

به نام خدا

ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۲)

مؤلف:

محمد هاشم اعتمادزاده

عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد سبزوار

سرشناسه: اعتمادزاده، محمدهاشم، ۱۳۴۶-
عنوان و نام پدیدآور: ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۲) / مؤلف: محمدهاشم اعتمادزاده.
مشخصات نشر: مشهد: سخن گستر، ۱۳۹۳.
مشخصات ظاهری: ۱۶۰ ص.: نمودار.
شابک: 978-964-10-2924-3
وضعیت فهرست‌نویسی: فیا
یادداشت: کتابنامه: ص. ۱۵۱.
موضوع: مدیریت -- ریاضیات -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع: مدیریت -- ریاضیات -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
موضوع: ریاضیات -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع: ریاضیات -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
رده بندی کنگره: ۱۳۹۳ ر ۸۶ الف ۶۴ / ۲ / ۳۷ QA
رده بندی دیویی: ۵۱۰/۷۶
شماره کتابشناسی ملی: ۳۶۹۲۹۲۶



انتشارات سخن گستر

مشهد - خیابان ابن‌سینا - مقابل ابن سینا ۱۲ - شماره ۱۹۱

تلفن: ۳۸۴۳۹۹۵۵

www.Sokhangostar.com

نام کتاب: ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۲)

مؤلف: محمدهاشم اعتمادزاده

شمارگان: ۱۰۰۰ جلد

نوبت چاپ: اول / ۱۳۹۳

چاپ: میثاق

قیمت: ۸۰۰۰ تومان

شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۱۰-۲۹۲۴-۳

ای همه هستی ز تو پیدا شده
آنچه تغیر نپذیرد تویی
ما همه فانی و بقا بس تو را
هر که نه گویا به تو خاموش به

خاک ضعیف از تو توانا شده
و آن که نمرده ست و نمیرد تویی
ملک تعالی و تقدس تو را
هر چه نه یاد تو فراموش به

مقدمه

هنگامی که ما از سیر منطقی فرآیند مطالب ریاضی آگاه و یا آن را کشف می‌کنیم و یا با محاسبات ریاضی به واقعیتی از جهان پی می‌بریم (فقط با محاسبات ریاضی و دو قانون فیزیک می‌توان ثابت کرد مسیر حرکت زمین به دور خورشید بیضی است)، کم و بیش متوجه می‌شویم ریاضیات زیباست، و خداوند متعال در فطرت انسان‌ها میل به زیبایی را قرار داده است. از طرفی ریاضی ابزاری قوی و دقیق در تبیین و تحلیل علوم مختلف (حتی علوم انسانی) است به‌طوری که هرگاه بخواهند مطلبی را علمی و منطقی نشان دهند از روابط و مفاهیم ریاضی استفاده می‌کنند. لذا زیبایی ذاتی ریاضی و کاربردی بودن آن موجب شده است تا در بسیاری از رشته‌های تحصیلی دروس ریاضی گنجانده شوند.

این کتاب در شش فصل و یک پیوست، مطابق با سر فصل وزارت علوم برای دانشجویان رشته‌ی حسابداری و مدیریت می‌باشد.

از آقای دکتر روزبهانی ویراستار ادبی کتاب و تمام عزیزانی که در تهیه کتاب نقشی داشته‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم و امیدوارم این تلاش مقبول حضرت حق قرار گیرد.

محمد هاشم اعتمادزاده

تابستان ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فصل اول. انتگرال گیری

۱	۱- انتگرال نامعین
۳	۲- فرمول های انتگرال گیری
۷	۳- چند مثال کاربردی
۱۰	۴- انتگرال معین
۱۴	۵- تمرین
۱۷	۶- انتگرال گیری به روش جانشینی (تغییر متغیر)
۲۲	۷- انتگرال گیری به روش جزء به جزء
۲۴	۸- انتگرال گیری به روش کسرهای جزئی
۲۸	۹- تقریب انتگرال معین
۳۱	۱۰- تمرین

فصل دوم. کاربردهای انتگرال

۳۵	۱- تعیین مساحت بین دو منحنی
۴۱	۲- حجم اجسام دوار
۴۴	۳- معادلات دیفرانسیل با متغیرهای جدایی پذیر
۴۷	۴- رشد نمایی
۴۹	۵- چند مثال کاربردی
۵۱	۶- تمرین

فصل سوم. توابع چند متغیره

۵۵	۱- توابع چند متغیره
۵۹	۲- حد و پیوستگی
۶۲	۳- مشتقات جزئی
۶۷	۴- دیفرانسیل کل
۶۸	۵- قاعده زنجیری

۷۱	۶- چند مثال کاربردی.....
۷۴	۷- تمرین.....

فصل چهارم . اکسترم‌های توابع دو متغیره

۷۹	۱- تعریف اکسترم‌ها.....
۸۲	۲- تعیین اکسترم‌های نسبی.....
۸۵	۳- چند مثال کاربردی.....
۸۷	۴- اکسترم‌های مقید.....
۹۱	۵- تمرین.....

فصل پنجم . ماتریس و دترمینان

۹۳	۱- تعریف ماتریس و انواع آن.....
۹۶	۲- اعمال جبری ماتریس‌ها.....
۱۰۲	۳- دترمینان یک ماتریس مربع.....
۱۰۵	۴- خواص دترمینان.....
۱۰۹	۵- معکوس یک ماتریس مربع.....
۱۱۴	۶- تمرین.....

فصل ششم. دستگاه معادلات خطی و بردارهای ویژه

۱۲۱	۱- دستگاه معادلات خطی.....
۱۲۲	۲- حل دستگاه به روش ماتریسی و کرامر.....
۱۲۷	۳- حل دستگاه به روش حذفی گاوس.....
۱۳۱	۴- بردارها و رتبه یک ماتریس.....
۱۳۴	۵- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه.....
۱۳۷	۶- تمرین.....
۱۴۱	پیوست. یادآوری مشتق.....
۱۵۱	منابع.....

فصل اول

انتگرال گیری

هرگاه مشتق تابعی در دست باشد، با انتگرال گیری تابع اولیه به دست می آید، بدین جهت می توان گفت، انتگرال گیری عکس عمل مشتق گیری است. از طرفی، انتگرال معین به معنای حد یک مجموع است و با استفاده از یک قضیه ی مهم، بین انتگرال معین و انتگرال نامعین ارتباط برقرار می گردد.

انتگرال گیری به سادگی مشتق گیری نیست، لذا برای محاسبه انتگرال توابع از چند روش استفاده می شود.

۱- انتگرال نامعین

اگر $F'(x) = x^2$ می توان حدس زد، تابع اولیه برابر است با $F(x) = \frac{x^3}{3}$

اگر $F'(x) = \sin x$ می توان حدس زد ، تابع اولیه برابر است با $F(x) = -\cos x$

ولی اگر $F'(x) = \frac{x^3}{e^x}$ ، تابع $F(x)$ را نمی توان بسادگی حدس زد . در مثال های بالا $F'(x)$ داده شده و تابع اولیه یعنی $F(x)$ خواسته شده است.

تعریف. هرگاه $F'(x) = f(x)$ ، $F(x)$ را تابع اولیه $f(x)$ روی فاصله I می نامند.

مثال. اگر F تابع اولیه f باشد، داریم:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x$$

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow F(x) = ? \quad (\text{هنوز نمی دانیم})$$

اگر $F(x)$ یک تابع اولیه f روی فاصله I باشد، آنگاه هر تابع اولیه f به صورت $F(x) + c$ است. (c عدد ثابت است).

تعریف. هر گاه $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ باشد، عبارت $F(x) + c$ را انتگرال نامعین $f(x)$ نامیده و آن را با علامت ذیل نشان می دهند.

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

در این رابطه، c ثابت انتگرال و dx تأکید بر این دارد که انتگرال گیری بر حسب متغیر x است. به عبارت دیگر، انتگرال گیری عکس عمل مشتق گیری است.

$$\int f(x) dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

مثال. با توجه به تعریف انتگرال داریم:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{x^2}{e^x} dx \quad (\text{هنوز نمی دانیم})$$

چند خاصیت انتگرال

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad -1$$

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \text{ ثابت است}) \quad -2$$

$$\int a dx = ax + c \quad (a \text{ ثابت است}) \quad -3$$

مثال.

$$\int (\sin x + x^3) dx = \int \sin x dx + \int x^3 dx = -\cos x + \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int -4x^3 dx = -4 \int x^3 dx = -4 \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int 5 dx = 5x + c$$

از این که انتگرال و مشتق، عکس یکدیگرند، می توان نتیجه گرفت:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + c$$

به زبان دیفرانسیل ها:

$$\int df(x) = f(x) + c$$

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$$

(دو نماد $\int$ و d یکدیگر را خنثی می کنند.)

مثال.

$$\int (\sqrt[3]{x^3 - 1})' dx = \sqrt[3]{x^3 - 1} + c$$

$$\left(\int \sin^4 x dx \right)' = \sin^4 x$$

۲- فرمول های انتگرال گیری

دو فرمول مهم انتگرال گیری

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \in R, n \neq -1 \quad -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad -2$$

مثال.

$$\begin{aligned}\int x^r dx &= \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \\ \int (x^\delta - 2x^r + 4) dx &= \frac{x^{\delta+1}}{\delta+1} - \frac{2x^{r+1}}{r+1} + 4x + c \\ \int \sqrt{x} dx &= \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c \\ \int \frac{x+4}{x^\delta} dx &= \int \frac{x}{x^\delta} dx + \int \frac{4}{x^\delta} dx \\ &= \int x^{-\delta} dx + \int 4x^{-\delta} dx = \frac{x^{-\delta+1}}{-\delta+1} + \frac{4x^{-\delta+1}}{-\delta+1} + c \\ \int \frac{1}{\sqrt[r]{x^4}} dx &= \int x^{\frac{-4}{r}} dx = \frac{x^{\frac{-4}{r}+1}}{\frac{-4}{r}+1} + c \\ \int \frac{\delta x}{x^r} dx &= \delta \int \frac{1}{x^r} dx = \delta \ln|x| + c \\ \int \frac{1}{\gamma x} dx &= \frac{1}{\gamma} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{\gamma} \ln|x| + c\end{aligned}$$

انتگرال توابع نمایی:

$$\begin{aligned}\int e^x dx &= e^x + c \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c\end{aligned}$$

مثال.

$$\int (4e^x - 2) dx = \int 4e^x dx - \int 2 dx = 4e^x - 2x + c$$

۵ انتگرال گیری

$$\int r^x dx = \frac{r^x}{\ln r} + c$$

$$\int \frac{r^x}{r^x} dx = \int \left(\frac{r}{r}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{r}{r}\right)^x}{\ln\left(\frac{r}{r}\right)} + c$$

چند فرمول مثلثاتی:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

مثال.

$$\int (\Delta \sin x - \epsilon \cos x) dx = -\Delta \cos x - \epsilon \sin x + c$$

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx = \tan x - x + c$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x} dx = \int \cos x dx = \sin x + c$$

دو فرمول دیگر انتگرال گیری:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad a > 0$$

مثال.

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c \quad (a=1)$$

$$\int \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad (a > 0)$$

خلاصه‌ی فرمول های انتگرال گیری:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \in \mathbb{R}, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$\int \sin u du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u du = \sin u + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \int \sec^2 u du = \tan u + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = \int \csc^2 u du = -\cot u + c$$

$$\int e^u du = e^u + c$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

۳- چند مثال کاربردی

هرگاه مشتق تابعی را داشته باشیم، با انتگرال گیری می توان تابع اولیه را بدست آورد.

مثال. اگر $y' = x^2 - 1$ ، تابع y را بیابید.

$$y = \int y' dx = \int (x^2 - 1) dx = \frac{x^3}{3} - x + c$$

مثال. اگر $y' = x^4 + x$ ، تابع y را طوری بیابید که از نقطه $(0, 1)$ عبور کند.

حل.

$$y' = x^4 + x$$

$$y = \int (x^4 + x) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} + c, \quad y(0) = 1$$

$$1 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 1$$

بنابراین:

$$y = \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} + 1$$

تابع هزینه کل

یک تولید کننده، کالای α را به مقدار x تولید می کند و تابع هزینه کل آن برابر است با:

$$y = TC = f(x)$$

هزینه کل یک واحد از کالا، هزینه متوسط می باشد و برابر است با:

$$\bar{y} = \frac{TC}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

اگر از هزینه کل مشتق بگیریم، هزینه نهایی بدست می آید:

$$y' = MC = f'(x)$$

مثال. فرض کنیم هزینه نهایی یک کالا $MC = 4x + 4$ و به ازای $x = 0$ هزینه

ثابت برابر با $y = 15$ باشد، هزینه کل و هزینه متوسط را تعیین کنید.

حل.

$$y' = MC = 4x + 4$$

$$y = \int (4x + 4) dx = \frac{4x^2}{2} + 4x + c$$

$$y = \frac{4x^2}{2} + 4x + c, \quad y(0) = 15$$

$$15 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 15$$

هزینه‌ی کل برابر است با :

$$y = 2x^2 + 4x + 15$$

و هزینه‌ی متوسط برابر است با:

$$\bar{y} = \frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2 + 4x + 15}{x} = 2x + 4 + \frac{15}{x}$$

تابع درآمد کل

اگر تولید کننده‌ای کالای α را به مقدار x تولید و تابع تقاضا برای این تولید کننده $y = h(x)$ باشد، (y قیمت است) درآمد کل به صورت ذیل است.

$$TR = xh(x)$$

درآمد نهایی از مشتق درآمد کل به دست می‌آید:

$$y' = MR = (xh(x))'$$

مثال. اگر درآمد نهایی $MR = 20 - x + x^2$ باشد، درآمد کل و تابع تقاضا را به دست آورید.

حل.

$$y' = MR = 20 - x + x^2$$

$$y = \int (20 - x + x^2) dx = 20x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c$$

اگر مقدار فروش صفر باشد، درآمد کل نیز صفر است. لذا $y(0) = 0$ ، تابع درآمد کل برابر

$$y = TR = 20x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \text{است با :}$$

تابع تقاضا برابر با درآمد متوسط است:

$$\frac{TR}{x} = \frac{20x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}{x} = 20 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}$$

مثال. تولید کننده‌ای متوجه می‌شود که اگر در هر هفته، x واحد از کالای α را تولید کند هزینه نهایی آن $MC = \frac{x}{2} - 10$ به دست می‌آید. اگر بهای فروش هر واحد کالا ۲۰۰ تومان ثبت شود و هزینه ثابت در هر هفته ۵۰۰ تومان باشد، ماکسیمم سود هفتگی چقدر است؟
حل.

$$y' = MC = \frac{x}{2} - 10$$

$$y = \int \left(\frac{x}{2} - 10 \right) dx = \frac{x^2}{4} - 10x + c$$

$$y = \frac{x^2}{4} - 10x + 500, \quad y(0) = 500$$

$$y = TC = \frac{x^2}{4} - 10x + 500 \quad \text{تابع هزینه کل برابر است با:}$$

چون بهای هر واحد کالا ۲۰۰ تومان است و در هفته x واحد کالا فروخته می‌شود درآمد کل برابر است با:

$$TR(x) = 200x$$

درآمد نهایی برابر است با:

$$MR = (200x)' = 200$$

هرگاه درآمد نهایی و هزینه نهایی برابر باشند، سود ماکسیمم خواهد شد.

$$200 = \frac{x}{2} - 10 \Rightarrow x = 420$$

سود کل برابر است با:

$$P(x) = TR - TC = 200x - \left(\frac{x^2}{4} - 10x + 500 \right)$$

$$P(420) = 43600$$

به ازای تولید ۴۲۰ واحد کالا، ماکسیمم سود در هر هفته برابر با ۴۳۶۰۰ تومان است.

۴- انتگرال معین

فرض کنیم $y = f(x)$ و $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ یک فراز فاصله $[a, b]$ و $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ و $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$ ماکسیمم این زیر بازها و

یک نقطه‌ی دلخواه این زیر بازها باشد، عبارت $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ را

مجموع ریمان می‌نامند، با حدگیری از مجموع ریمانی به دست می‌آید:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

این حد در بسیاری از مفاهیم ظاهر می‌شود، (مانند مساحت، طول قوس، مازاد مصرف کننده و ...) اگر این حد وجود داشته باشد آن را انتگرال معین (ریمان) تابع f از a تا b می‌نامند و به صورت ذیل نشان می‌دهند.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(c_i) \Delta x_i)$$

تعریف. تابع f را روی $[a, b]$ انتگرال پذیر گویند، هرگاه حد فوق وجود داشته باشد. **توجه.** اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، می‌توان ثابت کرد f روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است.

$$(\text{پیوستگی} \Leftarrow \text{انتگرال پذیری})$$

خواص انتگرال معین

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad ۱-$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ عدد ثابت است}) \quad ۲-$$

۳- اگر f روی فاصله $[a, b]$ انتگرال پذیر و مثبت باشد، داریم:

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad \text{۴- (تعریف)}$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{۵- (تعریف)}$$

خاصیت ۶ به ازای هر ترتیب از a و b و c برقرار است.
چند مثال:

$$\int_0^{\pi} \sin^r x dx = \int_0^{\pi} \sin^r x dx$$

$$\int_0^1 (xe^x + \ln(x^r + 1)) dx = \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 \ln(x^r + 1) dx$$

$$e^{-x^r} \geq 0 \Rightarrow \int_0^r e^{-x^r} dx \geq 0$$

$$\int_0^r \frac{x+1}{x^r+1} dx = - \int_0^r \frac{x+1}{x^r+1} dx$$

$$\int_{-1}^r \sqrt{x^r+1} dx = \int_{-1}^r \sqrt{x^r+1} dx + \int_r^x \sqrt{x^r+1} dx$$

قضیه. هرگاه $f(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته و x عددی دلخواه در فاصله $[a, b]$ و

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ باشد، آنگاه: } G'(x) = f(x). \text{ بنا به این قضیه:}$$

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

مثال. اگر $G(x) = \int_0^x \sin^r(t) dt$ ، مشتق تابع $G(x)$ را بیاید.

حل.

$$G'(x) = \sin^r x$$

مثال. اگر $F(x) = \int_x^r \sqrt{1+t^r} dt$ ، مشتق تابع $F(x)$ را بیاید.

حل.

$$F(x) = - \int_x^r \sqrt{1+t^r} dt \Rightarrow F'(x) = -\sqrt{1+x^r}$$

اگر u و v توابعی مشتق پذیر از x باشند، قضیه‌ی قبل را می‌توان تعمیم داد.

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right)' = f(v) \cdot v'(x) - f(u) \cdot u'(x)$$

مثال. از توابع زیر مشتق بگیرید

$$G(x) = \int_{\sin x}^x \sqrt{4+t^2} dt \quad \text{ب} \quad F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos(\sqrt{t}) dt \quad \text{الف}$$

حل الف)

$$F'(x) = \cos(\sqrt{x^3}) \cdot (3x^2) - \cos(\sqrt{x^2}) \cdot (2x)$$

حل ب)

$$G'(x) = \sqrt{4+(x)^2} \cdot (1) - \sqrt{4+(\sin x)^2} \cdot (\cos x) = -\sqrt{4+\sin^2 x} \cdot \cos x$$

یک روش محاسبه‌ی انتگرال معین، استفاده از مجموع ریمانی آن است. (تعریف انتگرال معین) اما روش ساده‌تر و کارآمدتر استفاده از انتگرال نامعین می‌باشد. در قضیه بعد ارتباط بین انتگرال معین و انتگرال نامعین آمده است.

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنیم f روی $[a, b]$ پیوسته و $F(x)$ تابع اولیه f باشد، در این صورت:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

اثبات. قرار می‌دهیم $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ بنا به قضیه قبل، $G'(x) = f(x)$ ، اما

$$F(x) = G(x) + c \quad \text{لذا} \quad F'(x) = f(x) \quad \text{یعنی} \quad f \text{ است، یعنی}$$

$$G(b) = \int_a^b f(t) dt \quad \text{و} \quad G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$$

پس:

$$F(a) = G(a) + c = 0 + c \Rightarrow c = F(a)$$

از طرفی:

$$F(b) = G(b) + c = \int_a^b f(t) dt + F(a)$$

و از اینجا بدست می‌آید:

انتگرال گیری ۱۳

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

با تبدیل t به x حکم قضیه ثابت می شود:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

چند نکته.

۱- بنا به قضیه اساسی، برای محاسبه انتگرال معین، ابتدا انتگرال نامعین را بدست می آوریم و بعد کرانهای انتگرال را جایگذاری می کنیم.

۲- برای محاسبه انتگرال معین، نماد ذیل متداول است:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

۳- از آنجا که انتگرال معین همواره عدد می شود، عبارت های زیر مساوی هستند.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

مثال. انتگرال بگیرید.

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$\int_1^2 (x^2 + 4x + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + x \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3} + 8 + 2 \right) - \left(\frac{1}{3} + 2 + 1 \right) = \frac{28}{3}$$

$$\int_{-1}^2 -t^3 dt = \frac{-t^4}{4} \Big|_{-1}^2 = \left(\frac{-16}{4} \right) - \left(\frac{-1}{4} \right) = -\frac{15}{4}$$

$$\int_1^2 \frac{-1}{x} dx = -\ln(x) \Big|_1^2 = -(\ln 2 - \ln 1) = -\ln 2$$

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$$

توجه. برای محاسبه ی $\int_a^b |f(x)| dx$ ، باید تابع $f(x)$ تعیین علامت شود.

مثال. انتگرال $\int_0^3 |x-1| dx$ را حساب کنید.

