دیفرانسیل سازگار است زیرا

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad , \quad dy = f'(x)dx$$

فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در نقطه x_0 مشتق پذیر باشد، قرار می‌دهیم $\Delta x = x - x_0$ و $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

بنا به تعریف مشتق

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

به ازای Δx های کوچک داریم

$$f'(x_0) \cong \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta y \cong f'(x_0)\Delta x$$

با جایگذاری $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ در رابطه اخیر، تقریب زیر بدست می‌آید.

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (\text{برای } \Delta x \text{ های کوچک})$$

از این رابطه می‌توان برای محاسبات تقریبی استفاده کرد.

مثال. با استفاده از دیفرانسیل، مقدار تقریبی $\sqrt{10}$ را بیابید.

حل. قرار می‌دهیم $f(x) = \sqrt{x}$ ، نزدیک ترین عدد به 10 که جذر صحیح دارد، 9 است.

مشتق توابع ۱۰۷

$$\begin{cases} x = 10 \\ x_0 = 9 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = 10 - 9 = 1$$

پس

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(9) = \frac{1}{6}$$

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$f(10) \cong f(9) + f'(9) \cdot (1)$$

$$\sqrt{10} \cong 3 + \frac{1}{6} \times 1 = 3.1\bar{6}$$

بنابراین

$$\sqrt{10} \cong 3.1\bar{6}$$

مثال. مقدار تقریبی $\sqrt[3]{7/5}$ را بیابید.

حل. قرار می‌دهیم $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\begin{cases} x = 7/5 \\ x_0 = 8 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = -0.5$$

پس

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad f'(8) = \frac{1}{12}$$

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$f(7/5) \cong f(8) + f'(8) \cdot (-0.5)$$

$$\sqrt[3]{7/5} \cong 2 + \frac{-0.5}{12} = 1.95\bar{8}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{7/5} \cong 1.95\bar{8}$$

۱۳- مشتق تابع معکوس

قضیه. فرض کنیم $y = f(x)$ تابعی یک به یک و مشتق پذیر و $f(a) = b$ باشد، تحت

۱۰۸ فصل چهارم

شرایط مناسب، مشتق تابع f^{-1} در نقطه b برابر است با

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

توجه. اگر $y = f(x)$ ، آنگاه $x = f^{-1}(y)$ و مشتق تابع معکوس برحسب دیفرانسیل بدین صورت تبدیل می‌شود.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

مثال. اگر $f(x) = 3x^5 + 2x^3$ ، مشتق تابع f^{-1} را در نقطه $(5, 1)$ بیابید.
حل. داریم $f(1) = 5$

$$f'(x) = 15x^4 + 6x^2 \rightarrow f'(1) = 21$$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{21}$$

مثال. اگر $y = \ln(x^2 + x)$ و $x = \frac{2t+3}{t}$ ، مقدار $\frac{dy}{dt}$ را در نقطه $t = 1$ بیابید.

حل. به ازای $t = 1$ بدست می‌آید $x = 5$ ، بنا به قاعده زنجیری

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2x+1}{x^2+x} \cdot \left(\frac{2t - (2t+3)}{t^2} \right)$$

به ازای $t = 1$ و $x = 5$ داریم

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{11}{30} \right) \left(\frac{-3}{1} \right) = -\frac{11}{10}$$

بنا به مشتق تابع معکوس

مشتق توابع ۱۰۹

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dt}}$$

و به ازای $t = 1$ و $x = 5$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{-\frac{11}{10}} = -\frac{10}{11}$$

۱۴- مشتق لگاریتمی

می‌توان از طرفین یک معادله ابتدا لگاریتم و بعد مشتق گرفت، این روش را مشتق لگاریتمی می‌نامیم.

مثال. مشتق تابع $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ را به روش مشتق لگاریتمی بیابید.

حل. از طرفین تساوی $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ ، $\ln$ می‌گیریم.

$$\ln y = \ln \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x} \right)$$

$$\ln y = \ln(\sqrt{x+1}) - \ln x$$

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x+1) - \ln x$$

از طرفین تساوی نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$$

$$y' = y \left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x} \right)$$

$$y' = \frac{\sqrt{x+1}}{x} \left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x} \right)$$

نکته. در بعضی از توابع، استفاده از مشتق لگاریتمی سرعت مشتق گیری را افزایش می دهد.

مثال. مشتق تابع $y = \frac{(x+1)^2 \cdot \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 \cdot (x-3)^5}$ را بیابید.

حل. از طرفین تساوی $\ln$ می گیریم.

$$\ln y = 2 \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x-1) - 3 \ln(x+4) - 5 \ln(x-3)$$

از طرفین تساوی مشتق می گیریم.

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - \frac{5}{x-3}$$

$$y' = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 (x-3)^5} \cdot \left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - \frac{5}{x-3} \right)$$

مثال. مشتق تابع $y = x^{\sin x}$ را بیابید. ($x > 0$)

حل. از طرفین تساوی $\ln$ می گیریم.

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

از طرفین مشتق می گیریم.

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$y' = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

۱۵- تمرین

۱- دیفرانسیل توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = -3x + 4, \quad g(x) = \sqrt{x+4}, \quad h(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1}$$

مشتق توابع ۱۱۱

۲- دیفرانسیل تابع $y = 2x^2 - 3x + 1$ را به ازای $x = 1$ و $\Delta x = 0/2$ بیابید.

۳- دیفرانسیل تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ را به ازای $x = 2$ بیابید.

۴- Δx چقدر باشد تا دیفرانسیل تابع $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ در $x = \frac{\pi}{6}$ برابر با $0/2$ باشد؟

۵- مقدار تقریبی $\sqrt{17}$ را با استفاده از دیفرانسیل بیابید.