حل. تابع داخل قدر مطلق را تعیین علامت می کنیم:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

x	۱
$x-1$	- +

بنا به خاصیت ۶ انتگرال:

$$\begin{aligned} \int_0^3 |x-1| dx &= \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^3 |x-1| dx \\ \int_0^3 |x-1| dx &= \int_0^1 -(x-1) dx + \int_1^3 (x-1) dx \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^3 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

۵- تمرین

۱- با استفاده از مشتق گیری، ثابت کنید تساوی های ذیل درست هستند.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{x^2+1} + c \quad (\text{الف})$$

$$\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + c \quad (\text{ب})$$

انتگرال توابع زیر را بیابید.

$$\int (3x + 7) dx \quad -2$$

$$\int (x^3 - 5x^2 + 8) dx \quad -3$$

$$\int \frac{x^6 - 4x + 1}{x^4} dx \quad -4$$

$$\int \frac{x^3 - 4x}{x^3} dx \quad -5$$

$$\int (x - 4)(2x + 1) dx \quad -6$$

$$\int (3x - 4)^2 dx \quad -7$$

$$\int (\Delta \sin x - 2e^x) dx \quad -8$$

$$\int (3 \cos x - \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta}{x}) dx \quad -9$$

$$\int \frac{\cos^2 t}{\cos^3 t} dt \quad -10$$

$$\int \frac{\cos^3 t + 1}{\cos^3 t} dt \quad -11$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4} \quad -12$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\Delta - x^2}} \quad -13$$

۱۴- اگر $\frac{dy}{dx} = x^3 - 1$ ، تابع y را طوری بیابید که از نقطه‌ی $(1, 4)$ عبور کند.

۱۵- شیب خط مماس بر یک منحنی در نقطه‌ی دلخواه (x, y) برابر با $2x - 3$ است. معادله‌ی این منحنی را طوری بیابید که از نقطه‌ی $(3, 2)$ عبور کند.

۱۶- اگر $y'' = 6x$ ، تابع y را طوری بیابید که در نقطه‌ی $(1, 2)$ می‌نیمم داشته باشد.

۱۶ فصل اول

- ۱۷- هزینه‌ی نهایی تولید x متر پارچه x^2 $6x^4 + 0.0001x + 3 - 0.01x$ می‌باشد، اگر میزان تولید از ۲۰۰۰ متر به ۴۰۰۰ متر افزایش یابد، افزایش هزینه را پیدا کنید.
- ۱۸- مشتق توابع زیر را بیابید.

$$F(x) = \int_1^x \ln(t) dt \quad \text{الف}$$

$$F(x) = \int_x^{x^4} \sqrt{1+t^3} dt \quad \text{ب}$$

$$F(x) = \int_{-x}^{x^3} \frac{1}{t^4 + 1} dt \quad \text{ج}$$

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x e^{-t^3} dt \quad \text{د}$$

انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\int_0^1 (x^3 - 2x) dx \quad -19$$

$$\int_0^1 (2e^x - 3) dx \quad -20$$

$$\int_1^2 (-t^2 + 1) dt \quad -21$$

$$\int_1^2 \frac{s^4 + 1}{s^2} ds \quad -22$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x) dx \quad -23$$

$$\int_1^{e^4} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx \quad -24$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad -25$$

$$\int_1^4 |2x - 4| dx \quad -26$$

$$\int_{-1}^2 x - 2|x| dx \quad -27$$

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx \quad -28$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad -29$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad -30$$

۶- انتگرال گیری به روش جانشینی (تغییر متغیر)

در روش جانشینی با یک تغییر متغیر مناسب، انتگرال را به یک انتگرال متعارف (انتگرالی که فرمول دارد) تبدیل می‌کنیم. قبل از انتگرال گیری به این روش، دیفرانسیل تابع f را یادآوری می‌کنیم.

اگر $u = f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، دیفرانسیل تابع f برابر است با :

$$du = f'(x)dx$$

$$u = x^4 \Rightarrow du = 4x^3 dx$$

$$u = 5x - 8 \Rightarrow du = 5dx$$

$$u = x^3 - 4x^2 + 2 \Rightarrow du = (3x^2 - 8x)dx$$

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

مثال. $\int (7x+1)^4 dx$ را حساب کنید.

حل. متغیر جدید را انتخاب می‌کنیم:

$$u = 7x+1$$

دیفرانسیل u را به دست می‌آوریم:

$$du = 7dx \Rightarrow dx = \frac{du}{7}$$

$$\int (7x+1)^4 dx = \int u^4 \frac{du}{7} = \frac{1}{7} \int u^4 du = \frac{1}{7} \frac{u^5}{5} + c$$

که با جای گذاری u بر حسب x به دست می‌آید:

$$\int (7x+1)^4 dx = \frac{(7x+1)^5}{35} + c$$

مثال. انتگرال $\int \sqrt{x^2+1} \, x dx$ را حساب کنید.

$$\begin{cases} u = x^2 + 1 \\ du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2} \end{cases} \quad \text{حل.}$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \, x dx = \int \sqrt{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

توجه. u را باید طوری انتخاب کنیم که تا حد امکان u' داخل انتگرال باشد.

مثال. $\int \frac{1}{3x-4} dx$ را حساب کنید.

حل.

$$\begin{cases} u = 3x - 4 \\ du = 3 dx \Rightarrow \frac{du}{3} = dx \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{3x-4} = \int \frac{\frac{du}{3}}{u} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{3} \ln|3x-4| + c$$

با روشی مشابه می‌توان دید:

$$\int \frac{1}{-5x+2} dx = \frac{-1}{5} \ln|-5x+2| + c$$

$$\int \sin(7x+4) dx = \frac{-1}{7} \cos(7x+4) + c$$

$$\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \sin(3x) + c$$

مثال. $\int \tan x \cdot \sec^2 x \, dx$ را حساب کنید.

حل.

$$\begin{cases} u = \tan x \\ du = \sec^2 x \, dx \end{cases}$$

$$\int \tan x \cdot \sec^2 x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\tan^2 x}{2} + c$$

مثال. $\int \tan x \, dx$ را حساب کنید.

حل.

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$\begin{cases} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \\ -du = \sin x \, dx \end{cases}$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \frac{1}{u} (-du) = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c$$

مثال. انتگرال $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$ را حساب کنید.

حل.

$$\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx \\ 2du = \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \end{cases}$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = 2 \int e^u \, du = 2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

مثال. انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$ را به دو روش بیابید.

حل.

روش اول: ابتدا، انتگرال نامعین را به دست می آوریم و بعد انتگرال معین را حساب می کنیم:

$$\begin{cases} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{cases}$$

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} = \frac{\sin^4 x}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^4(\frac{\pi}{2})}{4} - \frac{\sin^4(0)}{4} = \frac{1}{4} - \frac{0}{4} = \frac{1}{4}$$

روش دوم: در این روش به جای تبدیل u به x ، کران های انتگرال را عوض می کنیم:

$$\begin{cases} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ x = 0 \rightarrow u = \sin(0) = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx = \int_0^1 u^3 du = \frac{u^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{0}{4} = \frac{1}{4}$$

مثال. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$ را حساب کنید.

حل.

$$\begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{cases}$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \frac{1}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2}$$

انتگرال گیری ۲۱

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \left. \frac{\ln^2 x}{2} \right|_1^2 = \frac{\ln^2(2)}{2} - \frac{\ln^2(1)}{2} = \frac{\ln^2(2)}{2}$$

اگر یکی از کران‌های انتگرال ∞ باشد، آن را "انتگرال ناسره (مجازی)" می‌نامند.

تعریف. اگر جواب انتگرال ناسره عدد شود آن را همگرا، در غیر این صورت آن را واگرا می‌نامند.

مثال. نشان دهید انتگرال‌های ناسره ذیل همگرا هستند.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad (\text{الف}) \quad \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \quad (\text{ب})$$

حل الف)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} x^{-2} dx = \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_1^{+\infty} = \left. -\frac{1}{x} \right|_1^{+\infty} = \frac{1}{-\infty} - \left(-\frac{1}{1} \right) = 0 + \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

حل ب)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left. -e^{-x} \right|_0^{+\infty} = \left(-e^{-\infty} \right) - \left(-e^{-0} \right) = 0 - \left(-1 \right) = \frac{1}{1}$$

مثال. انتگرال $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx$ را بیابید.

حل.

$$x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$$

$$\begin{cases} u = x - 2 \\ du = dx \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx &= \int \frac{1}{(x - 2)^2 + 1} dx \\ &= \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \tan^{-1} u + c = \tan^{-1}(x - 2) + c \end{aligned}$$

مثال. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ را حساب کنید.

حل. این مثال با جانشینی خاصی حل می‌شود.

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \Rightarrow dx = r \cos \theta d\theta \\
 \sqrt{4-x^2} &= \sqrt{4-r^2 \sin^2 \theta} = r \sqrt{1-\sin^2 \theta} = r \cos \theta \\
 \begin{cases} x=1 \Rightarrow r \sin \theta = 1 \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{r} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \\ x=0 \Rightarrow r \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{r \cos \theta}{r \cos \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

توجه. هرگاه یک انتگرال شامل یکی از عبارت‌های ذیل باشد، از جانشینی‌های متناظر زیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccc}
 \sqrt{a^2-x^2} & , & \sqrt{x^2-a^2} & , & \sqrt{x^2+a^2} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 x = a \sin \theta & & x = a \sec \theta & & x = a \tan \theta
 \end{array}$$

این جانشینی‌های مثلثاتی را زمانی به کار می‌بریم که انتگرال با جانشینی ساده‌تری حل نشود.

۷- انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء

هرگاه u و v دو تابع مشتق‌پذیر باشند، دیفرانسیل حاصل ضرب به صورت ذیل است:

$$d(uv) = u dv + v du$$

$$u dv = d(u.v) - v du$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\int u dv = \int d(u.v) - \int v du$$

$$\int u dv = u.v - \int v du$$

فرمول به‌دست آمده را فرمول "جزء به جزء" می‌نامند، برای استفاده از این فرمول، باید u و dv

را طوری انتخاب کنیم که انتگرال $\int v du$ ساده‌تر از انتگرال $\int u dv$ باشد.

مثال. انتگرال $\int xe^x dx$ را حساب کنید.

حل. u و dv را انتخاب می کنیم:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases}$$

از u دیفرانسیل و از dv انتگرال می گیریم:

$$\begin{cases} du = dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

$$\int u dv = u.v - \int v du$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

مثال. انتگرال $\int (2x+1) \sin x dx$ را حساب کنید.

حل.

$$\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int (2x+1) \sin x dx = (2x+1)(-\cos x) - \int -\cos x (2dx)$$

$$= -(2x+1) \cos x + 2 \int \cos x dx$$

$$= -(2x+1) \cos x + 2 \sin x + c$$

مثال. مقدار انتگرال $\int_1^2 \ln x dx$ را بیابید.

حل. ابتدا انتگرال نامعین آن را می یابیم:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= x \ln x - \int dx \\
 &= x \ln x - x \\
 \int_1^2 \ln x dx &= (x \ln x - x) \Big|_1^2 = (2 \ln 2 - 2) - (\ln 1 - 1) = 2 \ln 2 - 1
 \end{aligned}$$

گاهی اوقات ممکن است دوبار و یا بیشتر از فرمول جزء به جزء استفاده کنیم:

مثال. انتگرال $\int x^2 e^x dx$ را حساب کنید.

حل.

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx \quad (1)$$

اما انتگرال $\int 2x e^x dx$ نیز با جزء به جزء بدست می‌آید.

$$\begin{cases} u = 2x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\int 2x e^x dx = 2x e^x - \int 2 e^x dx = 2x e^x - 2 e^x \quad (2)$$

با جای‌گذاری عبارت (۲) در (۱) داریم

$$\begin{aligned}
 \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - (2x e^x - 2 e^x) + c \\
 &= x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + c
 \end{aligned}$$

۸- انتگرال‌گیری به روش کسرهای جزئی

هرگاه $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای باشند، $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک "تابع گویا" می‌نامند.

انتگرال‌گیری از توابع گویا را در چند حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: درجه صورت کمتر از درجهی مخرج و مخرج به عامل‌های درجه‌ی اول تجزیه

می‌شود. در این حالت می‌توان کسر را به روش این مثال‌ها تفکیک کرد.

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\frac{x^2+4}{x(x-3)(2x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{2x+1}$$

عبارت‌های سمت راست را "کسرهای جزئی" می‌گویند.

نکته‌ی مهم. در تفکیک یک کسر، باید به تعداد عامل‌های مخرج، کسر بنویسیم.

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+4}$$

مثال. انتگرال $\int \frac{1}{x^2-1} dx$ را حساب کنید.

حل.

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

از تساوی کسر دوم و چهارم عبارت ذیل حاصل می‌شود.

$$1 \equiv A(x+1) + B(x-1)$$

این عبارت به ازای هر x برقرار است، x را طوری انتخاب می‌کنیم که A و B

معلوم شوند. (بهتر است x ریشه‌ی پرانتزها انتخاب شود.)

$$x=1 \rightarrow 1=2A+0 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$x=-1 \rightarrow 1=0-2B \Rightarrow B=\frac{-1}{2}$$

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{B}{x+1} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} dx + \int \frac{\frac{-1}{2}}{x+1} dx \\
&= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c
\end{aligned}$$

مثال. $\int \frac{x-2}{x^2(x-1)} dx$ را حساب کنید.

حل.

$$\frac{x-2}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$x-2 \equiv A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2$$

$$x=0 \rightarrow -2 = -A + 0 + 0 \rightarrow A=2$$

$$x=1 \rightarrow 1-2 = 0 + 0 + C \rightarrow C=-1$$

$$x=2 \rightarrow 0 = A + 2B + 4C$$

اما A و C معلوم هستند.

$$A=2, C=-1 \rightarrow B=1$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-2}{x^2(x-1)} dx &= \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-1}{x-1} dx \\
&= -2x^{-1} + \ln|x| - \ln|x-1| + c
\end{aligned}$$

حالت دوم: درجه‌ی صورت بزرگتر یا مساوی درجه مخرج و مخرج به عامل‌های اول تجزیه می‌شود. در این حالت، صورت را به مخرج کسر تقسیم می‌کنیم، با این کار به انتگرالی می‌رسیم که درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج کمتر است.

مثال. $\int \frac{x^3 - 4x^2 + 1}{x+2} dx$ را حساب کنید.

حل. با تقسیم صورت به مخرج کسر داریم:

$$x^3 - 4x^2 + 1 = (x^2 - 6x + 12)(x+2) - 23$$

انتگرال گیری ۲۷

طرفین را بر $(x+۲)$ تقسیم می کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{x^3 - 4x^2 + 1}{x+2} &= (x^2 - 6x + 12) - \frac{23}{x+2} \\ \int \frac{x^3 - 4x^2 + 1}{x+2} dx &= \int (x^2 - 6x + 12) dx - \int \frac{23}{x+2} dx \\ &= \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 12x - 23 \ln|x+2| + c\end{aligned}$$

حالت سوم: مخرج کسر به عامل های درجه ی اول و یا دوم تجزیه می شود. در این حالت نیز باید به تعداد عامل های مخرج، کسر جزئی بنویسیم، ولی تفکیک آن با حالت اول متفاوت است.

$$\frac{2+x}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

x^2+1 عامل درجه دوم است:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

x^2+x+1 عامل درجه دوم است.

مثال. انتگرال $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx$ را حساب کنید.

حل.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2(x^2+1)} &= \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\ &= \frac{A(x^2+1) + Bx(x^2+1) + x^2(Cx+D)}{x^2(x^2+1)}\end{aligned}$$

$$1 \equiv Ax^2 + A + Bx^3 + Bx + Cx^3 + Dx^2$$

$$1 \equiv (B+C)x^3 + (A+D)x^2 + Bx + A$$

با مساوی قرار دادن ضرایب در جملات هم توان داریم:

$$\begin{cases} B+C=0 \\ A+D=0 \\ B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=0 \\ D=-1 \\ B=0 \\ A=1 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx &= \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{0}{x} dx + \int \frac{-1}{x^2+1} dx \\ &= -x^{-1} - \tan^{-1} x + c \end{aligned}$$

۹- تقریب انتگرال معین

انتگرال‌های مانند $\int e^{-x^2} dx$ و $\int \frac{\sin x}{x} dx$ را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی به‌دست آورد، لذا انتگرال معین آنها به‌طور تقریبی به‌دست می‌آید. در اینجا دو روش تقریب انتگرال معین بیان می‌شود:

روش ذوزنقه (تقریب به مساحت ذوزنقه)

فرض می‌کنیم $f(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته و $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ یک افراز منظم فاصله $[a, b]$ به n فاصله مساوی باشد.



طول هر زیر فاصله برابر است با: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

تقریب انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ به صورت ذیل است:

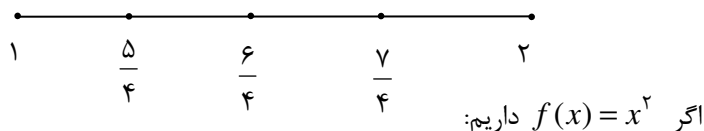
$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

توجه. هر چه مقدار n بزرگتر باشد، تقریب دقیق‌تر خواهد بود.

مثال. $\int_1^2 x^2 dx$ را با استفاده از روش ذوزنقه به ازای $n = 4$ تقریب بزنید.

حل. فاصله $[1, 2]$ را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنیم:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$



$$x_0 = 1 \rightarrow f(1) = 1$$

$$x_1 = \frac{5}{4} \rightarrow f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{16}$$

$$x_2 = \frac{6}{4} \rightarrow f\left(\frac{6}{4}\right) = \frac{36}{16}$$

$$x_3 = \frac{7}{4} \rightarrow f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{49}{16}$$

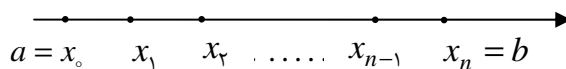
$$x_4 = \frac{8}{4} = 2 \rightarrow f(2) = 4$$

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

$$\int_1^2 x^2 dx \cong \frac{2-1}{4} \left(1 + \frac{25}{16} + \frac{36}{16} + \frac{49}{16} + 4\right) = 2.34375$$

روش سیمپسون (تقریب به مساحت سهمی)

فرض کنیم f روی فاصله $[a, b]$ پیوسته و $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ یک افراز منظم فاصله $[a, b]$ به n فاصله ی مساوی باشد. (در این روش باید n زوج باشد).



طول هر زیر بازه برابر است با: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. تقریب انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ به صورت

ذیل است:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{3n} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

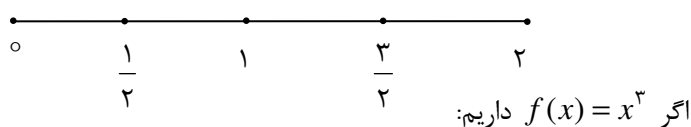
۳۰ فصل اول

$$.... + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

مثال. انتگرال $\int_0^2 x^3 dx$ را با استفاده از روش سیمپسون به ازای $n = 4$ تقریب بزنید.

حل. فاصله $[0, 2]$ را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$



$$x_0 = 0 \rightarrow f(0) = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

$$x_2 = 1 \rightarrow f(1) = 1$$

$$x_3 = \frac{3}{2} \rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8}$$

$$x_4 = 2 \rightarrow f(2) = 8$$

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{3n} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))$$

$$\int_0^2 x^3 dx \cong \frac{2-0}{12} (0 + 4\left(\frac{1}{8}\right) + 2(1) + 4\left(\frac{27}{8}\right) + 8) = 4$$

$$\int_0^2 x^3 dx \cong 4$$

۱۰- تمرین

انتگرال بگیرید

$$\int (2x-4)^5 dx - 1$$

$$\int_0^2 \frac{1}{5x+2} dx - 2$$

انتگرال گیری ۳۱

$$\int \frac{t}{t^2+1} dt \quad -3$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad -4$$

$$\int x(x-3)^9 dx \quad -5$$

$$\int_0^1 te^{-t^2} dt \quad -6$$

$$\int \frac{e^x}{2e^x+1} dx \quad -7$$

$$\int \cot x dx \quad -8$$

$$\int 2x \tan(x^2+4) dx \quad -9$$

$$\int \cos^2 x dx \quad -10$$

راهنمایی: از رابطه $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ استفاده کنید.

$$11- \text{انتگرال} \int_0^2 \frac{z^2}{\sqrt{z^2+1}} dz \text{ را حساب کنید.}$$

$$12- \text{انتگرال} \int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}} \text{ را بیابید.}$$

همگرایی و واگرایی انتگرال های زیر را بررسی کنید.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x^4} dx \quad -13$$

$$\int_{-\infty}^4 e^{-4x} dx \quad -14$$

$$\int_{-\infty}^0 e^x \sqrt{16+9e^x} dx \quad -15$$

$$16- \text{با یک جانشینی مناسب نشان دهید} \int \sin(\ln x) dx \text{ تبدیل به} \int e^u \sin u du \text{ می شود.}$$

۳۲ فصل اول

۱۷- اگر f تابعی فرد باشد، ثابت کنید $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

۱۸- اگر f تابعی زوج باشد، ثابت کنید $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

۱۹- انتگرال $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ را حساب کنید.

۲۰- انتگرال بگیرید.

الف) $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 8} dx$ ب) $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}} dx$

به روش جزء به جزء انتگرال بگیرید.

۲۱- $\int (x+2)e^x dx$

۲۲- $\int_0^\pi t \sin 3t$

۲۳- $\int (x^2 + x) \sin x dx$

۲۴- $\int_1^3 x^4 \ln x dx$

۲۵- $\int \frac{x^3}{e^{-x}} dx$

۲۶- $\int \ln^2 x dx$

۲۷- $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

۲۸- $\int x \sec^2 x dx$

۲۹- $\int \tan^{-1} x dx$

در حل انتگرال‌های زیر ابتدا از جانشینی و سپس از جزء به جزء استفاده کنید.

۳۰- $\int \cos(\sqrt{x}) dx$

انتگرال گیری ۳۳

$$\int \ln(4x+3)dx \quad -31$$

$$\int t^3 \sin(t^2)dt \quad -32$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx \quad -33$$

به روش کسرهای جزئی انتگرال بگیرید.