۶- مقدار تقریبی $\sqrt{24}$ را با استفاده از دیفرانسیل بیابید.

۷- با استفاده از دیفرانسیل، مقدار تقریبی $\sqrt[3]{(4/0.1)^2 - 2(4/0.1)}$ را بیابید.

۸- اگر $f(x) = x^3 + 2x - 1$ ، مشتق تابع $f^{-1}(x)$ را در نقطه $A(-1, 0)$ بیابید.

۹- اگر $f(x) = x^5 + 5x^3 + 2x - 4$ ، مشتق تابع $f^{-1}(x)$ را در نقطه $x = 4$ بیابید.

۱۰- مشتق تابع $y = \frac{(2x-1)^3 \cdot \sqrt{5x-6}}{(x+4)^2 \cdot \sqrt[3]{x+6}}$ را در نقطه $x = 2$ بدست آورید.

۱۱- مشتق توابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = x^x, \quad g(x) = (x+1)^{\frac{1}{x}}$$

۱۲- نسبت تغییرات $(x^2 - \sqrt{x})$ بر $\left(x - \frac{1}{x}\right)$ را در $x = 1$ بیابید.

راهنمایی: نسبت تغییرات مفهوم مشتق دارد.

یادداشت

فصل پنجم

کاربردهای مشتق

یکی از کاربردهای مهم مشتق، تعیین بیشترین یا کمترین مقدار کمیت‌ها می‌باشد. مثلاً تعیین کمترین مواد مصرف شده برای ساختن یک قوطی حلبی با حجمی معلوم، یا تعیین تعداد تولید روزانه از نوعی کالا به طوری که سود کل، بیشترین باشد. محاسبه حد توابع مبهم و رسم توابع از دیگر کاربردهای مشتق است.

۱- اکسترمم‌ها و نقاط بحرانی

تعریف. تابع $y = f(x)$ در نقطه x_0 ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه در اطراف نقطه x_0 تابع $f(x_0)$ بیشترین مقدار را داشته باشد.

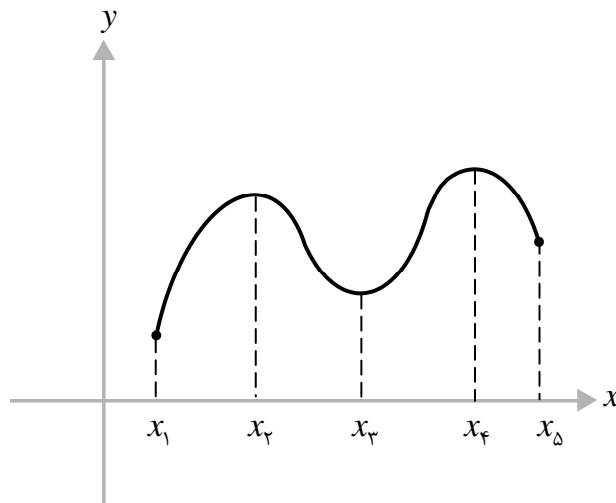
همچنین تابع $y = f(x)$ در نقطه x_0 مینیمم نسبی دارد، هرگاه در اطراف نقطه x_0 تابع $f(x_0)$ کمترین مقدار را داشته باشد.

تعریف. تابع $y = f(x)$ روی یک فاصله در نقطه x_0 ماکسیمم مطلق دارد، هرگاه $f(x_0)$ بیشترین مقدار f روی این فاصله باشد.

همچنین تابع $y = f(x)$ روی یک فاصله در نقطه x_0 مینیمم مطلق دارد، هرگاه $f(x_0)$ کمترین مقدار f روی این فاصله باشد.

توجه. نقاط ماکسیمم یا مینیمم را نقاط اکسترمم می‌نامیم.

مثال. در شکل زیر نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع $y = f(x)$ روی فاصله $[x_1, x_5]$ به طور هندسی نشان داده شده است.



f در نقطه x_1 مینیمم مطلق دارد.

f در نقطه x_2 ماکسیمم نسبی دارد.

f در نقطه x_3 مینیمم نسبی دارد.

f در نقطه x_4 ماکسیمم نسبی و مطلق دارد.

f در نقطه x_5 اکسترمم نسبی و مطلق ندارد.

تعریف. نقطه x_0 متعلق به دامنه f را نقطه بحرانی f می‌نامیم، هرگاه $f'(x_0) = 0$ یا $f'(x_0)$ وجود نداشته باشد.

مثال. نقاط بحرانی تابع $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ را بیابید.

حل. برای تعیین نقاط بحرانی f ، معادله $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم.

$$f'(x) = 4x - 4 = 0 \rightarrow x = 1$$

$x = 1$ نقطه بحرانی f است.

مثال. نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را بیابید.

حل.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$x=0$ و $x=2$ نقاط بحرانی f هستند.

مثال. نقطه بحرانی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را بیابید.

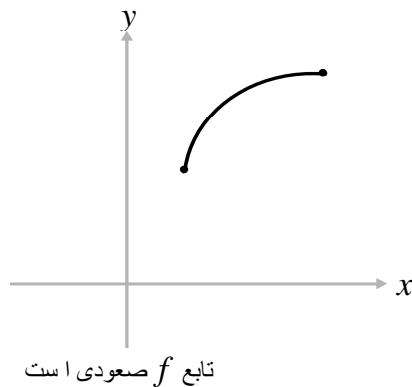
حل.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

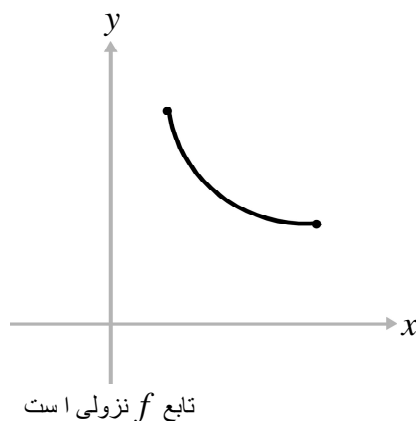
$f'(0)$ وجود ندارد. بنابراین $x=0$ نقطه بحرانی f است.