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2+x} dx \quad -34$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4} dx \quad -35$$

$$\int \frac{2x+1}{x(x-1)^2} dx \quad -36$$

$$\int \frac{x^4+x+1}{x+2} dx \quad -37$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+1} dx \quad -38$$

$$\int \frac{1-x}{x(x^2+1)} dx \quad -39$$

انتگرال های زیر را به روش تقریبی حساب کنید.

$$n=4 \quad \text{به روش سیمپسون و به ازای} \quad \int_0^2 \frac{1}{x+1} dx \quad -40$$

$$n=4 \quad \text{به روش دوزنقه و به ازای} \quad \int_0^2 x^3 dx \quad -41$$

$$n=2 \quad \text{به روش سیمپسون و به ازای} \quad \int_1^2 \sqrt{x} dx \quad -42$$

$$n=6 \quad \text{به روش دوزنقه و به ازای} \quad \int_1^4 \frac{1}{x} dx \quad -43$$

یادداشت

فصل دوم

کاربردهای انتگرال

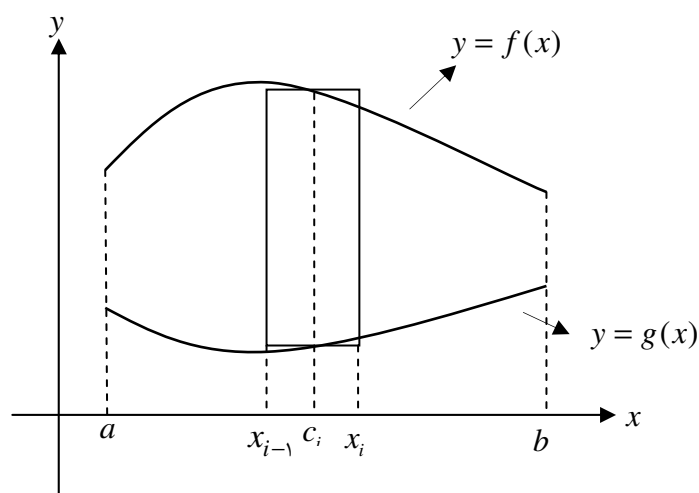
هر کمیت پیوسته‌ای را که بتوان بر حسب مجموع ریمانی بیان کرد، با انتگرال معین قابل محاسبه (یا تعریف) است. از این روی انتگرال معین در شاخه‌های مختلف علوم، مانند ریاضی، آمار و احتمال، فیزیک، اقتصاد و ... کاربرد دارد. در این فصل فقط چند کاربرد انتگرال آمده است.

۱- تعیین مساحت بین دو منحنی

فرض کنیم دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته و $f(x) \geq g(x)$ باشد. می‌خواهیم فرمولی برای مساحت ناحیه محدود به دو منحنی f و g و دو خط $x = a$ و $x = b$ بیابیم.

فرض کنیم $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ یک افراز فاصله $[a, b]$ و $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ طول زیر بازها و $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$ ماکسیم این زیر بازها و $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ نقطه دلخواهی در این زیر فاصله‌ها باشد. مستطیل‌هایی به عرض Δx_i و طول $(f(c_i) - g(c_i))$ روی این ناحیه تشکیل می‌دهیم، یکی از این مستطیل‌ها در شکل نشان داده شده است، مساحت این مستطیل برابر است با:

$$(f(c_i) - g(c_i))\Delta x_i$$



فرض کنیم S نشان دهنده مساحت این ناحیه باشد، مساحت ناحیه را به مجموع مساحت مستطیل‌ها تقریب می‌زنیم:

$$S \cong \sum_{i=1}^n (f(c_i) - g(c_i)) \Delta x_i$$

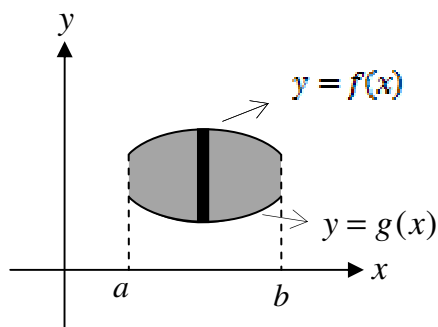
این تقریب با کوچک شدن λ بهتر می‌شود، لذا مساحت این ناحیه به صورت ذیل تعریف

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(c_i) - g(c_i)) \Delta x_i \quad \text{می‌شود:}$$

بنابراین:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

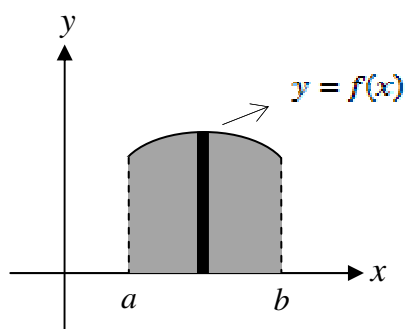
به طور خلاصه، اگر ناحیه‌ی محدود به دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ و دو خط $x = a$ و $x = b$ مفروض باشد.



مساحت این ناحیه برابر است با:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx, \quad (f(x) \geq g(x))$$

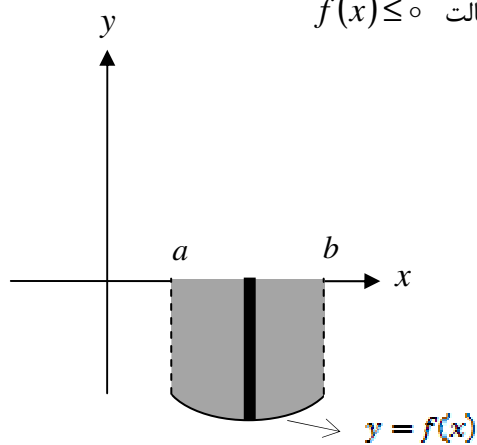
حالت خاص: الف) ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = f(x)$ و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ مفروض است، در حالت $f(x) \geq 0$



مساحت این ناحیه برابر است با:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

ب) ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = f(x)$ و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ مفروض است، در حالت $f(x) \leq 0$



مساحت این ناحیه برابر است با:

$$S = \int_a^b -f(x) dx$$

مثال. مساحت ناحیه‌ی محدود به دو منحنی $y = x^2$ و $y = x^3$ را حساب کنید.

حل. فرض کنیم

$$g(x) = x^2 \text{ و } f(x) = x^3$$

$$f = g \Rightarrow x^2 = x^3$$

$$x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{نقاط برخورد دو تابع}$$

$$f(x) \geq g(x) \text{ ، } [\frac{1}{4}, 1] \text{ ، لذا روی فاصله } f(\frac{1}{4}) > g(\frac{1}{4})$$

بنابراین:

$$S = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (x^3 - x^2) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

مثال. مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = 4 - x^2$ و محور x ها را حساب کنید.

حل.

$$f(x) = 0 \rightarrow 4 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

$f(1) \geq 0$ ، لذا روی فاصله $[-2, 2]$ ، تابع $f(x)$ مثبت است.

بنابراین:

$$S = \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3}$$

مثال. مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = x^2 e^x$ و محور x ها و خط $x = 1$ را حساب

کنید.

حل.

$$f(x) = x^2 e^x$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 e^x = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

تابع $f(x)$ همواره مثبت است.

$$S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 e^x dx$$

کاربردهای انتگرال ۳۹

این انتگرال با دوبار جزء به جزء به دست می‌آید:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x$$

$$S = \int_0^1 x^2 e^x dx = (x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x) \Big|_0^1 = e - 2$$

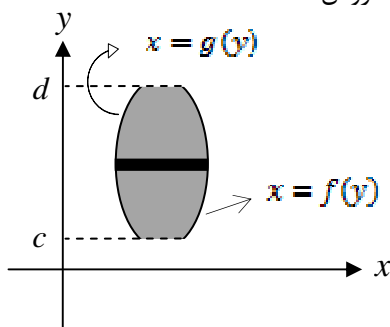
مثال. مساحت ناحیه‌ی بین منحنی $y = x^3$ و خط $y = x$ را بیابید.
حل.

$$x = x^3 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

روی فاصله $[-1, 0]$ ، $x < x^3$ و روی فاصله $[0, 1]$ ، $x > x^3$

$$S = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

فرض کنیم توابع $x = f(y)$ و $x = g(y)$ روی فاصله $[c, d]$ پیوسته و $f(y) \geq g(y)$ ، ناحیه‌ی محدود به دو منحنی $x = f(y)$ و $x = g(y)$ و دو خط $y = c$ و $y = d$ مفروض است.



با اختیار مستطیل‌های جزء عمود بر محور y ها، مساحت ناحیه برابر است با:

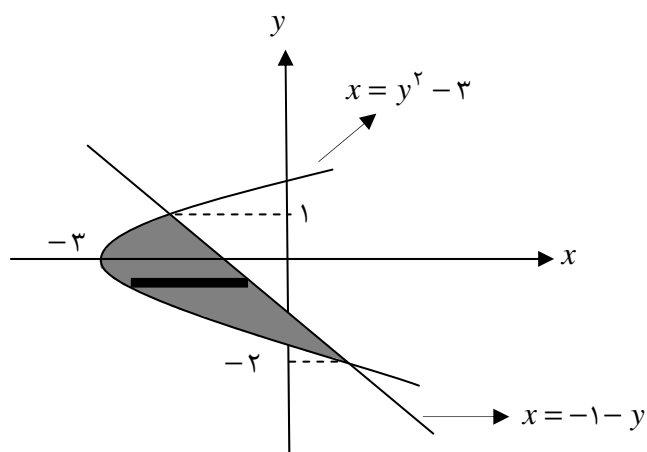
$$S = \int_c^d (f(y) - g(y)) dy$$

مثال. مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی $x = y^2 - 3$ و خط $x + y = -1$ را حساب کنید.

حل.

$$\begin{aligned}
 x &= -1-y \quad \text{و} \quad x = y^2 - 3 \\
 g(y) &= -1-y \quad \text{و} \quad f(y) = y^2 - 3 \quad \text{قرار می‌دهیم:} \\
 f &= g \Rightarrow y^2 - 3 = -1 - y \\
 y^2 + y - 2 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{نقاط برخورد منحنی و خط:} \\
 g(y) &\geq f(y), \quad \text{لذا روی فاصله } [-2, 1], \quad g(y) \geq f(y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^1 g(y) - f(y) dy = \int_{-2}^1 (-1-y) - (y^2 - 3) dy \\
 &= \int_{-2}^1 (-y^2 - y + 2) dy = \left(-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{27}{6}
 \end{aligned}$$



مثال. مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی $x = y^2 - y$ و محور y ها را حساب کنید.

حل.

$$\begin{aligned}
 f(y) &= y^2 - y \\
 f &= 0 \Rightarrow y^2 - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

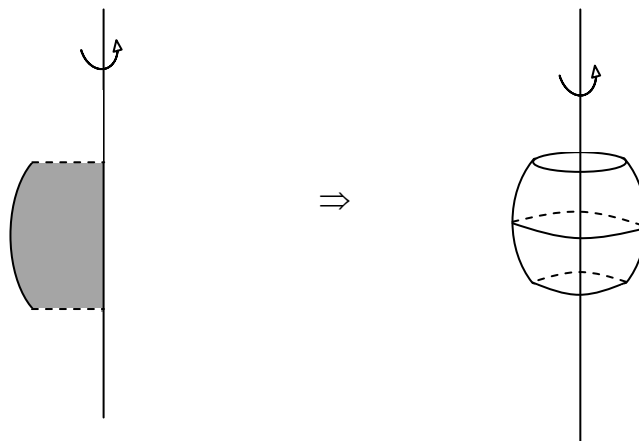
کاربردهای انتگرال ۴۱

لذا $f\left(\frac{1}{y}\right) \leq 0$ روی فاصله $[0, 1]$ منفی است.

$$S = \int_0^1 -f(y)dy = \int_0^1 -(y^2 - y)dy = \int_0^1 (y - y^2)dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\bigg|_0^1 = \frac{1}{6}$$

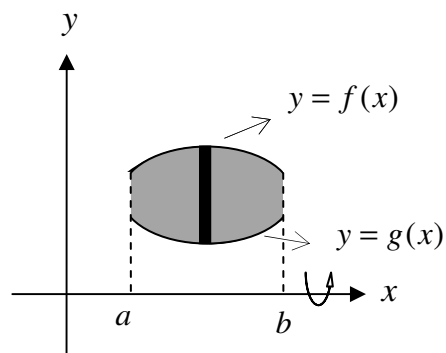
۲- حجم اجسام دوار

یک جسم دوار، از دوران یک ناحیه حول یک خط به دست می آید.



کره، مخروط، استوانه و تیوپ چند جسم دوار می باشند.

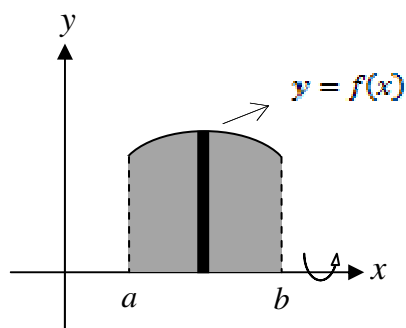
فرض کنیم $y = f(x)$ و $y = g(x)$ روی فاصله $[a, b]$ پیوسته و $f(x) \geq g(x) \geq 0$ ، ناحیه‌ی محدود به دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ و دو خط $x = a$ و $x = b$ را در نظر می گیریم.



حجم جسم حاصل از دوران این ناحیه حول محور x ها برابر است با:

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

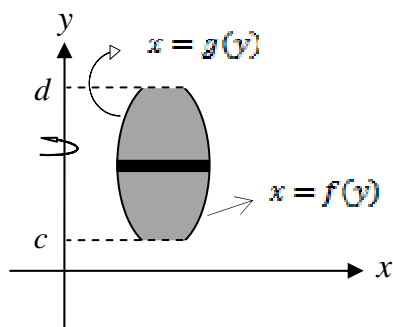
حالت خاص: فرض کنیم $f(x) \geq 0$ ، و ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = f(x)$ و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ ، حول محور x ها دوران کند



حجم جسم حاصل برابر است با:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

توجه فرض کنیم دوران، ناحیه‌ای مانند شکل زیر حول محور y ها باشد.



حجم جسم حاصل برابر است با:

$$V = \pi \int_c^d (f^2(y) - g^2(y)) dy$$

کاربردهای انتگرال ۴۳

مثال. ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = x^2$ و $y = x$ حول محور x ها دوران می‌کند، حجم جسم حاصل را تعیین کنید.
حل.

$$g(x) = x^2 \quad \text{و} \quad f(x) = x$$

$$f = g \Rightarrow x = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} : \text{نقاط برخورد } f \text{ و } g$$

$$f(x) \geq g(x), \quad \text{لذا روی فاصله } [0, 1], \quad f\left(\frac{1}{2}\right) \geq g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$V = \pi \int_0^1 (f^2(x) - g^2(x)) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - (x^2)^2) dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

مثال. ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = -x^2 + 1$ و محور x ها، حول محور x ها دوران می‌کند، حجم جسم حاصل را محاسبه کنید.
حل.

$$f(x) = -x^2 + 1$$

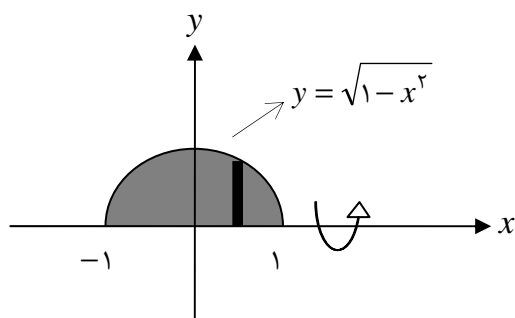
$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$V = \pi \int_{-1}^{+1} f^2(x) dx = \pi \int_{-1}^{+1} (-x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_{-1}^{+1} (x^4 - 2x^2 + 1) dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 2 \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^{+1} = \frac{16}{15} \pi$$

مثال. حجم کره‌ای به شعاع واحد را بیابید.

حل. از دوران نیم دایره $(y \geq 0)$ $x^2 + y^2 = 1$ ، حول محور x ها، کره‌ای به شعاع یک حاصل می‌شود.



از رابطه $x^2 + y^2 = 1$ داریم:

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

قرار می دهیم:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$V = \pi \int_{-1}^1 f^2(x) dx = \pi \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3}$$

۳- معادلات دیفرانسیل با متغیرهای جدایی پذیر

در بسیاری از مسائل مهم در علوم مختلف، معادله‌ای داریم که شامل مشتقات یک تابع است، که آن را "معادله‌ی دیفرانسیل" می‌نامند. در زیر چند معادله دیفرانسیل آورده شده است.

$$y' - 2x = 0 \quad (\text{مرتبه‌ی اول})$$

$$y' + 2y - 3x = 0 \quad (\text{مرتبه‌ی اول})$$

$$y'' + xy' = x^4 \quad (\text{مرتبه‌ی دوم})$$

$$xy''' - y'' = 0 \quad (\text{مرتبه‌ی سوم})$$

منظور از حل یک معادله‌ی دیفرانسیل، یافتن تابعی است که در معادله دیفرانسیل مورد نظر صدق کند. مثلاً تابع $y = e^{3x}$ جوابی برای معادله‌ی دیفرانسیل $y' - 3y = 0$ است.

همچنین $y = e^{2x}$ جوابی برای معادله‌ی دیفرانسیل $y'' - y' - 2y = 0$ است.

کاربردهای انتگرال ۴۵

معادله‌ی دیفرانسیل $y' - 2x = 0$ به سادگی حل می‌شود، زیرا با انتگرال‌گیری از طرفین معادله‌ی $y' = 2x$ داریم:

$$y = \int 2x dx = \frac{2x^2}{2} + c$$

$$y = x^2 + c$$

این یک "جواب عمومی" معادله می‌باشد، گاهی شرایطی تعیین می‌شود که می‌توان c را بدست آورد.

مثال. معادله‌ی دیفرانسیل $y' - 2 \sin x = 0$ را با شرط اولیه $y(0) = 2$ حل کنید.

حل.

$$y' = 2 \sin x$$

$$y = \int 2 \sin x dx = -2 \cos x + c$$

$$y = -2 \cos x + c$$

بنا به شرط اولیه:

$$2 = -2 \cos(0) + c \Rightarrow c = 4$$

بنابراین:

$$y = -2 \cos x + 4$$

معادله‌ی دیفرانسیل ذیل را در نظر می‌گیریم:

$$f(y).y' = g(x) \quad (1)$$

برای حل این معادله، محاسبات ذیل را انجام می‌دهیم:

$$f(y)y' = g(x)$$

$$f(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$f(y)dy = g(x)dx$$

در معادله‌ی آخر، متغیرها از هم جدا شده‌اند، اکنون با انتگرال‌گیری از طرفین، معادله حل می‌شود. معادله (۱) را معادله‌ی دیفرانسیل "جدایی پذیر" می‌گویند.

توجه. برای حل معادلات جدایی‌پذیر، باید x ها در یک سمت و y ها در سمت دیگر تساوی باشند.

مثال. معادله‌ی دیفرانسیل $xy' = x^3 - 1$ را حل کنید.

حل.

$$xy' = x^3 - 1$$

$$x y \frac{dy}{dx} = x^3 - 1$$

$$x y dy = (x^3 - 1) dx$$

$$\int x y dy = \int (x^3 - 1) dx$$

$$\frac{xy^2}{2} = \frac{x^4}{4} - x + c$$

$$y^2 = \frac{x^4}{2} - x + c$$

مثال. معادله‌ی دیفرانسیل $x^2 y dy = e^y dx$ را حل کنید.

حل.

$$x^2 y dy = e^y dx$$

$$\frac{y}{e^y} dy = \frac{dx}{x^2}$$

$$y e^{-y} dy = x^{-2} dx$$

$$\int y e^{-y} dy = \int x^{-2} dx$$

$$-y e^{-y} - e^{-y} = \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$\frac{y+1}{e^y} = \frac{1}{x} + c$$

مثال. معادله‌ی دیفرانسیل $y'y' = x^2$ را با شرط اولیه $y(0) = 2$ ، حل کنید.

حل.

$$\frac{dy}{dx} y^2 = x^2$$

کاربردهای انتگرال ۴۷

$$y^3 dy = x^3 dx$$

$$\int y^3 dy = \int x^3 dx \Rightarrow \frac{y^4}{4} = \frac{x^4}{4} + c \quad \text{جواب عمومی}$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{0}{4} + c \Rightarrow c = \frac{1}{4} \quad \text{بنا به شرط اولیه:}$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4}$$

بنابراین :

$$y = \sqrt[4]{x^4 + 1}$$

۴- رشد نمایی

هرگاه آهنگ تغییر کمیتی مانند A نسبت به زمان، متناسب با آن کمیت باشد، معادله‌ی

دیفرانسیل $\frac{dA}{dt} = kA(t)$ با ضریب تناسب k حاصل می‌شود و داریم:

$$\frac{dA}{dt} = kA(t)$$

$$dA = kA(t)dt$$

$$\frac{dA}{A} = kdt$$

$$\int \frac{dA}{A} = \int kdt$$

$$\ln A = kt + c$$

$$A = e^{kt+c} = e^{kt} \cdot e^c$$

عدد ثابت e^c را با c نشان دهیم، لذا:

$$A(t) = ce^{kt}$$

در این رابطه k نرخ رشد است، زیرا:

$$\frac{A'(t)}{A(t)} = k$$

مثال. آهنگ افزایش طبیعی جمعیت یک شهر، متناسب با جمعیت آن شهر است، اگر در سال ۱۳۸۰ جمعیت این شهر ۵۰ هزار نفر بوده باشد، با نرخ رشد ۴٪ جمعیت این شهر در سال ۱۳۸۵ به چند نفر رسیده است؟

حل. فرض کنیم $A(t)$ جمعیت این شهر t سال پس از سال ۱۳۸۰ باشد.

$$A(t) = ce^{kt}$$

$$k = 0.04 \quad \text{و} \quad A(0) = 50000$$

$$50000 = ce^{0.04 \times 0} \Rightarrow c = 50000$$

$$A(t) = 50000e^{0.04t}$$

بنابراین:

$$A(5) = 50000e^{0.04 \times 5} = 61070$$

در سال ۱۳۸۵ جمعیت این شهر حدود ۶۱۰۷۰ نفر شده است.

اگر مبلغ سپرده گذاری شده با آهنگی متناسب با آن مبلغ افزایش یابد، گوییم "سود به طور پیوسته" محاسبه می شود.

مثال. شخصی مبلغ یکصد هزار تومان را به مدت ۳ سال با سود پیوسته سالانه ۴٪ سرمایه گذاری کرده است. موجودی وی در پایان سه سال چقدر است؟

حل. فرض کنیم $A(t)$ کل سپرده گذاری پس از t سال باشد.

$$k = 0.04, \quad A(0) = 100000$$

$$100000 = ce^{0.04 \times 0} \Rightarrow c = 100000$$

$$A(t) = 100000e^{0.04t}$$

$$A(3) = 112749$$

موجودی وی در پایان سه سال ۱۱۲۷۴۹ تومان است.

مثال. شخصی مبلغ ۸۰ هزار تومان را به مدت دو سال سرمایه گذاری کرده است. بعد از دو سال موجودی وی ۱۰۰ هزار تومان می شود، با فرض اینکه سود سالانه به طور پیوسته محاسبه شده باشد، نرخ سود سالانه را تعیین کنید.

حل.

$$A(t) = ce^{kt}$$

$$A(0) = 80000$$

کاربردهای انتگرال ۴۹

$$۸۰۰۰۰ = ce^{k \times ۰} \Rightarrow c = ۸۰۰۰۰$$

$$A(۲) = ۱۰۰۰۰۰$$

$$۱۰۰۰۰۰ = ۸۰۰۰۰e^{k \times ۲} \Rightarrow e^{۲k} = ۱/۲۵$$

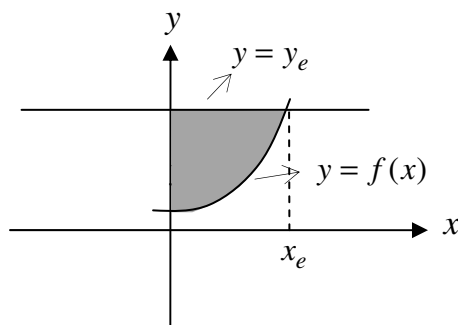
$$۲k = \ln(۱/۲۵) \Rightarrow k = ۰/۱۱$$

نرخ سود سالیانه برابر با ۱۱٪ است.

۵- چند مثال کاربردی

مازاد تولید کننده

فرض کنیم x مقدار تولید و $y = f(x)$ تابع عرضه و y قیمت باشد، اگر قیمت تعادلی بازار y_e متناظر با x_e باشد، "مازاد تولید کننده"، مساحت بین منحنی عرضه و خط $y = y_e$ می باشد.



$$\text{مازاد تولید کننده} = S = \int_0^{x_e} (y_e - f(x)) dx$$

مثال. اگر تابع عرضه $y = f(x) = x^2 + ۲$ و قیمت تعادلی $y_e = ۶$ باشد، مازاد تولید کننده را پیدا کنید.

حل.

$$y_e = ۶ \Rightarrow ۶ = x^2 + ۲ \Rightarrow x_e = ۲$$

$$S = \int_0^{x_e} (y_e - f(x)) dx = \int_0^2 ۶ - (x^2 + ۲) dx$$

$$= \int_0^2 (-x^2 + ۴) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + ۴x \right) \Big|_0^2 = \frac{۱۶}{3} \text{ واحد پول}$$

به طور مشابه، اگر $y = f(x)$ تابع تقاضا باشد، "مازاد مصرف کننده" برابر است با

$$\int_0^{x_e} (f(x) - y_e) dx$$

مثال. تابع عرضه و تابع تقاضا به ترتیب $y = \ln(x+1)$ و $y = 4 - \ln(x+1)$ می باشند، مقدار تعادلی x_e را بیابید.

حل. مقدار تعادلی در نقطه ای واقع می شود که تابع عرضه و تابع تقاضا مساوی باشند.

$$4 - \ln(x+1) = \ln(x+1)$$

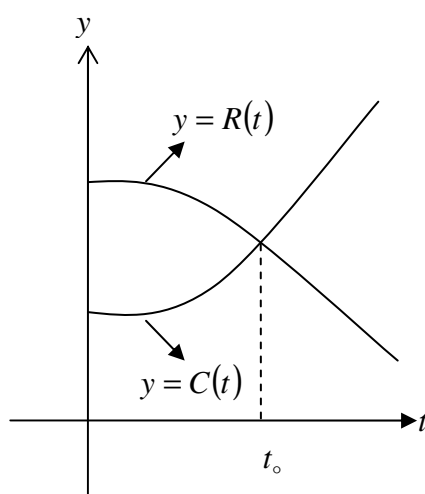
$$2 \ln(x+1) = 4 \Rightarrow \ln(x+1) = 2$$

$$x+1 = e^2 \Rightarrow x_e = e^2 - 1$$

سود بنگاه

یک بنگاه تولیدی دستگاهی می خرد که درآمد و هزینه ی آن در هر لحظه از زمان t به ترتیب $R(t)$ و $C(t)$ است. در فاصله زمانی که $R(t) > C(t)$ ، سود بنگاه مثبت است. سود بنگاه زمانی به صفر می رسد که $R(t) = C(t)$. اگر این زمان را با t_0 نشان دهیم، سود این دستگاه تا زمان t_0 برابر است با:

$$\int_0^{t_0} (R(t) - C(t)) dt$$



کاربردهای انتگرال ۵۱

مثال. یک شرکت، ماشینی خریده است که درآمد و هزینه‌ی آن در زمان t به ترتیب $R(t) = 36 - 0.01t^2$ و $C(t) = 4 + 0.01t^2$ است. این ماشین زمانی کنار گذاشته می‌شود که سود حاصل از آن به صفر برسد. اگر t بر حسب ماه باشد:
 الف) این زمان را تعیین کنید.
 ب) سود شرکت در این زمان چقدر است؟
حل الف)

$$C(t) = R(t) \Rightarrow 4 + 0.01t^2 = 36 - 0.01t^2$$

$$t^2 = 1600 \Rightarrow t = 40$$

حل ب)

$$\begin{aligned} \text{سود بنگاه} &= \int_0^{40} (R(t) - C(t)) dt \\ &= \int_0^{40} (36 - 0.01t^2) - (4 + 0.01t^2) dt \\ &= \int_0^{40} (32 - 0.02t^2) dt \\ &= \left(32t - \frac{0.02t^3}{3} \right) \bigg|_0^{40} = 853 \frac{1}{3} \text{ واحد پول} \end{aligned}$$

۶- تمرین

در تمرین یک تا هشت، مساحت ناحیه‌های داده شده را محاسبه کنید.

- ۱- ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = \sqrt{x}$ و محور x ها و دو خط $x = 1$ و $x = 2$
- ۲- ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = x^2 - 4$ و محور x ها
- ۳- ناحیه‌ی محدود به دو منحنی $y = x^2$ و $y = -x^2 + 4x$
- ۴- ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = 1 - x^2$ و محور x ها و دو خط $x = 0$ و $x = 2$
- ۵- ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = (x - 2)^5$ و محور x ها و دو خط $x = 0$ و $x = 3$

۶- ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = \sqrt{x}$ و دو خط $y = \frac{1}{2}x$ و $x = 9$

۷- ناحیه‌ی محدود به منحنی $x = 1 - y^2$ و محور y ها

۸- ناحیه‌ی محدود به منحنی $x = y^2$ و خط $4y = x + 3$

۹- مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = (x+2)e^{-x}$ و محور مختصات واقع در ناحیه‌ی دوم را تعیین کنید.

۱۰- با استفاده از انتگرال، مساحت مثلثی را بیابید که رؤس آن سه نقطه زیر هستند.

$$A(0, 2), B(1, 2), C(3, 4)$$

۱۱- ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = -x^2 - x + 2$ و محور x ها، حول محور x ها دوران می‌کند، حجم جسم حاصل را تعیین کنید.

۱۲- ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = \cos x$ و محور x ها و دو خط $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{2}$ ،

حول محور x ها دوران می‌کند، حجم جسم حاصل را بیابید.

۱۳- ناحیه‌ی بین سه خط $y = x + 2$ ، $y = 4$ و $x = 0$ حول محور x ها دوران می‌کند، حجم جسم حاصل را بیابید.

۱۴- ناحیه‌ی محدود به منحنی $y = x^2 + 2$ و خط $y = 6$ ، حول محور x ها دوران می‌کند، حجم جسم حاصل را بیابید.

۱۵- با استفاده از انتگرال، حجم یک مخروط به ارتفاع ۳ و شعاع قاعده ۲ را تعیین کنید.

در تمرینات ۱۶ تا ۲۰، معادلات دیفرانسیل داده شده را حل کنید.

$$y' = x^4 - 2x + 1 \quad -16$$

$$(x+1)y' = 2(y+1) \quad -17$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} \quad -18$$

$$y\sqrt{3x^2+1}dy = x\sqrt{1-y^2}dx = 0 \quad -19$$

$$\sqrt[2]{4xy^2} \frac{dy}{dx} = 1 \quad -20$$

کاربردهای انتگرال ۵۳

۲۱- جوابی برای معادله‌ی $\frac{dy}{dt} = \sqrt{yt}$ پیدا کنید که در شرط $y(0) = 0$ صدق کند.

۲۲- جوابی برای معادله‌ی $xy' + y = y^2$ پیدا کنید که در شرط $y(1) = -1$ صدق کند.

۲۳- شیب خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در هر نقطه‌ی (x, y) واقع بر آن به صورت $\frac{2x-1}{y}$ است. اگر f مثبت و $f(0) = 2$ ، ضابطه‌ی تابع $f(x)$ را بیابید.

۲۴- یک وام یک میلیون تومانی در آخر سال در یک قسط باید پرداخت شود، اگر سود با نرخ ۱۰٪ به طور پیوسته محاسبه شده باشد، مبلغ کل پرداخت آن چقدر است؟

۲۵- اگر مبلغ ۵۰۰ هزار تومان را با سود پیوسته‌ی سالانه ۱۸٪ سرمایه‌گذاری شده باشد، پس از ۴ سال سود حاصل چقدر است؟

۲۶- هرگاه سود با نرخ سالانه‌ی ۲۰٪ به طور پیوسته محاسبه شود، پس از چه مدت دو میلیون تومان سپرده، دو برابر می‌شود؟

۲۷- اگر تابع تقاضا $y = -x^2 - x + 31$ و تابع عرضه $y = 2x + 3$ باشد مازاد مصرف کننده را بیابید.

یادداشت

فصل سوم

توابع چند متغیره

بین شعاع و مساحت دایره، وابستگی وجود دارد، $S(x) = \pi x^2$ ، اما هیچ وابستگی بین ابعاد یک مستطیل وجود ندارد، بدین معنا که با تغییر یک بعد، لزوماً بعد دیگر تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر، ابعاد مستطیل مستقل از یکدیگرند. توابع چند متغیره، روی چند متغیر مستقل مطرح می‌شوند و می‌توان مفهوم حد و مشتق را برای این توابع تعمیم داد.

۱- توابع چند متغیره

مجموعه‌ی اعداد حقیقی R ، متناظر با نقاط روی محور اعداد حقیقی و $R^2 = \{(x, y) | x, y \in R\}$ مجموعه‌ی تمام زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی متناظر با نقاط روی صفحه و $R^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in R\}$ مجموعه‌ی تمام سه تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی متناظر با نقاط در فضا است.

تابع $f: R^2 \rightarrow R$ ، یک تابع دو متغیره است و به صورت ذیل نشان داده می شود

$$z = f(x, y)$$

z متغیر وابسته و x و y متغیرهای مستقل می باشند. مساحت مستطیلی به ابعاد x و y تابعی دو متغیره از x و y است:

$$S(x, y) = xy$$

حجم مخروطی به ارتفاع h و شعاع قاعد r ، تابعی دو متغیره از r و h است:

$$V(r, h) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

مثال. توابع ذیل دو متغیره هستند:

$$z = f(x, y) = x^2 + y + 3, \quad f(1, 2) = (1)^2 + 2 + 3 = 6$$

$$z = g(x, y) = \frac{x+1}{3x}, \quad g(-2, 7) = \frac{-2+1}{-6} = \frac{-1}{-6}$$

$$z = h(x, y) = 7, \quad h(-2, 5) = 7$$

(h تابع ثابت دو متغیره است.)

تابع $f: R^3 \rightarrow R$ ، یک تابع سه متغیره است و به صورت $w = f(x, y, z)$ نشان داده می شود. w متغیر وابسته و x و y و z متغیرهای مستقل می باشند. حجم مکعب مستطیلی به ابعاد x و y و z یک تابع سه متغیره است:

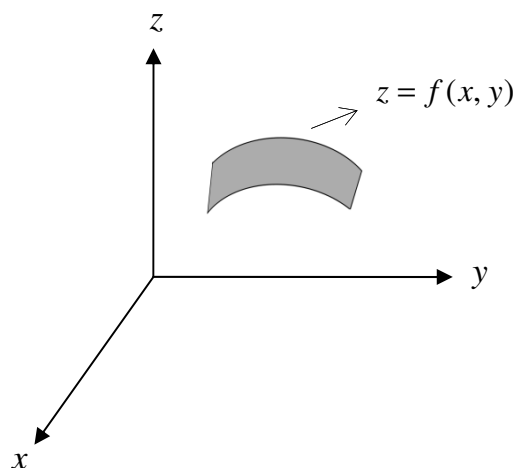
$$V(x, y, z) = xyz$$

مثال. توابع زیر سه متغیره هستند:

$$w = f(x, y, z) = x - \sin y + z^2, \quad f(0, \frac{\pi}{2}, 1) = 0 - \sin \frac{\pi}{2} + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$w = g(x, y, z) = x^2 - z^2 + 1, \quad g(2, 5, 3) = 4 - 9 + 1 = -4$$

توجه. نمودار توابع دو متغیره یک رویه (سطح) در فضا است.



مثلاً: رویه‌ی $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ یک مخروط، رویه‌ی $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ یک نیم کره و رویه‌ی $z = x + y$ یک صفحه در فضا می‌باشند.

فرض کنیم $f: R^2 \rightarrow R$ یک تابع دو متغیره باشد، دامنه‌ی تابع f بزرگترین زیر مجموعه R^2 است که f روی آن خوش تعریف است و با علامت D_f نشان داده می‌شود.

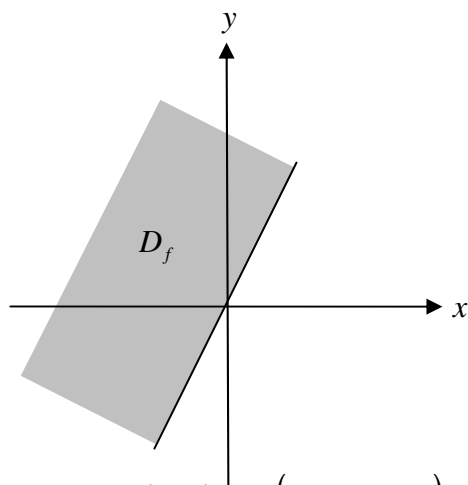
مثال. دامنه‌ی تابع $f(x, y) = \sqrt{y - 2x}$ را تعیین کنید.

حل. باید زیر رادیکال مثبت باشد:

$$D_f = \{ (x, y) \mid y - 2x \geq 0 \} = \{ (x, y) \mid 2x \leq y \}$$

$$(3, 8) \in D_f, \quad (2, 3) \notin D_f$$

در این مثال، دامنه‌ی f نیمه‌ی بالای خط $y = 2x$ است.

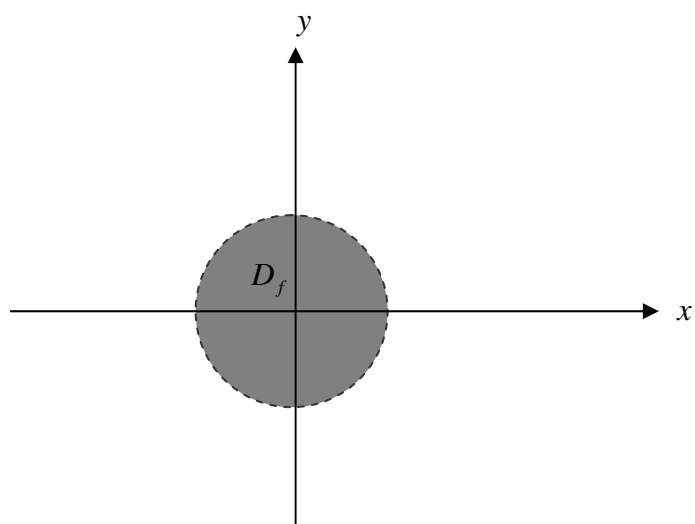


مثال. دامنه‌ی تابع $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$ را تعیین کنید.
حل.

$$D_f = \{(x, y) \mid 1 - x^2 - y^2 > 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

$$(0, 0) \in D_f, \quad (2, 1) \notin D_f$$

در این مثال، دامنه‌ی f نقاط داخل دایره $x^2 + y^2 = 1$ است.



توابع چند متغیره ۵۹

مثال. برد تابع $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ را تعیین کنید.
حل. برد f مجموعه تمام مقادیر f است.

$$R_f = \left\{ z \mid z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\} = \{ z \mid z \geq 0 \} = [0, +\infty)$$

تابع کاب-داگلاس. اگر P تولید کل، L میزان نیروی کار و K میزان سرمایه گذاری باشد، تابع مدل سازی کاب-داگلاس به صورت ذیل است:

$$P(L, K) = bL^\alpha K^{1-\alpha}, \quad L, K \geq 0$$

که در آن α ، b اعدادی مثبت هستند. مثلاً به ازای $b = 1/0.1$ ، $\alpha = 0.75$ داریم:

$$P(L, K) = 1/0.1 L^{0.75} K^{0.25}, \quad L, K \geq 0$$

در این مدل سازی به ازای $L = 147$ و $K = 208$ داریم

$$P(147, 208) = 1/0.1 (147)^{0.75} (208)^{0.25} \cong 161/9$$

۲- حد و پیوستگی

مفهوم حد، در توابع چند متغیره و یک متغیره یکسان است.

تعریف. حد تابع $f: R^2 \rightarrow R$ در نقطه $P_0(x_0, y_0)$ برابر با l است، هر گاه با نزدیک شدن نقطه‌ی متحرک (x, y) به (x_0, y_0) ، مقدار تابع به مقدار l نزدیک شود، این حد را با علامت ذیل نشان می‌دهند.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = l$$

چند نکته.

۱- حد یک تابع در صورت وجود، یکتاست.

۲- مفهوم حد، برای توابع سه متغیره به طور مشابه تعریف می‌شود.

۳- برای محاسبه حد توابع چند متغیره می‌توان از روش‌های توابع یک متغیره استفاده نمود.

چند مثال:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} x^2 - 2y = (1)^2 - 2(2) = -3$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{2x + y^2}{x - y} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{(x-y)}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} (x^2 + xy + y^2) = 12$$

مثال. حد تابع $f(x, y) = \frac{x}{y}$ را در نقطه $(0, 0)$ بررسی کنید.

حل.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y} = \frac{0}{0} \quad (\text{مبهم است}).$$

در توابع یک متغیره دیدیم که اگر حد چپ و حد راست در نقطه x_0 برابر نباشند، تابع در آن نقطه حد ندارد. با روشی مشابه، نشان می‌دهیم حد فوق در نقطه $(0, 0)$ وجود ندارد. اگر از مسیر $S_1 = \{(x, y) \mid y = x\}$ به نقطه $(0, 0)$ نزدیک شویم، به‌دست می‌آید:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{روی } S_1}} \frac{x}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

اگر از مسیر $S_2 = \{(x, y) \mid y = 3x\}$ به $(0, 0)$ نزدیک شویم، داریم:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{روی } S_2}} \frac{x}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

از اینکه روی این دو مسیر، جواب‌های متفاوت به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم حد

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y} \quad \text{وجود ندارد.}$$

توجه. مسیرها باید طوری انتخاب شوند که از نقطه P_0 عبور کنند.

مثال. نشان دهید توابع ذیل در نقطه داده شده حد ندارند.

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{الف) در نقطه } P_0(0,0)$$

$$g(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy} \quad \text{ب) در نقطه } P_0(0,0)$$

حل الف) با حدگیری روی $S_1 = \{(x, y) \mid y = 0\}$ بدست می‌آید:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{روی } S_1}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-0}{x+0} = 1$$

با حدگیری روی $S_2 = \{(x, y) \mid x = 0\}$ بدست می‌آید:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{روی } S_2}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0-y}{0+y} = -1$$

بنابراین این حد وجود ندارد.

حل ب)

$$S_1 = \{(x, y) \mid x = y\}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{روی } S_1}} g(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$S_2 = \{(x, y) \mid y = 2x\}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \text{روی } S_2}} g(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{2x^2} = \frac{5}{2}$$

بنابراین این حد وجود ندارد.

تعریف. تابع $z = f(x, y)$ را در نقطه $P_0(x_0, y_0)$ پیوسته گویند، هرگاه

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

مثال. پیوستگی تابع $f(x, y) = \frac{x^2}{y+1}$ را در نقطه $P_0(1, 2)$ بررسی کنید.

حل.

$$f(1, 2) = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{x^2}{y+1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} f(x, y) = f(1, 2) = \frac{1}{3}$$

بنابراین تابع f در نقطه $P_0(1, 2)$ پیوسته است.