۲- تعیین اکسترم‌های نسبی

تابع $y = f(x)$ روی یک فاصله صعودی است، هرگاه با افزایش x ، $f(x)$ نیز افزایش یابد.



همچنین تابع $y = f(x)$ را روی یک فاصله نزولی است، هرگاه با افزایش x ، $f(x)$ کاهش یابد.



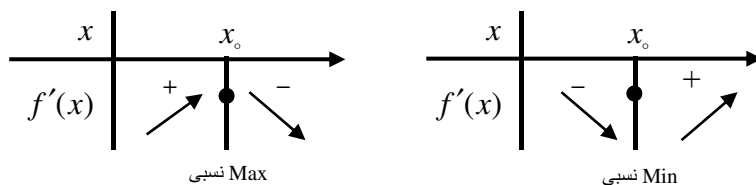
صعودی یا نزولی بودن تابع را با استفاده از مشتق می‌توان تعیین نمود.
 قضیه. فرض کنیم تابع $y = f(x)$ روی یک فاصله پیوسته باشد.
 الف) اگر روی این فاصله $f'(x) > 0$ ، آنگاه f روی این فاصله صعودی است.
 ب) اگر روی این فاصله $f'(x) < 0$ ، آنگاه f روی این فاصله نزولی است.
توجه. هر نقطه اکسترمم نسبی یک نقطه بحرانی می‌باشد، لذا نقاط اکسترمم نسبی را باید از بین نقاط بحرانی انتخاب کرد.

نقطه اکسترمم نسبی $\Leftarrow$ نقطه بحرانی

آزمون تعیین اکسترمم‌های نسبی

فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در اطراف نقطه بحرانی x_0 مشتق پذیر باشد، (بجز احتمالاً در x_0) اگر $f'(x)$ هنگام عبور از نقطه x_0 تغییر علامت دهد، آنگاه f در نقطه x_0 اکسترمم نسبی دارد.

توجه. بنا به آزمون بالا، برای تعیین اکسترمم‌های نسبی باید $f'(x)$ تعیین علامت شود.

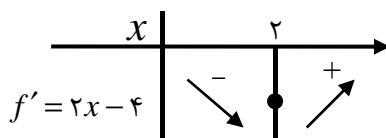


مثال. اکستریم نسبی تابع $f(x) = x^2 - 4x + 1$ را بیابید.

حل. $f'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$$

$x = 2$ نقطه بحرانی f است.

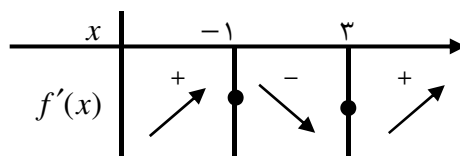


f در $x = 2$ مینیمم نسبی دارد.

مثال. اکستریم‌های نسبی تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ را بیابید.

حل.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$



f در $x = -۱$ ماکسیمم نسبی و در $x = ۳$ مینیمم نسبی دارد.
 مثال. نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = |۴x - ۲|$ را بیابید.
 حل.

$$f'(x) = \frac{۴x - ۲}{|۴x - ۲|} \times (۴)$$

$$f'(x) = \frac{۱۶x - ۸}{|۴x - ۲|} = ۰ \rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

x		$\frac{1}{2}$	
$۱۶x - ۸$	-	•	+
$ ۴x - ۲ $	+	•	+
$f'(x)$	-		+

f در $x = \frac{1}{2}$ مینیمم نسبی دارد.

مثال. اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x) = \frac{-x^2}{x-۱}$ را بیابید.

حل.

$$f'(x) = \frac{-۲x(x-۱) + x^2}{(x-۱)^2} = \frac{-x^2 + ۲x}{(x-۱)^2} = ۰$$

$$-x^2 + ۲x = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases} \quad \text{نقاط بحرانی}$$

x		$\circ$	۲	
$-x^۲ + ۲x$	-	•	•	-
$(x-۱)^۲$	+	+	+	+
$f'(x)$	-	+	-	

f در $x = ۰$ مینیمم نسبی و در $x = ۲$ ماکسیمم نسبی دارد.

۳- تعیین اکسترمم های مطلق

فرض کنیم تابع $y = f(x)$ روی فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد، برای تعیین اکسترمم های مطلق f روی این فاصله، بین نقاط بحرانی در این فاصله و دو نقطه a و b ، بزرگترین مقدار f ماکسیمم مطلق و کوچکترین مقدار f مینیمم مطلق می باشد.

مثال. اکسترمم های مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۲x + ۳$ را روی فاصله $[-۲, ۳]$ بیابید.

حل.

$$f'(x) = ۳x - ۲ = ۰ \rightarrow x = ۱ \quad \text{نقطه بحرانی}$$

$$f(-۲) = ۱۱$$

$$f(۱) = ۲$$

$$f(۳) = ۶$$

f در $x = ۱$ مینیمم مطلق و در $x = -۲$ ماکسیمم مطلق دارد.

مثال. اکسترمم های مطلق تابع $f(x) = x^{\frac{۲}{۳}}$ را روی فاصله $[-۱, ۸]$ بیابید.

حل.

$$f'(x) = \frac{۲}{۳} x^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$f'(\circ)$ وجود ندارد، لذا $x = \circ$ نقطه بحرانی f است.

$$f(-1) = 1$$

$$f(\circ) = \circ$$

$$f(1) = 4$$

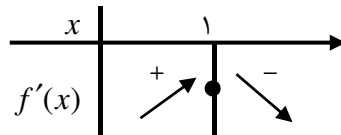
f در $x = \circ$ مینیمم مطلق و در $x = 1$ ماکسیمم مطلق دارد.