توجه. از نگاه هندسی، تابع $z = f(x, y)$ روی دامنه پیوسته است، هرگاه نمودار آن همه جا متصل باشد و از نظر شهودی، پیوستگی $z = f(x, y)$ در نقطه $P_0(x_0, y_0)$ به این معنی است که با تغییر اندکی (x, y) از نقطه $P_0(x_0, y_0)$ ، $f(x, y)$ نیز اندکی تغییر کند.

۳- مشتقات جزئی

فرض کنیم $z = f(x, y)$ ، مشتق جزئی (یانسبی) تابع f نسبت به x در نقطه $P_0(x_0, y_0)$ با حد ذیل تعریف می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

اگر این حد وجود داشته باشد، نمادهای مشتق جزئی نسبت به x در نقطه P_0 به صورت ذیل است:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \quad f_x(P_0), \quad z_x(P_0)$$

مشتق جزئی f نسبت به y در نقطه P_0 به طور مشابه تعریف و با نمادهای ذیل نشان داده می‌شوند:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0), \quad f_y(P_0), \quad z_y(P_0)$$

توابع چند متغیره ۶۳

برای محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، از تابع f نسبت به x مشتق می‌گیریم و متغیر y ثابت فرض می‌شود.

همچنین برای محاسبه $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، از تابع f نسبت به y مشتق می‌گیریم و متغیر x ثابت فرض

می‌شود .

مثال. مشتقات جزئی تابع $f(x, y) = x^2 y^2 - x^2 + 3y^4$ را بیابید .

حل.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^1 y^2 - 2x + 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 y - 0 + 12y^3$$

مثال. اگر $z = \frac{x^2 - 1}{4y + 2}$ مطلوبست z_x , z_y

حل.

$$z_x = \frac{2x(4y+2) - (x^2-1) \cdot 0}{(4y+2)^2} = \frac{2x(4y+2)}{(4y+2)^2} = \frac{2x}{(4y+2)}$$

$$z_y = \frac{0(4y+2) - 4(x^2-1)}{(4y+2)^2} = \frac{-4(x^2-1)}{(4y+2)^2}$$

مثال. اگر $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$ ، f_x و f_y را بیابید.

حل.

$$f_x = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \left(\frac{1}{1+y}\right)$$

$$f_y = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \left(\frac{-x}{(1+y)^2}\right)$$

مثال. اگر $f(x, y) = e^{x^2 y}$ ، مقادیر $f_x(1, 0)$ ، $f_y(1, 0)$ را بیابید.

حل.

$$f_x = 2xye^{x^2y} \rightarrow f_x(1,0) = 2 \times 1 \times 0 \times e^{1 \times 0} = 0 \times 1 = 0$$

$$f_y = x^2e^{x^2y} \rightarrow f_y(1,0) = 1e^{1 \times 0} = 1 \times 1 = 1$$

برای محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}$ در تابع سه متغیره $w = f(x, y, z)$ ، از تابع f نسبت به x مشتق می‌گیریم و سایر متغیرها ثابت فرض می‌شوند.

مثال. مشتقات جزئی تابع $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$ را محاسبه کنید.

حل.

$$f_x = 2xy^3z^4$$

$$f_y = 3x^2y^2z^4$$

$$f_z = 4x^2y^3z^3$$

در توابع یک متغیره، با مشتق‌گیری از $f'(x)$ مشتق مرتبه‌ی دوم یعنی $f''(x)$ به‌دست می‌آید.

به‌طور مشابه، با مشتق‌گیری از $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم تابع $z = f(x, y)$

حاصل می‌شوند.

چهار مشتق جزئی مرتبه‌ی دوم تابع $z = f(x, y)$ به صورت ذیل است:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv \text{نسبت به } x \text{ مشتق می‌گیریم}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv \text{نسبت به } y \text{ مشتق می‌گیریم}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv \text{نسبت به } x \text{ مشتق می‌گیریم}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv \text{نسبت به } y \text{ مشتق می‌گیریم}$$

توابع چند متغیره ۶۵

مثال. اگر $f(x, y) = x^2 + x^2 y^2 + y^2$ ، تمام مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم را بیابید.
حل.

$$f_x = 2x^2 + 2xy^2, \quad f_y = 2x^2 y + 2y$$

$$f_{xx} = (f_x)_x = 4x + 2y^2$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = 2x^2 + 2$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = 4xy$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = 4xy$$

در این مثال، $f_{xy} = f_{yx}$ ، این تساوی به‌طور اتفاقی نیست، در واقع تحت شرایط مناسب (پیوستگی مشتقات جزئی) این تساوی برقرار است. (در این کتاب این شرایط همواره برقرار هستند.)

مثال. تمام مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم تابع $f(x, y) = x^2 y^4 + 5y \sin x$ را به‌دست آورید:

حل. برای تعیین مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم، ابتدا باید مشتقات مرتبه‌ی اول را محاسبه کرد.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4 + 5y \cos x \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2 y^3 + 5 \sin x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^4 - 5y \sin x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x^2 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy^3 + 5 \cos x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy^3 + 5 \cos x$$

مثال. اگر $f(x, y) = x^4 y^2$ ، $f(x, y)$ ، $(1, 2)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ را بیابید.

حل.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^4 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8x^3 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 2) = 16$$

مثال. در تابع $z = \sqrt{x^2 + y}$ ، مقدار $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1, 3)$ را بیابید.

حل.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y}} \cdot x}{(\sqrt{x^2 + y})^2} = \frac{-x}{2\sqrt{x^2 + y} \cdot (x^2 + y)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1, 3) = \frac{-1}{2\sqrt{4}} = \frac{-1}{4}$$

مشتقات جزئی مرتبه‌ی سوم و بالاتر به طور مشابه محاسبه می‌شوند.

مثال. اگر $f = x^4 y^5 + x^3 y$ ، مشتقات جزئی مرتبه سوم $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ را محاسبه کنید.

حل.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 y^5 + 3x^2 y$$

توابع چند متغیره ۶۷

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 y^5 + 6xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x^2} = 60x^2 y^4 + 6x$$

۴- دیفرانسیل کل

اگر $z = f(x, y)$ ، با فرض وجود f_x و f_y ، دیفرانسیل کل تابع f به صورت ذیل است:

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

همچنین اگر $w = f(x, y, z)$ ، دیفرانسیل کل f برابر است با:

$$dw = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

مثال. در تابع $z = x^4 y + y^3$ ، dz را به دست آورید:

حل.

$$dz = (4x^3 y)dx + (x^4 + 3y^2)dy$$

مثال. در تابع $f(x, y) = x^3 - y^2 x$ ، مقدار df را در نقطه‌ی $P_0(2, 3)$ به ازای $\Delta x = 0.1$ و $\Delta y = 0.2$ محاسبه کنید.

حل.

$$dx = \Delta x = 0.1 \text{ و } dy = \Delta y = 0.2$$

$$df = (3x^2 - y^2)dx + (0 - 2xy)dy$$

به ازای $x = 2$ و $y = 3$ به دست می‌آید:

$$df = (12 - 9)(0.1) + (0 - 12)(0.2) = -2.1$$

توجه. $\Delta x = x - x_0$ و $\Delta y = y - y_0$.

اگر $z = f(x, y)$ ، از تقریب $\Delta z \cong dz$ می‌توان تقریبی برای $f(x, y)$ در اطراف نقطه $P_0(x_0, y_0)$ به دست آورد:

$$f(x, y) \cong f(P_0) + f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy$$

مثال. اگر $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ ، مقدار تقریبی $f(1/95, 1/108)$ را بیابید.

حل. قرار می دهیم $P_0(2, 1)$ و $dx = \Delta x = -0/05$ و $dy = \Delta y = 0/08$

$$f_x = \frac{-2x}{2\sqrt{20 - x^2 - 7y^2}}, \quad f_x(P_0) = \frac{-2}{3}$$

$$f_y = \frac{-14y}{2\sqrt{20 - x^2 - 7y^2}}, \quad f_y(P_0) = \frac{-7}{3}$$

$$f(1/95, 1/108) \cong f(P_0) + f_x(P_0)\Delta x + f_y(P_0)\Delta y$$

$$f(1/95, 1/108) \cong 3 + \left(\frac{-2}{3}\right)(-0/05) + \left(\frac{-7}{3}\right)(0/08)$$

$$f(1/95, 1/108) \cong 2/846$$

۵- قاعده زنجیری

فرض کنیم $z = f(x, y)$ باشد و $x = x(r, s)$ و $y = y(r, s)$ دو تابع دو متغیره از r, s باشند، در این صورت z تابعی از r و s است و داریم

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

مثال. اگر $z = -x^2 y^3$ و $x = 4r + s$ و $y = s^2 + r^3$ را محاسبه کنید.

حل.

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = (-2xy^3)(4) + (-3x^2y^2)(3r^2)$$

توابع چند متغیره ۶۹

مثال. اگر $z = f(x^2 - y, y^2 x^2)$ ، $\frac{\partial z}{\partial x}$ را به دست آورید.

حل. قرار می دهیم:

$$v = y^2 x^2 \quad \text{و} \quad u = x^2 - y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot (2x^2) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot (2xy^2)$$

توجه. اگر $z = f(x, y)$ و $x = x(t)$ و $y = y(t)$ ، آنگاه z تابعی از t است و داریم:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

مثال. اگر $z = \frac{x^2 - y}{y + 1}$ و $x = t^2$ و $y = 4t$ ، مشتق z نسبت به t را در نقطه

$t = 1$ بیابید.

حل.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x(y+1)}{(y+1)^2} (2t) + \frac{-1(y+1) - (x^2 - y)}{(y+1)^2} (4)$$

به ازای $t = 1$ به دست می آید: $x = 1$ و $y = 4$ ، بنابراین:

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=1} = \frac{2 \times 5}{5^2} (2) + \frac{-5 - (-3)}{5^2} (4) = \frac{20}{25} + \frac{-8}{25} = \frac{12}{25}$$

مثال. اگر $z = f(2x + y) + g(3x - 4y)$ و $f'(4) = 5$ و $g'(-5) = 2$

، $\frac{\partial z}{\partial x}$ را در نقطه $P_0(1, 2)$ بیابید.

حل. قرار می دهیم:

$$v = 3x - 4y \quad \text{و} \quad u = 2x + y$$

پس:

$$z = f(u) + g(v)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} + g'(v) \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= 2f'(u) + 3g'(v) \\ \frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) &= 2f'(4) + 3g'(-5) = 10 + 6 = 16\end{aligned}$$

مشتق تابع ضمنی

معادله‌ی $f(x, y, z) = 0$ یک تابع ضمنی است که در آن x و y را متغیر مستقل و z را متغیر وابسته در نظر می‌گیریم. مثلاً معادله‌ی $x^2y - z^3 - 2yz + 1 = 0$ یک تابع ضمنی است. اگر $f(x, y, z) = 0$ یک تابع ضمنی باشد، مشتقات جزئی به صورت ذیل به‌دست می‌آیند.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z}$$

مثال. $\frac{\partial z}{\partial y}$ را در معادله $xz^3 - y^2x - z^3 + 4 = 0$ بیابید.

حل. قرار می‌دهیم $f = xz^3 - y^2x - z^3 + 4 = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} = \frac{-(-2yx)}{3xz^3 - 3z^3}$$

مثال. اگر $1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25}$ و y تابعی از x و z باشد، $\frac{\partial y}{\partial x}$ را بیابید.

حل.

$$f = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{\frac{2x}{4}}{\frac{2y}{9}} = -\frac{9x}{4y}$$

مثال. در معادله $x^3 - z^4y = 2xy - z^2 + 5$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0, 2)$ را حساب کنید.

حل.

$$f = x^3 - z^4 y - 2xy + z^2 - 5 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = \frac{-(3x^2 - 2y)}{-4z^3 y + 2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0, 2) = \frac{-3}{4}$$

۶- چند مثال کاربردی

تولید نهایی

فرض کنیم $Q = f(x, y)$ تابع تولید با دو عامل x و y باشد، آنگاه $\frac{\partial Q}{\partial x}$ برابر با تولید

نهایی نسبت به x و $\frac{\partial Q}{\partial y}$ برابر با تولید نهایی نسبت به y است. اگر y ثابت و x یک واحد

افزایش یابد، $\frac{\partial Q}{\partial x}$ میزان تغییر تولید را نشان می‌دهد.

مثال. اگر $Q = 2x^4 y^3$ تابع تولید باشد، تولید نهایی را نسبت به عوامل x و y بیابید.

حل.

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 6x^4 y^2 \quad \text{و} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 8x^3 y^3$$

تابع کاب-داگلاس مثالی از تابع تولید است.

(مراجعه شود به قسمت توابع چند متغیره همین فصل)

هزینه نهایی

فرض کنیم $C = f(x, y)$ هزینه مشترک دو کالا به مقادیر x و y باشد، آنگاه $\frac{\partial C}{\partial x}$ برابر با

هزینه نهایی نسبت به x و $\frac{\partial C}{\partial y}$ برابر با هزینه نهایی نسبت به y است.

۷۲ فصل سوم

مثال. اگر هزینه مشترک دو کالا با تابع $C = 4x^2 + y^2 + 5xy$ داده شده باشد، هزینه نهایی را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial x} &= 8x + 5y & \text{هزینه نهایی نسبت به } x : \\ \frac{\partial C}{\partial y} &= 2y + 5x & \text{هزینه نهایی نسبت به } y : \end{aligned}$$

مثال. اگر $C(x, y) = 700 + 70x^2 + 100y$ ، هزینه مشترک x لباس شویی و y ظرف شویی باشد، هزینه نهایی نسبت به x را در سطح تولید 20 لباس شویی و 15 ظرف شویی را بیابید.

حل.

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 140x, \quad \frac{\partial C}{\partial x}(20, 15) = 2800$$

یعنی هزینه تولید بیست و یکمین لباس شویی در این سطح تولید 2800 واحد پول است.

تقاضای نهایی

فرض کنیم تقاضای دو کالای α و β به ترتیب x و y و قیمت متناظر با این دو کالا p و q و $x = f(p, q)$ و $y = g(p, q)$ ، توابع تقاضا باشند، آنگاه

$$\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial x}{\partial q} \quad \text{تقاضای نهایی} \quad \text{و} \quad \frac{\partial y}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial q} \quad \text{تقاضای نهایی متقابل است.}$$

مثال. اگر $x = 200 - 4p + 4q$ و $y = 300 + 2p - 4q$ توابع تقاضا باشند، تقاضای نهایی و متقابل را بدست آورید.

حل.

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial p} = -4 \\ \frac{\partial y}{\partial q} = -4 \end{cases} \quad \text{تقاضای نهایی}$$

توابع چند متغیره ۷۳

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial q} = ۴ \\ \frac{\partial y}{\partial p} = ۲ \end{cases} \quad \text{تقاضای نهایی متقابل}$$

کشش تقاضا

اگر $y = f(x)$ ، بنا به تعریف، کشش نقطه y نسبت به x به صورت ذیل است:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

فرض کنیم $x = f(p, q)$ و $y = g(p, q)$ توابع تقاضا باشند، با توجه به رابطه‌ی قبل چهار کشش داریم:

$$\begin{cases} \frac{E_x}{E_p} = \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{p}{x} \\ \frac{E_y}{E_q} = \frac{\partial y}{\partial q} \cdot \frac{q}{y} \end{cases} \quad \text{کشش های تقاضا}$$

$$\begin{cases} \frac{E_x}{E_q} = \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{q}{x} \\ \frac{E_y}{E_p} = \frac{\partial y}{\partial p} \cdot \frac{p}{y} \end{cases} \quad \text{کشش های نهایی}$$

مثال. اگر توابع تقاضا مانند مثال قبل باشند، کشش‌های تقاضا را بیابید.

حل.

$$y = ۳۰۰ + ۲p - ۴q \quad \text{و} \quad x = ۲۰۰ - ۴p + ۴q$$

$$\begin{cases} \frac{E_x}{E_p} = \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{p}{x} = (-۴) \frac{p}{۲۰۰ - ۴p + ۴q} \\ \frac{E_y}{E_q} = \frac{\partial y}{\partial q} \cdot \frac{q}{y} = (-۴) \frac{q}{۳۰۰ + ۲p - ۴q} \end{cases} \quad \text{کشش های تقاضا}$$

۷-تمرین

۱- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} \text{الف) } f(x, y) &= \frac{x+y}{x} & \text{ب) } g(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \\ \text{ج) } f(x, y) &= \ln(3x - y + 1) & \text{د) } g(x, y, z) &= \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} \end{aligned}$$

۲- دامنه‌ی تابع $f(x, y) = \sqrt{\ln(x^2 + y^2)}$ را تعیین کنید.

۳- نشان دهید در تابع کاب-داگلاس

$$P(L, K) = bL^\alpha K^{1-\alpha}, \quad L, K \geq 0$$

هرگاه K (نیروی کار) و L (مقدار سرمایه گذاری) m برابر شوند، P (تولید) نیز m برابر می‌شود.

۴- حد توابع زیر را در نقطه داده شده تعیین کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف) } f(x, y) &= \frac{x^2 - y}{x^3}, & P_0(1, 2) \\ \text{ب) } f(x, y) &= y^2 e^x, & P_0(0, 2) \\ \text{ج) } f(x, y) &= \frac{x+y}{x^3 + y^3}, & P_0(1, -1) \end{aligned}$$

۵- حد تابع $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ را در نقطه $(0, 0)$ و در امتداد خط $y = \frac{x}{2}$ بیابید.۶- اگر بدانیم $f(x, y) = \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$ در نقطه $(0, 0)$ حد دارد، حد آن را بیابید.

۷- نشان دهید حدود زیر وجود ندارند.

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \quad \text{ب) } \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{x-1}{y-2} \\ \text{ج) } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \quad \text{د) } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^4 y}{x^4 + y^2} \end{aligned}$$

۸- در توابع زیر $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را بیابید.

الف) $f(x, y) = x^4 y - x^2$ ب) $f(x, y) = \frac{y^3}{x}$

ج) $f(x, y) = \ln(x^3) y^3$ د) $f(x, y) = x^3 \sin(2x + y)$

۹- اگر $f = \frac{2x - 3z}{4y + 7}$ ، مطلوبست f_z, f_y, f_x

۱۰- اگر $f = e^{4x^3 y}$ ، مقدار $f_x(1, 2)$ را محاسبه کنید.

۱۱- اگر $f(u, v) = (2u + 3v)^5$ ، $\frac{\partial f}{\partial u}$ را بیابید.

۱۲- تمام مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم تابع $z = x^3 y + x^2 y^4$ را بیابید.

۱۳- اگر $f = \frac{x + y}{1 - y^2}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ را بیابید.

۱۴- اگر $z = x^5 y^3 + x$ ، $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$ را بیابید.

۱۵- اگر $f = \ln(3x + 4y)$ ، مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$f_{xx}(2, 1)$ ، $f_{xy}(2, 1)$

۱۶- اگر $z = \ln(e^x + e^y)$ ، نشان دهید $z_x + z_y = 1$

۱۷- اگر $z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ ، حاصل عبارت $z_{xx} + z_{yy}$ را بیابید.

۱۸- اگر $z = xe^y + ye^x$ ، با محاسبه نشان دهید $z_{xx} + z_{yy} = z$

۱۹- در تابع $z = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ ، نشان دهید $xz_x + yz_y = z$

۲۰- دیفرانسیل کل تابع $z = x^3 e^{xy^2}$ را به دست آورید.

۲۱- دیفرانسیل کل تابع $z = \frac{x - 2y}{x + y}$ را در نقطه $(1, 2)$ به ازای $\Delta x = 0.05$ و

$\Delta y = 0.01$ محاسبه کنید.

۲۲- دیفرانسیل کل $z = x^2 y^3 - \frac{x}{y}$ را به ازای $x = 1$ و $y = -1$ بیابید.

۲۳- مقدار تقریبی $\sqrt{(6/01)^2 + (7/98)^2}$ را بیابید.

راهنمایی: قرار دهید $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

۲۴- فرض کنید $z = x^3 - y^2 + xy$ ، $x = 3r + 4s$ و $y = 2r + s^2$ ، مشتقات جزئی $\frac{\partial z}{\partial s}$ و $\frac{\partial z}{\partial r}$ را بیابید.

۲۵- فرض کنید $z = \ln(x^2 + 2y)$ ، $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ ، مشتقات مرکب $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ و $\frac{\partial z}{\partial r}$ را بیابید.

۲۶- اگر $z = \sqrt{x^2 + y^3}$ ، $x = r^2 + s$ و $y = \frac{1}{s}$ ، مقدار $\frac{\partial z}{\partial s}$ را در نقطه $r = 1$ و $s = 2$ بیابید.

۲۷- اگر $z = \sin(x^2 + y)$ ، $x = \frac{1}{t}$ و $y = 4t$ ، $\frac{dz}{dt}$ را بدست آورید.

۲۸- اگر $w = e^{xy^2z}$ ، $x = 2t + 1$ ، $y = t^2$ و $z = t^3$ ، مشتق w نسبت به t را در نقطه $t = 1$ بدست آورید.

۲۹- اگر $z = f(u, v)$ ، $u = \frac{x}{y}$ ، $v = \frac{y}{x}$ و $f_u\left(2, \frac{1}{2}\right) = 4$ و $f_v\left(2, \frac{1}{2}\right) = 5$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ را در نقطه $x = 2$ و $y = 1$ بیابید.

۳۰- اگر $z = f(x^2 + y^2, x)$ و $f'(0) = 4$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ را در نقطه $P_0(1, -1)$ بیابید.

۳۱- در معادله $z^3 y = x^2 z - 2yz + 4$ ، $\frac{\partial z}{\partial x}$ را بیابید.

۳۲- در معادله $x^3 + y^3 + z^3 = 1 - 6xyz$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ را بیابید.

توابع چند متغیره ۷۷

۳۳- در رابطه $e^{xz-y} + x^2z - xy^3 = 34$ ، مقدار $\frac{\partial z}{\partial y}(-3, 2, 1)$ را حساب کنید.