نکته. هرگاه تابع پیوسته $f(x)$ روی دامنه خود دقیقاً یک نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد، آن نقطه، اکسترمم مطلق f نیز می‌باشد.

مثال. اکسترمم مطلق تابع $f(x) = -2x^2 + 4x$ را بیابید.

حل.

$$f'(x) = -4x + 4 = 0 \rightarrow x = 1$$



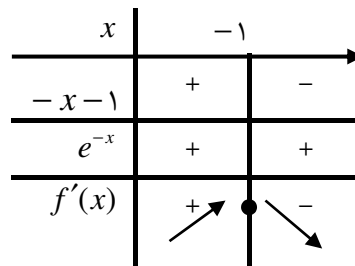
$x = 1$ تنها نقطه ماکسیمم نسبی f است، لذا f در $x = 1$ ماکسیمم مطلق دارد.

مثال. اکسترمم مطلق تابع $f(x) = (x+2)e^{-x}$ را بیابید.

حل.

$$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+2) = e^{-x}(1 - (x+2)) = 0$$

$$f'(x) = e^{-x}(-x-1) = 0 \rightarrow x = -1 \quad \text{نقطه بحرانی}$$



کاربردهای مشتق ۱۲۱

f در $x = -1$ ماکسیمم نسبی و ماکسیمم مطلق دارد.

مثال. دو عدد مثبت طوری بیابید که حاصل ضرب آنها ۱۲۱ و مجموع آنها حداقل باشد.

حل. فرض کنیم x و t این دو عدد باشند.

$$t \times x = 121 \rightarrow t = \frac{121}{x}$$

باید $x + t$ حداقل شود، پس باید تابع $f(x) = x + \frac{121}{x}$ را حداقل کنیم.

$$(D_f = (0, +\infty))$$

$$f'(x) = 1 - \frac{121}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 121 \rightarrow x = 11$$

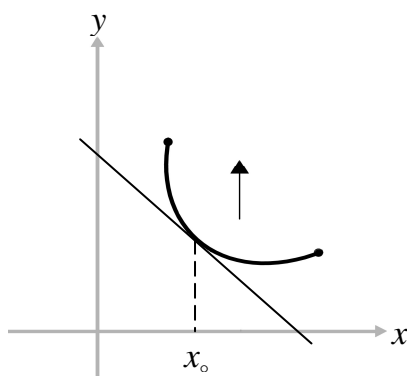
f در $x = 11$ روی فاصله $(0, +\infty)$ مینیمم مطلق دارد، از $x = 11$ نتیجه می‌شود $t = 11$ ، بنابراین این دو عدد ۱۱ و ۱۱ می‌باشند.

$$11 \times 11 = 121$$

$$11 + 11 = 22$$

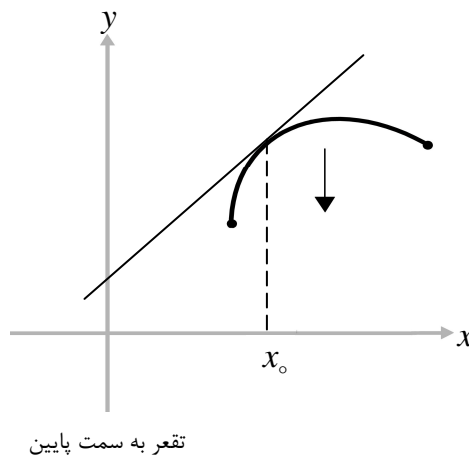
۴- نقطه عطف

تعریف. تابع $y = f(x)$ در نقطه x_0 تقعر به سمت بالا دارد، هرگاه نمودار f در اطراف نقطه x_0 بالای خط مماس باشد.



تقعر به سمت بالا

همچنین تابع f در نقطه x_0 تقعر به سمت پایین دارد، هرگاه نمودار f در اطراف نقطه x_0 زیر خط مماس باشد.



قضیه زیر ارتباط بین جهت تقعر و مشتق دوم را بیان می‌کند.

قضیه. فرض کنیم $y = f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد.

الف) اگر $f''(x_0) > 0$ ، آنگاه نمودار f در نقطه x_0 تقعر به سمت بالا دارد.

ب) اگر $f''(x_0) < 0$ ، آنگاه نمودار f در نقطه x_0 تقعر به سمت پایین دارد.

تعریف. تابع $f(x)$ در x_0 نقطه عطف دارد، هرگاه f در نقطه x_0 دارای خط مماس باشد و جهت تقعر f هنگام عبور از نقطه x_0 عوض شود.

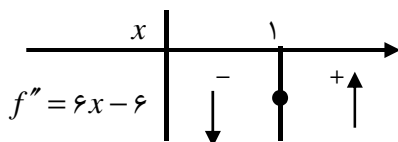
توجه. برای تعیین نقاط عطف تابع f ، باید $f''(x)$ تعیین علامت شود.

مثال. نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$ را بیابید.

حل. باید $f''(x)$ تعیین علامت شود.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$$



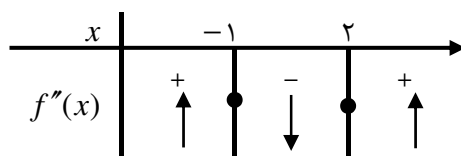
$x=1$ نقطه عطف تابع f است.

مثال. نقاط عطف تابع $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - x^2$ را بیابید.

حل.

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$$

$$f''(x) = x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$



f در $x = -1$ و $x = 2$ نقطه عطف دارد.
تذکر. توابع درجه دوم نقطه عطف ندارند.

۵- تمرین

۱- نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad h(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

۲- اکسترمم‌های نسبی توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 6x + 4$$

- ۳- اکستریم‌های نسبی تابع $f(x) = x^3 - 12x$ را بیابید.
- ۴- اکستریم‌های مطلق تابع $f(x) = x^2 + 1$ را روی فاصله $[-1, 2]$ بیابید.
- ۵- اکستریم‌های مطلق تابع $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 1$ را روی فاصله $[-1, 1]$ بیابید.
- ۶- اکستریم‌های مطلق توابع زیر را بیابید.
- $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$, $g(x) = e^x - x + 1$
- ۷- اکستریم‌های نسبی و مطلق تابع $f(x) = e^{-x^2}$ را بیابید.
- ۸- دو عدد مثبت بیابید که مجموع آنها ۲۹ و حاصلضرب آنها حداکثر باشد.
- ۹- نقاط بحرانی تابع $f(x) = |x^2 - x|$ را بیابید.
- ۱۰- نقاط عطف توابع زیر را بیابید.
- $f(x) = -3x^2 + 4x + 5$, $g(x) = -2x^3 + 4x^2 + 7x - 1$
- ۱۱- نقاط عطف تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ را بیابید.
- ۱۲- مقدار a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = ax^3 + bx^2$ در نقطه $A(1, 2)$ نقطه عطف داشته باشد.

۶- رسم نمودار توابع

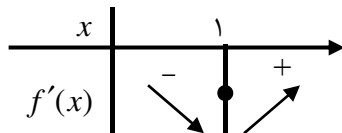
- برای رسم توابع از موارد زیر استفاده می‌کنیم.
- ۱- تعیین دامنه
 - ۲- محاسبه حد وقتی x به سمت $\pm \infty$ میل می‌کند.
 - ۳- تعیین نقاط اکستریم نسبی
 - ۴- تعیین نقاط عطف
 - ۵- تعیین زوج یا فرد بودن تابع (در صورت لزوم)
 - ۶- استفاده از نقاط کمکی (در صورت لزوم)
- مثال. نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ را رسم کنید.
- حل.

$$D_f = R$$

کاربردهای مشتق ۱۲۵

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 - 2x + 3 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$$

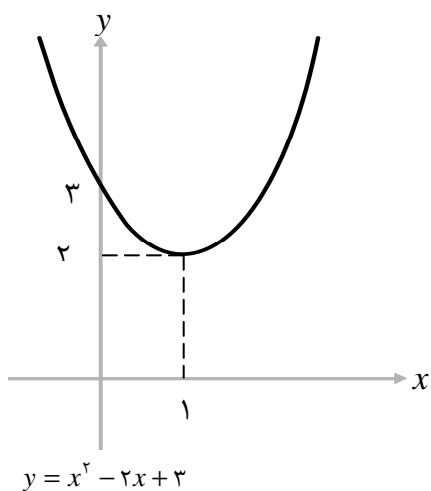
$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \quad \text{نقطه بحرانی}$$



f در $x=1$ مینیمم نسبی دارد.

$$f(1) = 2$$

از نقطه $f(0) = 3$ به عنوان نقطه کمکی استفاده می‌کنیم. (تابع نقطه عطف ندارد).

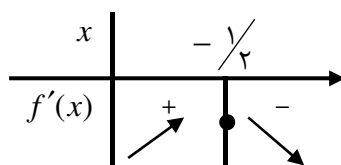


مثال. نمودار تابع $f(x) = -x^2 - x + 2$ را رسم کنید
حل.

$$D_f = R$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -x^2 = -\infty$$

$$f'(x) = -2x - 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{نقطه بحرانی}$$



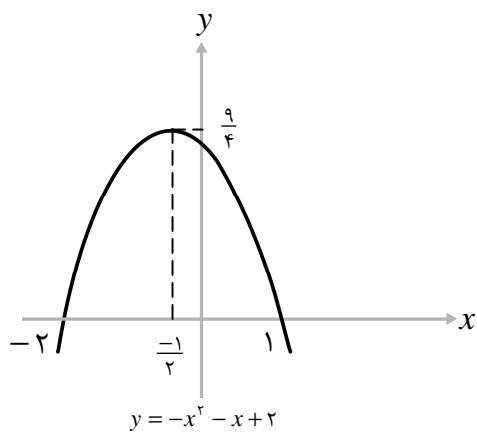
f در $x = -\frac{1}{2}$ ماکسیمم نسبی دارد.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

از ریشه‌های f به عنوان نقطه کمکی استفاده می‌کنیم.

$$f(x) = 0 \rightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$f(-2) = 0, \quad f(1) = 0$$

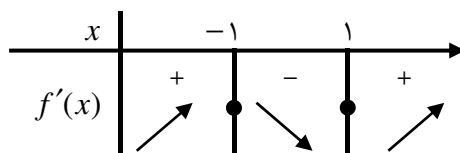


مثال. نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3x + 3$ را رسم کنید.
حل.

$$D_f = R$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty$$

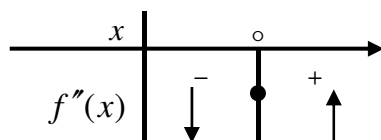
$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \quad \text{نقاط بحرانی}$$



f در $x = -1$ ماکسیمم نسبی و در $x = 1$ مینیمم نسبی دارد.