۳۴- در معادله کُره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، با استفاده از مشتق ضمنی نشان دهید:

$$(z_x)^2 + (z_y)^2 + 1 = \frac{1}{z^2}$$

۳۵- اگر داشته باشیم:
$$\begin{cases} u^2 + v^2 - x^2 - y^2 = 0 \\ u^2 - v^2 + xy - x + y = 0 \end{cases}$$
 آنگاه $\frac{\partial u}{\partial x}$ را بیابید.

راهنمایی: پس از حذف متغیر v از مشتق ضمنی استفاده کنید.

یادداشت

فصل چهارم

اکسترمم‌های توابع دو متغیره

یافتن ابعاد مکعب مستطیلی با حجم معلوم و سطح می‌نیمم، و یا تعیین مقدار دو عامل تولید که بیشترین سود را داشته باشند و مسائلی نظیر این، به تعیین نقاط اکسترمم توابع دو متغیره می‌انجامد.

۱- تعریف اکسترمم‌ها

مفهوم اکسترمم‌های مطلق و نسبی در توابع دو متغیره همانند توابع یک متغیره می‌باشد. تابع $z = f(x, y)$ مفروض است، اگر به ازای هر $(x, y) \in D_f$ ، $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ ، (x_0, y_0) در نقطه‌ی $z = f(x, y)$ دارای "ماکسیمم مطلق" است، به عبارت دیگر، $f(x_0, y_0)$ بیشترین مقدار تابع f روی دامنه می‌باشد. به طور مشابه، هرگاه $f(x_0, y_0)$ کمترین مقدار تابع f روی دامنه باشد، تابع $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی $P_0(x_0, y_0)$ دارای "می‌نیمم مطلق" است.

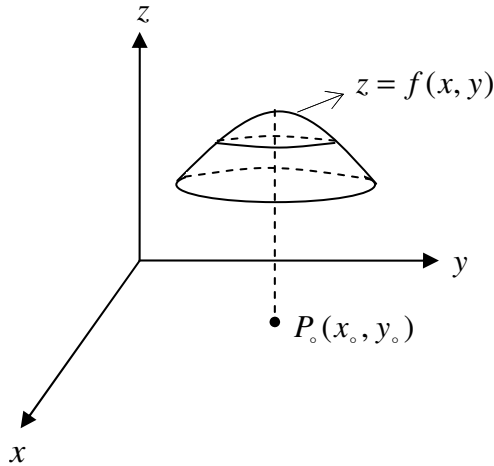
مثال.

تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ در نقطه‌ی $(0, 0)$ می‌نیمم مطلق دارد.

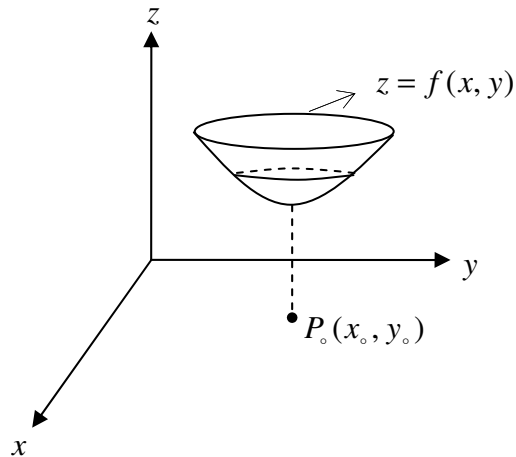
تابع $g(x, y) = 1 - x^2 - y^4$ در نقطه‌ی $(0, 0)$ ماکسیمم مطلق دارد.

۸۰ فصل چهارم

تعریف. هرگاه در اطراف نقطه‌ی P_0 ، $f(P_0)$ بیشترین مقدار را داشته باشد. گوییم تابع $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی $P_0(x_0, y_0)$ "ماکسیم نسبی" دارد. از دید هندسی، رویه‌ی f در P_0 نقطه‌ی قله دارد.



به طور مشابه، هرگاه در اطراف نقطه‌ی P_0 ، $f(P_0)$ کمترین مقدار را داشته باشد. گوییم تابع $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی $P_0(x_0, y_0)$ "مینیم نسبی" دارد. از نگاه هندسی، رویه‌ی f در P_0 نقطه‌ی گودی دارد.



تعریف. $P_0(x_0, y_0)$ را یک نقطه‌ی بحرانی تابع $z = f(x, y)$ گوئیم، هرگاه در P_0 مشتقات جزئی برابر با صفر باشند.

$$\begin{cases} f_x(P_0) = 0 \\ f_y(P_0) = 0 \end{cases}$$

رابطه بین نقاط اکسترمم نسبی و بحرانی در قضیه ذیل آمده است:

قضیه. اگر $P_0(x_0, y_0)$ یک نقطه اکسترمم نسبی تابع $z = f(x, y)$ باشد، آنگاه P_0 یک نقطه‌ی بحرانی f است.

بنا به قضیه بالا، هر نقطه اکسترمم نسبی، یک نقطه بحرانی است، ولی عکس این قضیه برقرار نیست. یعنی ممکن است $P_0(x_0, y_0)$ نقطه‌ی بحرانی باشد ولی اکسترمم نسبی نباشد. در این حالت $P_0(x_0, y_0)$ را یک "نقطه زینی" تابع $z = f(x, y)$ می نامند. از نگاه هندسی، نقطه‌ی مرکزی یک زین اسب، نقطه زینی است.

مثال. نقاط بحرانی توابع ذیل را بیابید:

الف) $f(x, y) = 2x^2 - 4y^2 + 2x - y$ ب) $f(x, y) = e^{xy}$

حل الف) برای تعیین نقاط بحرانی f ، باید دستگاه ذیل را حل کنیم:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x = 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ f_y = -8y - 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$P_0(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$ نقطه‌ی بحرانی تابع f است.

حل ب)

$$\begin{cases} f_x = ye^{xy} = 0 \Rightarrow y = 0 \\ f_y = xe^{xy} = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$P_0(0, 0)$ نقطه‌ی بحرانی تابع f است.

توجه. بنا به مطالب این قسمت، نقطه‌ی بحرانی تابع $z = f(x, y)$ یکی از سه مورد ماکسیمم نسبی، مینیمم نسبی و یا نقطه‌ی زینی می باشد.

۲- تعیین اکسترمم‌های نسبی

آزمون تعیین نوع یک نقطه‌ی بحرانی

فرض کنیم $z = f(x, y)$ و $P_0(x_0, y_0)$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد، قرار می‌دهیم:

$$D_{P_0} = f_{xx}(P_0) \cdot f_{yy}(P_0) - (f_{xy}(P_0))^2$$

(الف) اگر $D_{P_0} > 0$ و $f_{xx}(P_0) > 0$ ، آنگاه f در P_0 می‌نیمم نسبی دارد.

(ب) اگر $D_{P_0} > 0$ و $f_{xx}(P_0) < 0$ ، آنگاه f در P_0 ماکسیمم نسبی دارد.

(ج) اگر $D_{P_0} < 0$ ، آنگاه f در P_0 نقطه‌ی زینی دارد.

(د) اگر $D_{P_0} = 0$ ، از این آزمون نمی‌توان استفاده کرد.

مثال. نوع نقاط بحرانی توابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 - 2x + 4y + 7 \quad (\text{الف})$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3x \quad (\text{ب})$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 6x^2 + y - 1 \quad (\text{ج})$$

حل الف) نقاط بحرانی را تعیین و سپس از آزمون استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} f_x = -2x - 2 = 0 & \Rightarrow x = -1 \\ f_y = -2y + 4 = 0 & \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

$P_0(-1, 2)$ نقطه‌ی بحرانی f است.

$$f_{xx} = -2 \Rightarrow f_{xx}(P_0) = -2$$

$$f_{yy} = -2 \Rightarrow f_{yy}(P_0) = -2$$

$$f_{xy} = 0 \Rightarrow f_{xy}(P_0) = 0$$

$$D_{P_0} = f_{xx}(P_0) \cdot f_{yy}(P_0) - (f_{xy}(P_0))^2 = (-2) \times (-2) - (0)^2 > 0$$

$D_{P_0} > 0$ و $f_{xx}(P_0) < 0$ ، بنا به آزمون، f در $P_0(-1, 2)$ ماکسیمم نسبی دارد.

حل ب)

$$\begin{cases} f_x = 2x + y - 3 = 0 \\ f_y = 2y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

اکسترمم‌های توابع دو متغیره ۸۳

از حل دستگاه به دست می‌آید: $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ پس، $P_0(2, -1)$ نقطه‌ی بحرانی f است.

$$f_{xx}=2, \quad f_{yy}=2, \quad f_{xy}=1$$

$$D_{P_0} = f_{xx}(P_0) \cdot f_{yy}(P_0) - (f_{xy}(P_0))^2$$

$$D_{P_0} = (2)(2) - (1)^2 = 3 > 0$$

بنابراین f در $P_0(2, -1)$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی دارد.

حل ج)

$$\begin{cases} g_x = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases} \\ g_y = 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

g دو نقطه‌ی بحرانی $P_1(0, -\frac{1}{2})$ و $P_2(4, -\frac{1}{2})$ دارد.

تعیین نوع نقطه‌ی بحرانی $P_1(0, -\frac{1}{2})$

$$g_{xx} = 6x - 12 \Rightarrow g_{xx}(P_1) = -12$$

$$g_{yy} = 2 \Rightarrow g_{yy}(P_1) = 2$$

$$g_{xy} = 0 \Rightarrow g_{xy}(P_1) = 0$$

$$D_{P_1} = g_{xx}(P_1) \cdot g_{yy}(P_1) - (g_{xy}(P_1))^2$$

$$= (-12)(2) - (0)^2 = -24 < 0$$

$D_{P_1} < 0$ ، بنا به آزمون، g در $P_1(0, -\frac{1}{2})$ نقطه‌ی زینی دارد.

تعیین نوع نقطه‌ی بحرانی $P_2(4, -\frac{1}{2})$

$$g_{xx}(P_2) = 12$$

$$g_{yy}(P_2) = 2$$

$$g_{xy}(P_2) = 0$$

$$D_{P_r} = g_{xx}(P_r) \cdot g_{yy}(P_r) - (g_{xy}(P_r))^2 = (12)(2) - (0)^2 = 24 > 0$$

$D_{P_r} > 0$ و $g_{xx}(P_r) > 0$ بنا به آزمون، g در $P_r(4, \frac{-1}{4})$ می‌نیمم نسبی دارد.

مثال. سه عدد مثبت بیابید که جمع آنها ۲۷ و حاصل ضرب آنها ماکسیمم باشد.

حل. اگر این سه عدد x, y, z باشند، باید $x + y + z = 27$ و تابع $f = xyz$ ماکسیمم

شود.

از تساوی اول به دست می‌آید :

$$z = 27 - x - y$$

پس:

$$f(x, y) = xy(27 - x - y) = 27xy - x^2y - xy^2$$

$$\begin{cases} f_x = 27y - 2xy - y^2 = 0 \\ f_y = 27x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(27 - 2x - y) = 0 \\ x(27 - x - 2y) = 0 \end{cases}$$

از آنجا که حاصل ضرب xyz باید ماکسیمم شود، لذا x, y, z باید مخالف صفر باشند.

$$\begin{cases} 27 - 2x - y = 0 \\ 27 - 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 9 \end{cases}$$

از تساوی $z = 27 - x - y$ به دست می‌آید: $z = 9$

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 9 \\ z = 9 \end{cases} \quad \text{بنابراین: سه عدد مورد نظر هستند.}$$

مثال. می‌خواهیم جعبه‌ای سر باز را با 12 cm^2 مقوا بسازیم، ابعاد جعبه را طوری بیابید که

حجم جعبه ماکسیمم شود.

حل. اگر x و y ابعاد کف و z ارتفاع جعبه باشد، حجم جعبه برابر است با:

$$V = xyz$$

و مساحت پنج وجه جعبه برابر است با:

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

اکسترمم‌های توابع دو متغیره ۸۵

از معادله‌ی اخیر به دست می‌آید: $z = \frac{12 - xy}{2(x + y)}$ و با جای گذاری داریم:

$$V(x, y) = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

تابع $V(x, y)$ نسبت به x و y متقارن است، پس در نقاط بحرانی تابع V باید داشته باشیم $x = y$ ، بنابراین:

$$V(x) = \frac{12x^2 - x^4}{4x} = 3x - \frac{x^3}{4}$$

$$V'(x) = 3 - \frac{3x^2}{4} = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{پس ابعاد جعبه برابر است با:}$$

(یک روش دیگر این است که مشتقات جزئی تابع $V(x, y)$ را برابر با صفر قرار دهیم.)

۳- چند مثال کاربردی

سود بنگاه تولیدی

فرض کنیم $z = f(x, y)$ یک تابع تولید در یک بنگاه و x, y عوامل مستقل تولید (مانند مواد اولیه یا تعداد کارگر و یا مقدار زمین موجود و...) و z مقدار محصول خروجی باشد. اگر قیمت عوامل x, y به ترتیب q_1 و q_2 و قیمت محصول خروجی q_3 باشد، سود بنگاه برابر است با:

$$P = TR - TC$$

$$P = q_3 z - (q_1 x + q_2 y)$$

$$P = q_3 f(x, y) - (q_1 x + q_2 y)$$

مثال. تابع تولید بنگاهی $z = 8 - x^2 - 2y^2 + 4xy$ می باشد که در آن x و y عوامل تولید و $q_1 = 2$ و $q_2 = 4$ به ترتیب قیمت این عوامل و $q_3 = 8$ قیمت محصول است، چه ترکیبی از عوامل را به کار ببریم تا سود بنگاه ماکسیمم شود.

حل.

$$P = TR - TC$$

$$P = q_3 f(x, y) - (q_1 x + q_2 y)$$

$$P(x, y) = 8(8 - x^2 - 2y^2 + 4xy) - (2x + 4y)$$

$$P(x, y) = 64 - 8x^2 - 16y^2 + 32xy - 2x - 4y$$

نقاط بحرانی P را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} P_x = -16x + 32y - 2 = 0 \\ P_y = -32y + 32x - 4 = 0 \end{cases}$$

از حل دستگاه به دست می آید:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{8} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$P\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right) = \frac{505}{8}$$

با این ترکیب، سود ماکسیمم برابر است با:

سود انحصارگر

در وضعیت انحصاری، انحصارگر قیمت را از راه تنظیم عرضه کالا کنترل می کند. هرگاه عرضه محدود و کم باشد، قیمت افزایش می یابد و زمانی که عرضه افزایش یابد، قیمت کاهش می یابد. انحصارگری دو نوع کالا α و β را تولید می کند. فرض کنیم تقاضا برای دو کالا به ترتیب x و y و قیمت های متناظر برای این دو کالا p و q و توابع تقاضا به صورت ذیل باشند:

$$\begin{cases} x = f(p, q) \\ y = g(p, q) \end{cases}$$

اگر تابع هزینه کل $TC = h(x, y)$ باشد، سود کل به صورت ذیل است:

$$P = TR - TC$$

$$P = TR - TC = px + qy - h(x, y)$$

اکسترمم‌های توابع دو متغیره ۸۷

مثال. فرض کنیم $\begin{cases} x = 5 + p - q \\ y = 10 - 3p + q \end{cases}$ توابع تقاضا برای دو کالا و تابع هزینه $TC = x + y + 10$ باشد، مقدار p و q را طوری تعیین کنید که سود انحصارگر ماکسیمم شود.

حل.

$$f = TR - TC = \text{سود کل}$$

$$f(p, q) = px + qy - (x + y + 10)$$

$$f(p, q) = p(5 + p - q) + q(10 - 3p + q) - (5 + p - q) - (10 - 3p + q) - 10$$

$$f(p, q) = p^2 + q^2 - 4pq + 7p + 10q - 25$$

نقاط بحرانی $f(p, q)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f_p = 2p - 4q + 7 = 0 \\ f_q = 2q - 4p + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = \frac{9}{2} \\ q = 4 \end{cases} \quad \text{از حل دستگاه به دست می‌آید:}$$

به ازای $p = \frac{9}{2}$ و $q = 4$ سود ماکسیمم می‌شود و مقدار سود ماکسیمم برابر است با:

$$f\left(\frac{9}{2}, 4\right)$$

۴- اکسترمم‌های مقید

تعیین اکسترمم‌های تابع $z = f(x, y)$ تحت شرط $g(x, y) = 0$ ، "اکسترمم‌های مقید(مشرط)" نامیده می‌شود. یک روش تعیین اکسترمم‌های مقید، حذف یکی از متغیرهاست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال. می‌نیمم تابع $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$ را تحت شرط $x + y = 1$ بیابید.

حل.

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$$

$$f(x) = x^2 + (1 - x)^2 + 4 = 2x^2 - 2x + 5$$

$$f'(x) = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

تابع f در $x = \frac{1}{2}$ می‌نیمم دارد و $f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{2}$ ، بنابراین کمترین مقدار تابع f تحت شرط $x + y = 1$ برابر با $\frac{9}{2}$ است.

یافتن اکسترمم‌های مقید از این روش ساده است، ولی حذف یک مجهول همواره امکان پذیر نیست. لذا از روشی که ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی، ژوزف لویی لاگرانژ ابداع کرد، استفاده می‌کنیم.

روش ضریب لاگرانژ

می‌خواهیم اکسترمم تابع $z = f(x, y)$ را تحت شرط $g(x, y) = 0$ بیابیم. می‌توان ثابت کرد که این نقاط اکسترمم در بین نقاط بحرانی تابع ذیل است:

$$H(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

H را "تابع لاگرانژ" و λ را "ضریب لاگرانژ" می‌نامند. برای تعیین نقاط بحرانی H ، باید مشتقات جزئی H را برابر صفر قرار دهیم. با محاسبه مشخص می‌شود، برای یافتن اکسترمم تابع $z = f(x, y)$ تحت شرط $g(x, y) = 0$ ، باید دستگاه ذیل را حل کنیم:

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

مثال. می‌نیمم تابع $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$ را تحت شرط $x + y = 1$ بیابید. حل. داریم:

$$g(x, y) = x + y - 1 = 0 \quad \text{و} \quad f = x^2 + y^2 + 4$$

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \cdot 1 \\ 2y = \lambda \cdot 1 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

از دو رابطه بالا به دست می‌آید:

$$x = y \quad \text{یا} \quad 2x = 2y$$

از معادله‌ی آخر به‌دست می‌آید:

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2} \quad \text{و} \quad x = y = \frac{1}{2}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع f تحت شرط $x + y = 1$ ، برابر با $\frac{9}{2}$ است.

مثال. نقاط بحرانی تابع $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$ را بر روی خط $2x + 3y = 4$ بیابید.
حل.

$$g = 2x + 3y - 4 = 0 \quad \text{و} \quad f = 2x^2 + 4y^2$$

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2\lambda \\ 8y = 3\lambda \\ 2x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

از حذف λ از دو رابطه بالا، $y = \frac{3}{4}x$ و با استفاده از معادله‌ی آخر:

$$\begin{cases} x = \frac{16}{17} \\ y = \frac{12}{17} \end{cases}$$

نقطه‌ی بحرانی $P_0\left(\frac{16}{17}, \frac{12}{17}\right)$ روی خط $2x + 3y = 4$ است.

مثال. نقاط بحرانی تابع $f = 12 - x^2 - y^2$ را تحت قید $x^2 + y^2 - 4y = 0$ بیابید.
حل.

$$g = x^2 + y^2 - 4y = 0 \quad \text{و} \quad f = 12 - x^2 - y^2$$

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 2x\lambda \\ -2y = (2y - 4)\lambda \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

اگر $x \neq 0$ ، با حذف x از معادله‌ی اول $\lambda = -1$ ، با جایگذاری λ در معادله‌ی دوم به‌دست می‌آید:

$$-2y = (2y - 4)(-1) \Rightarrow -2y = -2y + 4 \Rightarrow 4 = 0$$

۹۰ فصل چهارم

این تناقض نشان می‌دهد که در حالت $x \neq 0$ ، دستگاه جواب ندارد.
 اکنون فرض کنیم که $x = 0$ ، با جایگذاری $x = 0$ در معادله‌ی سوم به‌دست می‌آید:

$$y^2 - 4y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

بنابراین نقاط بحرانی عبارتند از: $P_1(0, 0)$ و $P_2(0, 4)$
توجه. برای تعیین اکسترمم‌های تابع $w = f(x, y, z)$ تحت شرط $g(x, y, z) = 0$ ، باید دستگاه ذیل را حل کنیم:

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ f_z = \lambda g_z \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

مثال. می‌نیمم تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ را بر صفحه $2x + y - z - 5 = 0$ بیابید.

حل.

$$f = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{و} \quad g(x, y, z) = 2x + y - z - 5 = 0$$

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ f_z = \lambda g_z \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda \\ 2y = \lambda \\ 2z = -\lambda \\ 2x + y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

با حذف λ از سه معادله‌ی بالا به‌دست می‌آید: $y = \frac{x}{2}$ ، $z = \frac{-x}{2}$ و با جای‌گذاری در

معادله‌ی آخر داریم:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{5}{6} \\ z = \frac{-5}{6} \end{cases}$$

اکسترمم‌های توابع دو متغیره ۹۱

$$f\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, \frac{-5}{6}\right) = \frac{15}{36} \quad \text{مقدار می‌نیمم برابر است با :}$$

۵- تمرین

در تمرینات یک تا هفت، نوع نقاط بحرانی را مشخص کنید.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + y \quad ۱-$$

$$f(x, y) = 4x^2 - 6y^2 + 4 \quad ۲-$$

$$f(x, y) = 3x - 4y + 7 \quad ۳-$$

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 3xy - 2x + 2y \quad ۴-$$

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \quad ۵-$$

$$f(x, y) = 2x^4 + y^2 - 12xy + 1 \quad ۶-$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy + 3x^2 \quad ۷-$$

۸- مجموعه‌ی تمام نقاط بحرانی تابع $f(x, y) = x^2y$ را بیابید و سپس نوع نقطه بحرانی تابع f را در $P_0(0, 0)$ تعیین کنید.