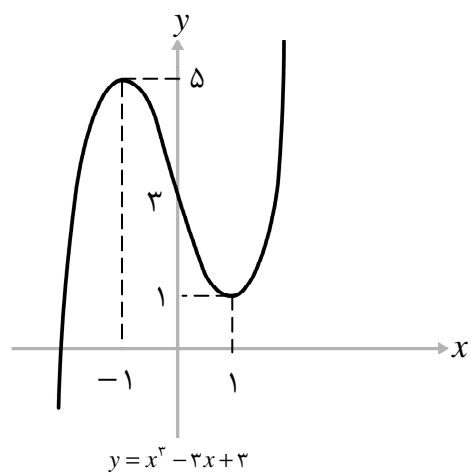
$$f(-1) = 5, \quad f(1) = 1$$

$$f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$$



f در $x = 0$ نقطه عطف دارد.

$$f(0) = 3$$



مثال. نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x$ را رسم کنید.

حل.

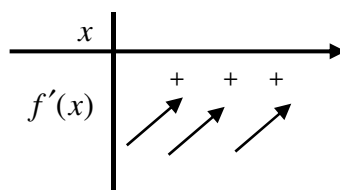
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4 = 0$$

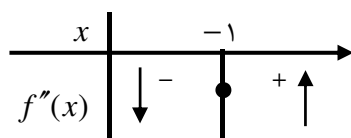
$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 48 = -12 < 0$$

$f'(x)$ ریشه ندارد.



تابع f همواره صعودی است و نقطه اکسترمم نسبی ندارد.

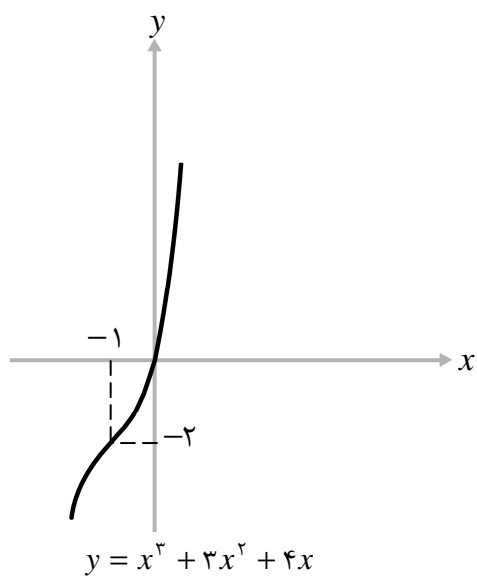
$$f''(x) = 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$$



f در $x = -1$ نقطه عطف دارد.

$$f(-1) = -2$$

از $f(0) = 0$ به عنوان نقطه کمکی استفاده می‌کنیم.



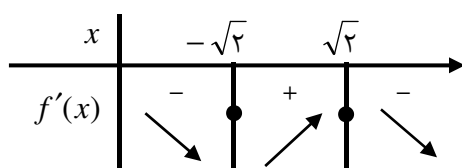
مثال. نمودار تابع $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ را رسم کنید.

حل.

$$D_f = [-2, 2]$$

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0$$

$$4-2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad \text{نقاط بحرانی}$$



f در $x = -\sqrt{2}$ مینیمم نسبی و در $x = \sqrt{2}$ ماکسیمم نسبی دارد.

$$f(-\sqrt{2}) = -2, \quad f(\sqrt{2}) = 2$$

با محاسبه معلوم می‌شود $x = 0$ نقطه عطف تابع است.

$$f(0) = 0$$

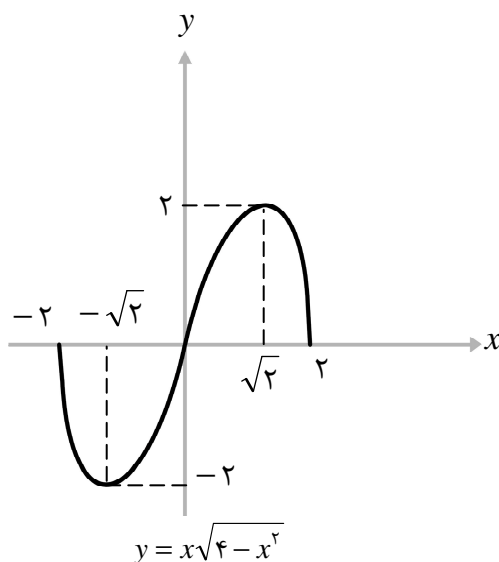
f تابعی فرد است، زیرا

$$f(-x) = -f(x)$$

از ریشه‌های تابع به عنوان نقطه کمکی استفاده می‌کنیم.

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f(0) = 0, \quad f(-2) = 0, \quad f(2) = 0$$



۷- قاعده هوییتال

در محاسبه حد، هرگاه یکی از صورت‌های مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{0}{0}$ ظاهر شوند، تحت شرایط مناسب می‌توان از قاعده هوییتال استفاده کرد.

قاعده هوییتال. فرض کنیم در اطراف نقطه x_0 توابع f و g مشتق پذیر و $g'(x) \neq 0$ باشد.

الف) اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(در صورت وجود حد سمت راست)

ب) اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(در صورت وجود حد سمت راست)

مثال. حد تابع $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^5 - 1}$ را در نقطه $x = 1$ بیابید.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^5 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3}{5x^4} = \frac{4}{5}$$

مثال. حد تابع $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x - 8}$ را در نقطه $x = 2$ بیابید.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{2x + 2} = \frac{12}{6} = 2$$

مثال. حد تابع $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$ را در نقطه $x = 0$ بیابید.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

مثال. حد تابع $f(x) = \frac{x}{e^x}$ را در $x \rightarrow +\infty$ بیابید.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

مثال. حد تابع $f(x) = \frac{x^2 - 7}{3x^2 + 2}$ را در $x \rightarrow -\infty$ بیابید.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 7}{3x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{6x} = \frac{1}{3}$$

مثال. حد تابع $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ را در نقطه $x = 0$ بیابید.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

(از قاعده هوییتال دو بار استفاده شده است.)