۹- نزدیک‌ترین نقطه به مبدأ مختصات را طوری بیابید که روی صفحه $2x + y - z - 4 = 0$ باشد.

$$\text{راهنمایی: از تابع فاصله } d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ استفاده کنید.}$$

۱۰- سه عدد مثبت بیابید که حاصل ضرب آنها ۲۷ و مجموع آنها کمترین مقدار ممکن باشد.

۱۱- ابعاد جعبه‌ای را بیابید که حجم آن ۴ متر مکعب و مساحت سطح آن حداقل باشد. (جعبه را سرباز در نظر بگیرید.)

در تمرینات ۱۲ تا ۱۷، نقاط بحرانی توابع ذیل را تحت شرط داده شده بیابید.

$$f(x, y) = 4 - x^2 - y^2 \quad ۱۲- , \quad 3x - y = 5$$

$$-2y + x = 0, \quad f(x, y) = 3x^2 + y^2 \quad -13$$

$$2x + 2y - 4 = 0, \quad f(x, y) = -x^2 - 2y + xy \quad -14$$

$$x^2 + y^2 = 13, \quad f(x, y) = 4x + 6y \quad -15$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 12, \quad f(x, y, z) = xyz \quad -16$$

$$4x - y + 2z = 4, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad -17$$

۱۸- ماکسیمم تابع کاب- داگلاس $P = L^\alpha K^{1-\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) را تحت شرط $5L + 10K = 100$ بیابید.

۱۹- اگر Q عددی ثابت و $L^\alpha K^{1-\alpha} = Q$ ، چه مقداری از K و L تابع هزینه $C(L, K) = 8L + 4K$ را می‌نیمم می‌کند.

۲۰- با استفاده از روش ضریب لاگرانژ ثابت کنید مستطیل با مساحت ماکسیمم که محیط آن مقدار ثابت P_0 باشد، مربع است.

۲۱- ابعاد استوانه‌ای بسته‌ای را بیابید که حجم آن هشت متر مکعب و مساحت سطح آن می‌نیمم باشد.

۲۲- نزدیک‌ترین نقاط منحنی $x^2y = 2$ به مبدأ مختصات را بیابید.

راهنمایی: از تابع فاصله $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ استفاده کنید.

فصل پنجم

ماتریس و دترمینان

در هر جایی که ترتیبی خاص از اشیاء (اعداد) مطرح باشد، می‌توان نمایش آن را به صورت ماتریس بیان کرد. ماتریس‌ها در علوم مختلف از جمله در خود ریاضیات کاربرد دارند. در فصل ششم یکی از کاربردهای آن برای حل دستگاه خطی بیان می‌گردد.

۱- تعریف ماتریس و انواع آن

آرایی شامل m سطر و n ستون از اشیاء (اعداد) را یک ماتریس $m \times n$ می‌نامند و به صورت ذیل نشان می‌دهند:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ماتریس A را با علامت $A = [a_{ij}]$ نیز نشان می‌دهند، هر a_{ij} یک "درآیه یا عنصر" ماتریس A نام دارد.

مثال. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ یک ماتریس 2×3 است.

در این ماتریس $a_{11} = 2$ ، $a_{23} = 6$ ، $a_{12} = -1$ به طور کلی a_{ij} عنصری است که در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ ماتریسی سطری و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ یک ماتریسی ستونی است.

مثال. اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ و $a_{ij} = 2i - 3j$ ، اعضای ماتریس A را بیابید.

حل.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف. هرگاه درآیه‌های نظیر به نظیر دو ماتریس یکسان باشند. آن دو ماتریس را مساوی می‌نامند.

مثال. اگر $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & c \\ 0 & k \end{bmatrix}$ در این صورت: $\begin{cases} c = -1 \\ k = 4 \end{cases}$

ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن برابر باشد، ($n=m$) "ماتریس مربع" نام دارد. ماتریس مربع A را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

اعضای روی خط چین را "قطر اصلی" و اعضای روی خط ممتد را "قطر فرعی" ماتریس A می‌نامند.

اگر در یک ماتریس مربع، اعضای خارج از قطر اصلی صفر باشند، آن را "ماتریس قطری" می‌نامند. ماتریس ذیل قطری است:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هرگاه در یک ماتریس قطری تمام اعضای روی قطر اصلی یک باشند، آن را "ماتریس یکه (وحد)" می‌نامند و با I_n نمایش می‌دهند.

مثال. ماتریس‌های یکه 2×2 و 3×3 در ذیل نشان داده شده‌اند:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هرگاه تمام درآیه‌های ماتریس صفر باشند. آن را "ماتریس صفر" می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هرگاه جای سطرها و ستون‌ها را در ماتریس A عوض کنیم، ماتریس حاصل را "ترانپوزه (تراسپوز)" ماتریس A می‌نامند و با علامت A^T نشان می‌دهند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

هرگاه $A = A^T$ ، ماتریس A را "متقارن" می‌نامند، به عبارت دیگر:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

مثال. ماتریس‌های ذیل متقارن هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

هرگاه $A = -A^T$ ، ماتریس A را "شبه متقارن" می نامند، به عبارت دیگر:
 $a_{ij} = -a_{ji}$.

مثال. ماتریس های ذیل شبه متقارن هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

هرگاه اعضای زیر قطر اصلی ماتریس مربع A صفر باشند. ماتریس A را "بالا مثلثی" می نامند، همچنین هرگاه اعضای بالای قطر اصلی صفر باشند. ماتریس A را "پایین مثلثی" می نامند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{بالا مثلثی}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{پایین مثلثی}$$

در یک ماتریس مربع A ، مجموع عناصر روی قطر اصلی را "ثر ماتریس" می نامند و با علامت $Tr(A)$ نشان می دهند.

مثال. در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ داریم:

$$Tr(A) = 0 + 2 + (-3) = -1$$

۲- اعمال جبری ماتریس ها

جمع دو ماتریس

برای جمع دو ماتریس، درآیه های نظیر به نظیر را با هم جمع می کنیم. (ابعاد دو ماتریس باید یکسان باشند).

مثال.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 9 & -5 \end{bmatrix}$$

تفاضل دو ماتریس

برای تفاضل دو ماتریس ، درآیه‌های نظیر به نظیر را از هم می‌کنیم. (ابعاد دو ماتریس باید یکسان باشند).

مثال.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در ماتریس

برای ضرب یک عدد در ماتریس ، عدد را در تمامی درآیه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم.

مثال.

$$2 \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} , \quad -3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -6 & 12 & -3 \end{bmatrix}$$

ضرب دو ماتریس

برای ضرب ماتریس A در ماتریس B ، سطرهای ماتریس A را در ستون‌های ماتریس B ضرب می‌کنیم. این تعریف ایجاب می‌کند که تعداد ستون‌های A برابر با تعداد سطرهای B باشد. به عبارت دیگر ، باید $A_{n \times p}$ و $B_{p \times m}$ باشند.

مثال. حاصل ضرب $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}$ را بیابید.

حل.

$$c_{۱۱} = [۲, ۰] \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = ۲ \times ۱ + ۰ \times ۲ = ۲$$

$$c_{۱۲} = [۲, ۰] \times \begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix} = ۲ \times ۰ + ۰ \times ۴ = ۰$$

$$c_{۱۳} = [۲, ۰] \times \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۲ \times ۲ + ۰ \times -۱ = ۴$$

$$c_{۲۱} = [۱, ۴] \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = ۱ \times ۱ + ۴ \times ۲ = ۹$$

$$c_{۲۲} = [۱, ۴] \times \begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix} = ۱ \times ۰ + ۴ \times ۴ = ۱۶$$

$$c_{۲۳} = [۱, ۴] \times \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۱ \times ۲ + ۴ \times -۱ = -۲$$

پس:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۴ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۴ \\ ۹ & ۱۶ & -۲ \end{bmatrix}$$

مثال. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ، حاصل ضربهای $A \times B$ و $B \times A$ را

محاسبه کنید.

حل.

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۱۱ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۸ & ۸ \end{bmatrix}$$

در این مثال، دیده می‌شود: $A \times B \neq B \times A$

مثال. در صورت ضرب پذیر بودن، ضرب های ذیل را انجام دهید.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \text{ضرب پذیر نیست}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \end{bmatrix}$$

مثال. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ موارد ذیل را محاسبه کنید.

$$2I_2 + A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2A + 3B = 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2A \times 3B = 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \times 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 24 \\ 66 & -36 \end{bmatrix}$$

$$(A+I) \times (B-I) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 15 & -12 \end{bmatrix}$$

چند خاصیت جبری ماتریس‌ها

$$A + [0] = A$$

$$A \times [0] = [0]$$

$$A + B = B + A$$

$$AI = IA = A \quad (A \text{ مربع است})$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$A(BC) = (AB)C$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

می‌دانیم در اعداد حقیقی، از تساوی $ab=0$ نتیجه می‌شود: $a=0$ یا $b=0$ اما در ماتریس‌ها، این خاصیت برقرار نیست. به مثال ذیل توجه کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0]$$

دو ماتریس سمت چپ مخالف صفر هستند، ولی حاصل ضرب آنها صفر شده است.

در اعداد حقیقی خاصیت حذف داریم، به عبارت دیگر، اگر $a \neq 0$

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

اما این خاصیت در ماتریس‌ها برقرار نیست، مثلاً اگر

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با محاسبه بررسی کنید که $AB=AC$ ولی $B \neq C$ است. به عبارت دیگر:

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C$$

ماتریس و دترمینان ۱۰۱

اگر A یک ماتریس مربع باشد، توان‌های A به صورت ذیل می‌باشند:

$$A^2 = AA$$

$$A^3 = A^2 A$$

$$A^n = A^{n-1} A$$

مثال. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، A^2 و A^3 را محاسبه کنید.

حل.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 0 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، A^{52} را به دست آورید.

حل.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}$$

با این محاسبات می‌توان حدس زد:

$$A^{52} = \begin{bmatrix} 2^{52} & 0 \\ 0 & 2^{52} \end{bmatrix}$$

مثال. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^{75} را به دست آورید.

حل.

$$A^r = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^r = A^r \times A = I \times A = A$$

$$A^r = A^r \times A^r = I \times I = I$$

$$A^{75} = A \quad \text{بنابراین:}$$

۳- دترمینان یک ماتریس مربع

دترمینان یک ماتریس مربع A ، مقدار عددی است که به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

$$|A| \quad \text{یا} \quad \det(A)$$

دترمینان ماتریس 2×2

دترمینان ماتریس 2×2 برابر است با حاصل ضرب قطر اصلی، منهای حاصل ضرب قطر فرعی

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - (2 \times 4) = -5$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times -2 - (1 \times 2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \times 4 - (2 \times -3) = 6$$

همان‌طور که دیده می‌شود، مقدار دترمینان می‌تواند مثبت، منفی و یا صفر شود.

دترمینان ماتریس 3×3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ماتریس و دترمینان ۱۰۳

از حذف سطر اول و ستون اول، زیر دترمینان $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ حاصل می‌شود.

A_{11} را "دترمینان کهاد (فرعی) عنصر a_{11} " و عبارت $A_{11}^{1+1} (-1)$ را "همسازه عنصر a_{11} " می‌نامند. به طور مشابه، A_{23} دترمینانی است که از حذف سطر دوم و ستون سوم ماتریس A حاصل می‌شود.

$$A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{دترمینان کهاد عنصر } a_{23}$$

$$(-1)^{2+3} A_{23} = -A_{23} \quad \text{همسازه عنصر } a_{23}$$

به راحتی دیده می‌شود که ماتریس 3×3 نه همسازه دارد. فرمول محاسبه دترمینان 3×3 به روش بسط، (روی سطر اول) در ذیل آمده است.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} A_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} A_{13}$$

دترمینان‌های زیر، با روش بسط (روی سطر اول) بدست آمده‌اند.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ = 2(1) + (-3)(2) + 4(1) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ = 2(4) + 1(6) + (-3)(2) = 8$$

به طور مشابه، می‌توان دترمینان 3×3 را به روش بسط روی سطر دوم یا سوم محاسبه کرد. همچنین می‌توان دترمینان را با بسط روی ستون‌های ماتریس نیز به دست آورد.

مثال. دترمینان $\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}$ را به روش بسط (روی سطر سوم) به دست آورید.

حل.

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = ۲ \begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix} + -۱ \begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix} + ۰ \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix}$$

$$= ۲(-۳) + -۱(-۶) + ۰(-۳) = ۰$$

نکته. مقدار دترمینان یک ماتریس با بسط روی هر سطر یا هر ستون، یکسان به دست می آید.

دترمینان ماتریس $n \times n$

روش محاسبه‌ی دترمینان $n \times n$ همانند محاسبه‌ی دترمینان ۳×۳ است. دترمینان ذیل با روش بسط (روی سطر اول) محاسبه شده است.

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$= ۲ \begin{vmatrix} ۱ & -۳ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{vmatrix} + -۳ \begin{vmatrix} ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۲ \end{vmatrix} + ۰ \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} + -۲ \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & -۳ \\ ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۲(۴) + -۳(۶) + ۰(-۲) + -۲(۱) = -۱۲$$

برای محاسبه سریع‌تر دترمینان، بهتراست سطر یا ستونی را انتخاب کنیم که صفر بیشتر دارد.

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix} = -۴ \begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = -۴(۵) = -۲۰$$

ماتریس و دترمینان ۱۰۵

روش ساروس برای دترمینان ۳×۳

در این روش دو ستون اول را تکرار و بعد مجموع حاصل ضرب قطرهای اصلی را از مجموع حاصل ضرب قطرهای فرعی کم می‌کنیم.

$$\text{مثال. دترمینان ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ را حساب کنید.}$$

حل.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = [(1 \times 0 \times 5) + (-1 \times 4 \times -1) + (2 \times 3 \times 2)] \\ &\quad - [(-1 \times 3 \times 5) + (1 \times 4 \times 2) + (2 \times 0 \times -1)] \\ &= (0 + 4 + 12) - (-15 + 8 + 0) = 23 \end{aligned}$$

تعریف. هرگاه $|A| \neq 0$ باشد. ماتریس A را "نامنفرد" گویند. ماتریس ذیل نامنفرد است.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (12 + 0 + 0) - (0 + 0 + 4) = 8$$

۴- خواص دترمینان

۱- اگر تمامی عناصر یک سطر، صفر باشند، مقدار دترمینان صفر است:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

۲- اگر یک سطر، مضربی از سطر دیگر باشد، مقدار دترمینان صفر است:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

۱۰۶ فصل پنجم

سطر چهارم دو برابر سطر دوم است:

$$(6, 4, -2, -4) = 2(3, 2, -1, -2)$$

از این خاصیت نتیجه می‌شود که اگر دو سطر برابر باشند، دترمینان صفر است:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۳- اگر در دترمینان جای دو سطر را عوض کنیم، مقدار دترمینان در یک منفی ضرب می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \curvearrowright \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

۴- اگر ماتریس مثلثی باشد، دترمینان آن برابر است با حاصل ضرب قطر اصلی:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times -3 \times 7 = -21$$

۵- اگر مضربی از یک سطر را به سطر دیگر اضافه کنیم، مقدار دترمینان ثابت می‌ماند:

$$\begin{pmatrix} (2) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 10 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

دو برابر سطر اول به سطر دوم اضافه شده است:

$$2(1, 2, 3) + (-1, 2, 4) = (2, 4, 6) + (-1, 2, 4) = (1, 6, 10)$$

۶- دترمینان ماتریس، با دترمینان ترانژاده آن برابر است.

$$|A| = |A^T|$$

ماتریس و دترمینان ۱۰۷

۷- برای ضرب عدد در یک دترمینان، عدد را در یک سطر (دلیخواه) ضرب می‌کنیم:

$$-2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \\ -6 & -4 & -2 \end{vmatrix}$$

عدد ۲- در سطر سوم ضرب شده است. بنا به این خاصیت می‌توان از عامل مشترک فاکتور گرفت:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 15 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

۸- اگر A و B دو ماتریس مربع باشند، داریم:

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

۹- اگر یک سطر بر حسب چند سطر دیگر باشد، مقدار دترمینان برابر با صفر است:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

سطر چهارم، مجموع سطر اول و دوم است:

$$(0, 4, 7, 7) = (1, 2, 3, 0) + (-1, 2, 4, 7)$$

چند نکته.

الف) در تمامی خواص بالا، اگر به جای کلمه «سطر» کلمه «ستون» را قرار دهیم، باز هم این خواص برقرارند.

ب) با استفاده از این خواص، می‌توان هر دترمینانی را مثلثی نمود.

ج) هرگاه ابعاد دترمینان بزرگ باشد، با این خواص دترمینان سریع‌تر محاسبه می‌گردد.

۱۰۸ فصل پنجم

مثال. دترمینان‌های ذیل را با استفاده از خواص بالا، حساب کنید.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -(1 \times 4 \times 7) = -28$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+b & a+c & b+c \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

مثال. دترمینان ذیل را بالا مثلی نموده و مقدار آن را به دست آورید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

حل.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 15 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{(\frac{15}{7})} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 15 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} \end{vmatrix} = 1 \times -7 \times \frac{10}{7} = -10$$

ماتریس و دترمینان ۱۰۹

مثال. اگر $A^T = I$ ، نشان دهید $|A| = \pm 1$.
حل.

$$A^T = I \Rightarrow |A^T| = |I| = 1$$

$$|A^T| = 1 \Rightarrow |A|^T = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

۵- معکوس یک ماتریس مربع

تعریف. فرض کنیم A یک ماتریس مربع $n \times n$ باشد، ماتریس B را معکوس A می‌نامند، هرگاه $AB = BA = I_n$ و اگر B را با A^{-1} نشان دهیم، داریم:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

در اعداد حقیقی، هر عدد مخالف صفر، معکوس پذیر است. در ماتریس‌ها، شرط لازم و کافی برای اینکه A معکوس پذیر باشد این است که $|A| \neq 0$ باشد.

محاسبه A^{-1}

الف) ماتریس 2×2 باشد:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

بنا به فرمول:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(جای عناصر قطر اصلی عوض شده و قطر فرعی در منفی ضرب شده است.)

مثال. معکوس ماتریس‌های ذیل را بیابید.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

حل.

$$|A| = -14 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{4}{14} & \frac{-2}{14} \end{bmatrix}$$

$$|B| = 1 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس C معکوس پذیر نیست: $|C| = 0$

ب) A ماتریس 3×3 باشد:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فرمول معکوس ماتریس A به صورت ذیل است:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A$$

که در آن $\text{adj}A$ ماتریس " A الحاقی" نام دارد و به صورت ذیل تعریف می شود:

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

A_{ij} دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A به دست می آید.

$$\text{مثال. معکوس ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ را به دست آورید.}$$

حل.

$$|A| = -18$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 \quad -A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$-A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10 \quad -A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad -A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{-18} \begin{bmatrix} -8 & -4 & 5 \\ 2 & 10 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-18} \begin{bmatrix} -8 & 2 & -4 \\ -4 & 10 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(ج) A ماتریس $n \times n$ باشد.

در حالت $n \times n$ ، فرمول معکوس A ، مانند فرمول 3×3 است:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A$$

مانند فرمول 3×3 ، $\text{adj}A$ ترانزاده ماتریس همسازهای A می باشد.

$$\text{مثال. اگر } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ عنصر } a_{23} \text{ را در ماتریس } A^{-1} \text{ بیابید.}$$

حل. با توجه به فرمول A^{-1} داریم:

$$a_{23} = \frac{-A_{32}}{|A|}$$

$$|A| = -1, \quad -A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

بنابراین:

$$a_{23} = \frac{-5}{-1} = 5$$

- یک روش دیگر محاسبه معکوس یک ماتریس، استفاده از اعمال مقدماتی سطری است. این اعمال روی یک ماتریس $m \times n$ بدین صورت می‌باشند.
- ۱- جای دو سطر از ماتریس را عوض کنیم.
 - ۲- یک سطر ماتریس را در یک عدد دلخواه (مخالف صفر) ضرب کنیم.
 - ۳- مضربی از یک سطر را به سطر دیگر، اضافه کنیم.

هرگاه هر یک از اعمال مقدماتی سطری را روی ماتریس A اعمال شود، ماتریس حاصل را "هم/ارز" ماتریس A می‌نامند.

مثال. اگر در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ جای دو سطر را عوض کنیم، هم ارز ماتریس A به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

فرض کنیم A یک ماتریس نامنفرد باشد. ماتریس افزوده $[A \mid I_n]$ را در نظر می‌گیریم، اگر به کمک اعمال مقدماتی سطری، ماتریس A را به I_n تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}]$$

مثال. معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ را با استفاده از اعمال مقدماتی سطری به دست آورید.

حل.

$$[A \mid I_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس و دترمینان ۱۱۳

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{(-3)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left(\frac{-1}{7} \right) \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array} \right] \\
 & \sim \left(\frac{-2}{7} \right) \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array} \right] \\
 & \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{array} \right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

چند خاصیت

(الف) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(ب) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

(ج) $(I_n)^{-1} = I_n$

(د) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

مثال. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، دترمینان $|A^{-1}|$ را بیابید.

حل. $|A| = 8$ ، بنا به خاصیت:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{8}$$

مثال. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، مطلوبست A^{-2}

حل. داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-2} = A^{-1} \times A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۶- تمرین

۱- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، موارد ذیل را محاسبه کنید.

الف) $A + B$ ب) $2A - 4B$
 ج) $3A^T + B$ د) $2B(A - B)$
 ه) $A \times B$ و) $A^T \times B^T$
 ز) $(2A + I) \times (3I - B)$

۲- اگر $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ و $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ و $a_{ij} = \begin{cases} i-1 & i > j \\ 1 & i = j \\ j+1 & i < j \end{cases}$

و $b_{ij} = i^2 - j^2$ ماتریس $A + B$ را به دست آورید.

۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ موارد ذیل را در صورت امکان به دست

آورید.