نکته. چنانچه با صورت‌های مبهم دیگر مانند

$$0 \times \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$$

مواجه شدیم باید آنها را به صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کرده و بعد از قاعده هوییتال استفاده

نماییم.

مثال. حد تابع $f(x) = x \cot x$ را در نقطه $x = 0$ بیابید.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = 0 \times \infty \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1} = 1$$

مثال. حد تابع $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ را در $x = 0$ بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \infty - \infty \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

(از قاعده هوییتال دو بار استفاده شده است.)

مثال. حد تابع $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ را در $x \rightarrow +\infty$ بیابید.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1^{+\infty} \quad \text{مبهم}$$

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{قرار می‌دهیم}$$

از طرفین $\ln$ می‌گیریم.

$$\ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

از طرفین حد می‌گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(y) = 1 \rightarrow \ln(\lim_{x \rightarrow +\infty} y) = 1$$

از اینکه $\ln(e) = 1$ نتیجه می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = e$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

تذکر. از این حد برای محاسبه بعضی از حدود استفاده می‌شود. (مراجعه شود به فصل سوم)
 مثال. حد تابع $f(x) = x^x$ را در $x = 0$ از سمت راست بیابید.
 حل.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 0^0 \quad \text{مبهم}$$

قرار می‌دهیم $y = x^x$
 از طرفین $\ln$ می‌گیریم.

$$\ln y = x \ln x$$

از طرفین حد می‌گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

پس

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln y) = 0 \rightarrow \ln(\lim_{x \rightarrow 0^+} y) = 0$$

از اینکه $\ln(1) = 0$ نتیجه می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 1$$

بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$

۸- تمرین

۱- نمودار توابع درجه دوم زیر را رسم کنید.

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 5, \quad g(x) = -2x^2 + 2x + 4$$

۲- نمودار تابع $f(x) = (x-2)(x+2)$ را رسم کنید.

۳- نمودار توابع درجه سوم زیر را رسم کنید.

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 1, \quad g(x) = -x^3 + 1$$

۴- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ را رسم کنید.

۵- نمودار تابع $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ را رسم کنید.

۶- نمودار رابطه $(y - x + 1)(y - x - 1) = 0$ را رسم کنید.

۷- حد بگیرید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{5x}$$

۸- حد بگیرید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{\tan(2x)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{x + 4\sqrt{x}}$$

۹- حد تابع $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$ را در $x \rightarrow +\infty$ بیابید.

۱۰- حد تابع $f(x) = \frac{\tan^{-1} x}{\sin^{-1} x}$ را در $x = 0$ بیابید.

۱۱- حد تابع $f(x) = x^{\sin x}$ را در $x = 0$ از سمت راست بیابید.

۱۲- حد تابع $f(x) = \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{6x}$ را در $x \rightarrow +\infty$ بیابید.

۱۳- حد تابع $f(x) = \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1}\right)^x$ را در $x \rightarrow +\infty$ بیابید.

۹- چند مثال کاربردی

تابع هزینه

فرض کنیم هزینه کل تولید x واحد از یک کالا، برابر با $f(x)$ واحد پول باشد، تابع $TC = f(x)$ را تابع هزینه کل می‌نامیم.

به عنوان مثال اگر $TC = f(x) = x^2 + 2x + 8$ تابع هزینه کل باشد، هزینه تولید ۱۰ واحد کالا برابر با $f(10) = 128$ واحد پول می‌باشد.

خواص تابع هزینه

$$f(0) \geq 0 \quad ۱-$$

$$f'(x) > 0 \quad ۲-$$

$$f''(x) > 0 \quad ۳- \text{ به ازای } x \text{ های بزرگ}$$

اگر $TC = f(x)$ تابع هزینه کل باشد، مشتق تابع f را هزینه نهایی می‌نامیم.

$$MC = f'(x)$$

همچنین هزینه متوسط هر واحد از کالا برابر است با هزینه کل تقسیم بر کل تولید.

$$AC = \frac{TC}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

مثال. هزینه کل تولید x یخچال خانگی برحسب دلار $TC = f(x) = x^2 + x + 200$

می‌باشد، هزینه کل، هزینه متوسط و هزینه نهایی در سطح تولید سی یخچال را بیابید.

حل. به ازای $x = 30$ داریم

$$TC = f(30) = 1130$$

هزینه کل تولید 30 یخچال 1130 دلار است.

$$AC = \frac{f(x)}{x}$$

به ازای $x = 30$

$$AC = \frac{f(30)}{30} = 37/66$$

هزینه متوسط تولید یک یخچال در این سطح تولید 37/66 دلار است.

$$MC = f'(x) = 2x + 1$$

به ازای $x = 30$

$$MC = f'(30) = 61$$

هزینه نهایی میزان تغییر هزینه کل نسبت به x است. (مفهوم مشتق) لذا هزینه تولید سی و

یکمین یخچال برابر با 61 دلار است.

فرض کنیم $y = f(x)$ تابع هزینه کل و تابع هزینه متوسط دارای نقطه مینیمم

باشد، داریم

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x}$$

محاسبات بالا نشان می‌دهد، تابع هزینه نهایی با تابع هزینه متوسط در نقطه مینیمم آن برابر است، به عبارت دیگر، کالا با کمترین هزینه متوسط تولید می‌شود، هرگاه هزینه متوسط و هزینه نهایی با هم برابر باشند.

تابع تقاضا و تابع درآمد

اگر x تعداد تقاضا و P قیمت یک واحد کالا باشد، معادله تقاضا رابطه بین این دو را بیان می‌کند. فرض کنیم P برحسب x با تابع $P = f(x)$ بیان شود، در این صورت f را تابع تقاضا می‌نامیم و P بهای یک واحد کالا است وقتی که تقاضا برای x واحد از کالا باشد. مثلاً در تابع $P = f(x) = \sqrt{17-x}$ ، در سطح تقاضای ۸ واحد کالا، قیمت یک واحد آن برابر $f(8) = 3$ واحد پول است.

اگر $P = f(x)$ تابع تقاضا باشد، x و P نامنفی هستند و با افزایش قیمت، تقاضا کم و با کاهش قیمت، تقاضا افزایش می‌یابد، به عبارت دیگر $f(x)$ نزولی است. ($f'(x) < 0$)

تابع درآمد کل (دریافت کل) به صورت زیر است.

$$TR = x \times P$$

یا

$$TR = x \cdot f(x)$$

اگر TR و TC به ترتیب هزینه کل و درآمد کل باشند، از تفاضل این دو **سود کل** بدست می‌آید

$$\Pi = TR - TC$$

مثال. در شرایط انحصاری، معادله تقاضا در بنگاهی به صورت $P + 2x = 32$ می‌باشد.
(x تعداد واحد تولید و P قیمت یک واحد برحسب دلار است.) اگر هزینه کل برابر با $TC = x^2 + 2x + 8$ باشد، در چه سطحی از تولید، سود بنگاه ماکسیمم می‌شود؟

حل.

$$TR = x \times P = x(32 - 2x) = 32x - 2x^2$$

$$\Pi = TR - TC = (32x - 2x^2) - (x^2 + 2x + 8)$$

$$\Pi(x) = -3x^2 + 30x - 8$$

ماکسیمم تابع $\Pi(x)$ را می‌یابیم.

$$\Pi'(x) = -6x + 30 = 0 \rightarrow x = 5$$

بسادگی دیده می‌شود که تابع $\Pi(x)$ در $x = 5$ ماکسیمم نسبی دارد. بنابراین در سطح تولید ۵ واحد کالا، بیشترین سود عاید بنگاه می‌شود.

درآمد نهایی و سود نهایی

مشتق درآمد کل و مشتق سود کل به ترتیب درآمد نهایی و سود نهایی نامیده می‌شوند.

$$MR = (TR(x))' \quad \text{درآمد نهایی}$$

$$\Pi'(x) \quad \text{سود نهایی}$$

از رابطه $\Pi = TR - TC$ مشتق می‌گیریم.

$$\Pi'(x) = (TR - TC)' = MR - MC$$

داریم

$$\Pi'(x) = 0 \Rightarrow MR = MC$$

یعنی ماکسیمم سود، در تعداد تولیدی است که هزینه نهایی و درآمد نهایی با هم برابر باشند.
(در صورت وجود ماکسیمم)

مثال. در یک شرایط رقابت کامل، کارخانه‌ای کالای خود را به قیمت هر واحد ۷۵ دلار

می‌فروشد، اگر هزینه تولید x واحد از این کالا در روز برابر $TC = x^2 + 25x + 100$ باشد، چه تعداد کالا در روز باید تولید شود تا سود کل روزانه ماکسیمم گردد.

حل.

$$TR = xP = 75x$$

$$MR = (TR)' = (75x)' = 75$$

$$MC = (TC)' = (x^2 + 25x + 100)' = 2x + 25$$

سود ماکسیمم است هرگاه

$$MC = MR$$

$$۲x + ۲۵ = ۷۵ \rightarrow x = ۲۵$$

با تولید ۲۵ واحد کالا در روز، سود ماکسیمم می‌شود.

کشش

فرض کنیم $y = f(x)$ ، کشش نقطه‌ای y نسبت به متغیر مستقل x به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

کشش مقدار عددی است که میزان حساسیت تغییرات نسبی y را نسبت به تغییرات نسبی x را در یک نقطه اندازه گیری می‌کند.

فرض کنیم x تعداد تقاضا کالا و P قیمت یک واحد کالا باشد، اغلب از کشش برای حساسیت تقاضا در مقابل تغییرات قیمت استفاده می‌شود.

$$\frac{E_x}{E_P} = \frac{dx}{dP} \cdot \frac{P}{x}$$

تذکر. بنا به نزولی بودن تابع تقاضا، مقدار کشش منفی می‌شود.

مثال. معادله تقاضا برای کالایی به صورت $x^۲ + P^۲ = ۲۵$ است. x تعداد و P قیمت است. کشش تقاضا در قیمت $P = ۴$ چقدر است؟

حل. در معادله $x^۲ + P^۲ = ۲۵$ از $P = ۴$ بدست می‌آید $x = ۳$

قرار می‌دهیم $f = x^۲ + P^۲ - ۲۵ = ۰$

با استفاده از مشتق ضمنی داریم

$$\frac{dx}{dP} = -\frac{f_P}{f_x} = -\frac{۲P}{۲x} = -\frac{P}{x}$$

بنا به فرمول

$$\frac{E_x}{E_P} = \frac{dx}{dP} \cdot \frac{P}{x} = -\frac{P^۲}{x^۲}$$

کاربردهای مشتق ۱۴۱

در نقطه $P = ۴$ و $x = ۳$ بدست می‌آید.

$$\frac{E_x}{E_P} = -\frac{۴^۲}{۳^۲} = -۱/۷۷$$

بنابراین کشش تقاضا در قیمت $P = ۴$ برابر با $-۱/۷۷$ می‌باشد.

یادداشت

منابع

پورکاظمی، محمد حسین، ریاضیات برای اقتصاد و مدیریت
توماس، آر.ال، کاربرد ریاضیات در اقتصاد، ترجمه محمد نقیبی و رحیم صانعی فرد
سیلورمن، ریچاردا، حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ترجمه علی اکبر عالم زاده
کرایه چیان، محمد علی، ریاضیات مقدماتی
لیتهلد، لوئیس، حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ترجمه مهدی بهزاد
نیکوکار، مسعود، ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)