الف) $A \times B$ ب) $B \times A$
 ج) A^2 د) $A \times (A - 2B)$
 ۴- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ موارد ذیل را محاسبه کنید.
 الف) $B \times A$ ب) $A - 4I_3$
 ج) $Tr(A^2)$ د) $A - B + 3I_3$

ماتریس و دترمینان ۱۱۵

۵- با یک مثال نشان دهید که اگر A یک ماتریس مربع باشد، $A + A^T$ ماتریس متقارن و $A - A^T$ ماتریس شبه متقارن است.

۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^{40} را به دست آورید.

۷- اگر $A^3 = A$ ، ماتریس A^{100} برابر با کدام ماتریس است.

۸- اگر $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید $A^3 = I$ و سپس A^{145} را به دست آورید.

۹- آیا اتحاد $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ برای ماتریس‌ها برقرار است؟

۱۰- هرگاه رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ برقرار باشد، یک رابطه بین x و y به دست آورید.

۱۱- تولید کننده‌ای سه نوع کالا را در بازار به تعداد ماتریس ذیل به فروش می‌رساند:

$$\begin{array}{ccc} & A_1 & A_2 & A_3 \\ \text{مکان } M_1 & \begin{bmatrix} 100 & 200 & 300 \end{bmatrix} \\ \text{مکان } M_2 & \begin{bmatrix} 300 & 400 & 100 \end{bmatrix} \end{array}$$

اگر هزینه تولید هر واحد A_1 و A_2 و A_3 به ترتیب $C = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 50 \end{bmatrix}$ و قیمت فروش

$$R = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix} \text{ باشد، موارد ذیل را بیابید.}$$

(ج) سود حاصل از فروش

(ب) هزینه‌ی کل

(الف) درآمد کل

۱۱۶ فصل پنجم

۱۲- دترمینان‌های ذیل را بیابید. (روش بسط)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

۱۳- دترمینان‌های 3×3 تمرین قبل را به روش ساروس بیابید.

۱۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $A \times B$ را

بیابید.

۱۵- دترمینان ذیل را به روش بسط بیابید:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

۱۶- مقدار x را طوری بیابید که دترمینان ذیل صفر شود:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

۱۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، موارد ذیل را تحقیق کنید.

(الف) $|A| = |A^T|$ (ب) $|AB| = |A| \cdot |B|$

(ج) $|A^3| = |A|^3$

ماتریس و دترمینان ۱۱۷

۱۸- با یک مثال، نشان دهید، تساوی $|A+B| = |A| + |B|$ همواره برقرار نیست.

۱۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ و $A \times B = 2A - 3I$ ، دترمینان ماتریس B را بیابید.

۲۰- اگر $|A| = 2$ و $|B| = -4$ ، موارد زیر را حساب کنید.

$$|5A|, |A^2|, |A \times B|, |A^T|$$

۲۱- دترمینان‌های ذیل را با استفاده از خواص دترمینان بیابید.

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ -\frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

۲۲- با استفاده از خواص دترمینان ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(c-b)$$

۲۳- اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، با استفاده از خاصیت هفتم دترمینان، یک فرمول برای دترمینان kA بیابید. (k عدد ثابت است).

۲۴- دترمینان ذیل را بالا مثلی نموده و مقدار آن را بیابید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

۱۱۸ فصل پنجم

۲۵- معکوس ماتریس‌های ذیل را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

۲۶- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریس B را طوری بیابید که

$$AB = BA = I_2$$

۲۷- ماتریس B را طوری بیابید که

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \times B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

۲۸- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^{-3} را بیابید.

۲۹- معکوس ماتریس‌های ذیل را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ ، درآیه a_{12} را در ماتریس A^{-1} بیابید.

ماتریس و دترمینان ۱۱۹

۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ رابطه $(AB)^{-۱} = B^{-۱}A^{-۱}$ را تحقیق کنید.

۳۲- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۳ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ، نشان دهید $|adjA| = |A|^{۳-۱}$

(اگر A ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه $|adjA| = |A|^{n-۱}$)

یادداشت

فصل ششم

دستگاه معادلات خطی و بردارهای ویژه

برای تعیین نقطه‌ی برخورد دو خط در صفحه ، با دو معادله و دو مجهول و برای تعیین نقاط برخورد دو صفحه در فضا ، با دو معادله و سه مجهول مواجه هستیم. در هر جا که تعدادی معادله خطی با تعدادی مجهول داشته باشیم، دستگاه معادلات خطی تشکیل می‌شود. یک بردار را می‌توان یک ماتریس سطری (ستونی) در نظر گرفت ، به هر ماتریس مربع بردارهای خاصی به نام بردارهای ویژه نسبت داده می‌شود.

۱- دستگاه معادلات خطی

یک دستگاه معادلات خطی m معادله و n مجهول به این صورت است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

در این دستگاه ، x_i ها مجهول‌های دستگاه، a_{ij} ها ضرایب دستگاه و b_i ها اعداد ثابت دستگاه می‌باشند. هرگاه $x_1, \dots, x_n$ در تمامی معادلات دستگاه صدق کنند. $x_1, \dots, x_n$ را "جواب دستگاه" می‌نامند.

دستگاه معادلات خطی و بردارهای ویژه ۱۲۳

$$\text{مثال. ماتریس ضرایب دستگاه} \begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ x - 4z = 0 \\ 3x + y + 7z = 1 \end{cases} \text{ را بیابید.}$$

حل.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{اگر } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ ماتریس مجهول ها و } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ ماتریس اعداد ثابت دستگاه باشند، می توان}$$

دستگاه (*) را بر حسب ماتریس ها بیان کرد.

$$AX = B$$

اگر A ماتریس نامنفرد باشد، ($|A| \neq 0$) داریم:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

بنابراین اگر دستگاه مربع و دترمینان ضرایب دستگاه مخالف صفر باشد، فرمول حل دستگاه به روش ماتریسی، به این صورت است:

$$X = A^{-1}B$$

$$\text{مثال. دستگاه} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \text{ را به روش ماتریسی حل کنید.}$$

حل.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.

مثال. دستگاه

$$\begin{cases} -2x + y = 4 \\ x - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

را به روش ماتریسی حل کنید.

حل.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

این دستگاه از این روش حل نمی‌شود.

مثال. دستگاه مربع داده شده را به روش ماتریسی حل کنید.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$$

حل.

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{بنابراین:}$$

حل دستگاه به روش کرامر

در این روش نیز باید دستگاه مربع و دترمینان ضرایب دستگاه، مخالف صفر باشد. ($|A| \neq 0$)
فرمول روش کرامر به صورت ذیل است:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n$$

A ماتریس ضرایب دستگاه و A_i ماتریسی است که از تعویض ستون i ام ماتریس A با b_i ها حاصل می شود.

مثال. دستگاه زیر را به روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} -x + 3y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

حل.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{2}{-5}, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-6}{-5} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$$

دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.

مثال. دستگاه داده شده را به روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + 10y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$$

حل.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 46$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 92, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -46$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{92}{46} = 2, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{0}{46} = 0, \quad z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-46}{46} = -1$$

بنابراین:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

دستگاه معادلات خطی و بردارهای ویژه ۱۲۷

نکته. در یک دستگاه مربع، هرگاه $|A| \neq 0$ باشد، دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد و اگر $|A| = 0$ باشد، دستگاه بی نهایت جواب و یا بدون جواب است.

مثال. مقدار a را طوری بیابید که دستگاه ذیل ناسازگار باشد. (بدون جواب)

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -6x + ay = 5 \end{cases}$$

حل. باید $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2a - 18 = 0 \Rightarrow a = 9$$

مثال. به ازای چه مقدار a ، دستگاه همگن ذیل فقط یک جواب بدیهی دارد:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

حل. یک جواب بدیهی دستگاه $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ است. اگر $|A| \neq 0$ ، این تنها جواب

دستگاه خواهد بود:

$$|A| \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$2 - 4a \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{1}{2}$$

به ازای هر $a \neq \frac{1}{2}$ ، دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.

۳- حل دستگاه به روش حذفی گاوس

همانند ماتریسها اعمال مقدماتی روی یک دستگاه به صورت ذیل است:

۱- جای دو معادله یک دستگاه را عوض کنیم.

۲- یک معادله را در یک عدد ضرب کنیم.

۳- مضربی از یک معادله را به معادله‌ی دیگر اضافه کنیم.

اگر تعدادی از این اعمال مقدماتی را روی یک دستگاه انجام دهیم، دستگاه به‌دست آمده، "هم/رز" با دستگاه اولیه نامیده می‌شود و این دو دستگاه جواب‌های یکسان دارند.

در روش حذفی گاوس، با کمک اعمال مقدماتی، مجهول‌ها را طوری حذف می‌کنیم که دستگاه، بالامثلثی شود و بعد مجهول‌ها را یک به یک به‌دست می‌آوریم. اگر دستگاه مربع نباشد با افزودن صفرهای مناسب، دستگاه را مربع می‌کنیم. سرعت حل دستگاه به روش حذفی گاوس، در مقایسه با دو روش قبلی بیشتر است و هیچ محدودیتی برای حل دستگاه در این روش وجود ندارد.

مثال. دستگاه‌های ذیل را به روش حذفی حل کنید:

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} -x + 3y = 0 \\ 2x - 6y = 3 \end{array} \right. & \text{(ب)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{array} \right. & \text{(الف)} \\ & \left\{ \begin{array}{l} -2x + 4y = 6 \\ x - 2y = -3 \end{array} \right. & \text{(ج)} \end{array}$$

حل الف)

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad \curvearrowleft \quad (-2) \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 0 + 5y = 1 \end{array} \right. \quad \text{دستگاه مثلثی شده است :}$$

$$5y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{5}$$

$$x - 2y = 1 \Rightarrow x - 2\left(\frac{1}{5}\right) = 1 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{array} \right. \quad \text{دستگاه یک جواب دارد:}$$

(حل ب)

$$(۲) \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 2x - 6y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 0 + 0 = 3 \end{cases} \quad \text{دستگاه مثلثی شده است:}$$

در معادله‌ی آخر $0 = 3$ ، بنا به این تناقض، دستگاه جواب ندارد.

(حل ج)

$$\left(\frac{1}{2}\right) \begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases} \quad \text{دستگاه مثلثی است:}$$

این دستگاه، یک معادله و دو مجهول دارد، یکی از مجهول‌ها را دلخواه می‌گیریم.

دلخواه $x = k$

$$-2x + 4y = 6 \Rightarrow -2k + 4y = 6$$

$$y = \frac{6+2k}{4} \Rightarrow y = \frac{3+k}{2}$$

این دستگاه بی‌نهایت جواب دارد:

$$\begin{cases} x = k \\ y = \frac{3+k}{2} \end{cases} \quad k \in R$$

مثال. دستگاه‌های ذیل را به روش حذفی حل کنید.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -2x + y - z = 4 \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ z + y + 2x = -1 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

(حل الف)

$$\begin{aligned} (۱) \quad (-۲) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ -x + 2y = 4 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 0 + 3y - 3z = -3 \\ 0 + y + 2z = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

۱۳۰ فصل ششم

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 0 + 3y - 3z = -3 \\ 0 + 0 + 3z = 6 \end{cases} \quad \text{دستگاه مثلثی است:}$$

$$3z = 6 \Rightarrow z = 2$$

$$3y - 3(2) = -3 \Rightarrow y = 1$$

$$x - (1) + 2(2) = 1 \Rightarrow x = -2$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{بنابراین:}$$

(حل ب)

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -2x + y - z = 4 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 0 - y + 3z = 6 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases} \quad \text{دستگاه مثلثی است:}$$

$$z = k \quad \text{دلخواه}$$

$$-y + 3k = 6 \Rightarrow y = 3k - 6$$

$$x - y + 2z = 1 \Rightarrow x - (3k - 6) + 2k = 1 \Rightarrow x = k - 5$$

دستگاه بی‌نهایت جواب دارد:

$$\begin{cases} z = k \\ y = 3k - 6 \\ x = k - 5 \end{cases} \quad k \in R$$

مثال. اگر $f(x) = ax + bx^2$ ، $f(1) = 4$ و $f(2) = 0$ ، ضابطه f را به دست آورید.

$$\text{حل.} \quad f(1) = a + b = 4, \quad f(2) = 2a + 4b = 0$$

دستگاه معادلات خطی و بردارهای ویژه ۱۳۱

$$\begin{cases} a = 8 \\ b = -4 \end{cases} \quad \text{به دست می آید:} \quad \begin{cases} a + b = 4 \\ 2a + 4b = 0 \end{cases} \quad \text{از حل دستگاه}$$

بنابراین:

$$f(x) = 8x - 4x^2$$

مثال. یک کارخانه سرامیک سازی سه نوع کاشی تولید می کند، کاشی ها در سه مرحله A, B, C آماده می شوند. تعداد ساعت در هر مرحله به صورت ذیل است.

	نوع اول	نوع دوم	نوع سوم
A	۱	۱	۱
B	۲	۳	۲
C	۴	۳	۳

اگر ظرفیت کاری در مراحل A و B و C به ترتیب 290 و 600 و 900 ساعت در ماه باشد، مقدار کاشی تولید شده از هر نوع را در یک ماه تعیین کنید.

حل. اگر x و y و z به ترتیب تعداد کاشی نوع اول تا سوم باشد، به دست می آید:

$$\begin{cases} x + y + z = 290 \\ 2x + 3y + 2z = 600 \\ 3x + 3y + 4z = 900 \end{cases}$$

با حل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} x = 240 \\ y = 20 \\ z = 30 \end{cases}$$

۴- بردارها و رتبه ی یک ماتریس

بر حسب ماتریس ها، یک بردار، یک ماتریس سطری یا یک ماتریس ستونی است.

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \text{بردار ستونی}$$

بردار سطری $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]$

یک بردار n مؤلفه‌ای را به صورت ذیل نیز نشان می‌دهند:

$$a = (a_1, \dots, a_n)$$

تعریف. هرگاه بین چند بردار بتوان یک بردار از آنها را بر حسب مجموعی از مضارب سایر بردارها بیان کرد. آن چند بردار را وابسته خطی می‌نامند، به طور دقیق‌تر، اگر مضارب $k_1, k_2, \dots, k_m$ که همگی صفر نیستند وجود داشته باشند به طوری که

$$k_1 a_1 + \dots + k_m a_m = 0$$

در این صورت بردارهای $a_1, a_2, \dots, a_m$ وابسته خطی هستند،

تعریف. هرگاه چند بردار وابسته خطی نباشند. آنها را مستقل خطی می‌نامند، به عبارت دیگر، هرگاه گزاره ذیل برقرار باشد.

$$k_1 a_1 + \dots + k_m a_m = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$$

بردارهای $a_1, a_2, \dots, a_m$ مستقل خطی‌اند،

بردارهای $a = (2, 3)$ و $b = (-4, -6)$ وابسته خطی هستند:

$$(-4, -6) = -2(2, 3)$$

بردارهای $a = (1, 0, 3)$ و $b = (2, -1, -4)$ و $c = (4, -1, 2)$ وابسته خطی هستند:

$$(4, -1, 2) = 2(1, 0, 3) + (2, -1, -4)$$

بردارهای $a = (1, 2)$ و $b = (2, 3)$ مستقل خطی هستند، زیرا a و b مضربی از هم نیستند. سه بردار $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ ، $(0, 0, 1)$ مستقل خطی هستند. (چرا؟)

چند نکته.

۱- چند بردار شامل بردار صفر، وابسته خطی هستند.

مثلاً بردارهای $(0, 0, 0)$ ، $(3, 5, 6)$ ، $(2, 1, 4)$ وابسته خطی هستند.

۲- یک بردار مخالف صفر، به تنهایی، مستقل خطی است.

۳- اگر تعداد بردارها از تعداد مؤلفه‌ها بیشتر باشند، آن بردارها وابسته خطی هستند.

مثلاً بردارهای $(1, 0, 0)$ ، $(2, 4, 7)$ ، $(5, 0, 1)$ ، $(2, -1, 4)$ وابسته خطی هستند.

تعریف. فرض کنیم A یک ماتریس مخالف صفر باشد، بیشترین تعداد سطرهای مستقل خطی A را رتبه‌ی A می‌نامند و با علامت $r(A)$ نشان می‌دهند.

رتبه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ برابر ۲ است، زیرا دو سطر ماتریس مستقل خطی هستند.

رتبه‌ی ماتریس $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ برابر با ۱ است، زیرا دو سطر ماتریس وابسته هستند.

چند نکته :

۱- می‌توان نشان داد رتبه‌ی یک ماتریس، برابر بیشترین تعداد ستون‌های مستقل خطی آن می‌باشد.

۲- اگر A یک ماتریس $n \times n$ و $|A| \neq 0$ باشد، آنگاه: $r(A) = n$

۳- اگر A ماتریس $m \times n$ باشد، آنگاه: $r(A) \leq \min(m, n)$ مثلاً اگر A

ماتریس 3×5 باشد، آنگاه: $r(A) \leq 3$.

۴- می‌توان نشان داد، رتبه‌ی ماتریس A برابر است با بزرگترین درجه‌ی دترمینانی که از ماتریس A انتخاب و مخالف صفر باشد.

مثال. رتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ را بیابید.

حل. $|A| = 10 \neq 0$

بنابراین: $r(A) = 3$

مثال. رتبه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ را تعیین کنید.

حل. $|A| = 0$ اما $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

بنابراین: $r(A) = 2$

مثال. رتبه ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ را بیابید.

حل.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$r(B) = 2$$

بنابراین:

مثال. رتبه ماتریس $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ را بیابید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{از طرفی} \quad |C| = 0$$

$$r(B) = 3$$

بنابراین:

۵- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

فرض کنیم A ماتریس مربع $n \times n$ باشد، می‌خواهیم بردار ستونی X و عدد λ را طوری

$$AX = \lambda X \quad \text{و یا} \quad AX - \lambda I_n X = 0$$

تعیین کنیم که X به‌دست می‌آید:

$$(A - \lambda I_n)X = 0 \quad (*)$$

این دستگاه همگن در صورتی جواب‌های غیر صفر دارد که دترمینان ماتریس ضرایب، صفر باشد به عبارت دیگر:

$$|A - \lambda I_n| = 0$$

تساوی بالا یک چند جمله‌ای درجه n بر حسب λ می‌باشد که آن را "معادله‌ی مفسری یا معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس A " می‌نامند. ریشه‌های معادله‌ی مفسر A ، "مقادیر ویژه A " نام دارد و اگر هر مقدار ویژه به‌دست آمده را به جای λ در دستگاه $(*)$ قرار دهیم، از حل دستگاه "بردارهای ویژه" حاصل می‌شوند.

دستگاه معادلات خطی و بردارهای ویژه ۱۳۵

مثال. معادله‌ی مفسر و مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ را بیابید.

حل.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

معادله‌ی مفسر ماتریس A برابر است با:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

ریشه‌های این معادله $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$ است. بنابراین $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 3$ دو مقدار ویژه

ماتریس A می‌باشند.

مثال. مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را بیابید.

حل.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

با محاسبه‌ی دترمینان، معادله‌ی مفسر A به دست می‌آید :

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

مثال. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ را بیابید.

حل.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) = 0$$

معادله‌ی مفسر $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ و مقادیر ویژه A $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$ می‌باشند.

به ازای $\lambda = 1$ داریم:

$$A - \lambda I = A - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

دلخواه $x = k$

$$2x - 4y = 0 \Rightarrow 2k - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{k}{2}$$

دستگاه بی‌نهایت جواب دارد:

$$\begin{cases} x = k \\ y = \frac{k}{2} \end{cases} \quad k \in R$$

دستگاه معادلات خطی و بردارهای ویژه ۱۳۷

بنابراین $X = \begin{pmatrix} k \\ \frac{k}{2} \end{pmatrix}$ ، بردارهای ویژه متناظر با $\lambda = 1$ است.
به ازای $\lambda = -3$ داریم:

$$A - \lambda I = A - 3I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

دستگاه بی‌نهایت جواب دارد:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \end{cases} \quad k \in R$$

بنابراین $X = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$ ، بردارهای ویژه متناظر با $\lambda = -3$ است.

چند خاصیت:

۱- اگر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A باشند، آنگاه:

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

۲- اگر A متقارن باشد، مقادیر ویژه A ، اعداد حقیقی هستند.

۳- اگر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A باشند، آنگاه:

$$Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

۴- اگر $f(\lambda) = 0$ معادله مفسر ماتریس A باشد، آنگاه: $f(A) = 0$

خاصیت چهارم به "قضیه کیلی - هامیلتون" معروف است.

۶-تمرین

۱- دستگاه‌های ذیل را به روش ماتریسی حل کنید.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 4y = 0 \end{cases} \quad \text{ب)} \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2z = 0 \\ y - z = -2 \end{cases} \quad (\text{د}) \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۲- دستگاه‌های تمرین قبل را به روش کرامر حل کنید.

۳- دستگاه همگن ذیل را حل کنید.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

۴- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ ، با استفاده از دستگاه‌ها، ماتریسی مانند

$$A \times B = C \quad B \text{ بیابید به طوریکه}$$

۵- مقدار a را طوری بیابید که دستگاه ذیل جواب نداشته باشد.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + ay = 4 \end{cases}$$

۶- a را طوری بیابید که دستگاه ذیل جواب‌های غیر بدیهی داشته باشد.

$$\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$$

۷- دستگاه‌های 2×2 ذیل را به روش حذفی حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ -8y + 4x = 7 \end{cases} \quad (\text{ب}) \qquad \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 6x - y = 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - y = 2 \\ 2x + \frac{2}{3}y = -4 \end{cases} \quad (\text{د})$$

$$\begin{cases} -x - y = 2 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۸- دستگاه‌های ذیل را به روش حذفی حل کنید.

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 3x - y + 4z = -1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x - 2y = 1 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 2x + y + 2z + t = 1 \\ 3x - 4y + 2t = -2 \end{cases} \quad (\text{د})$$

$$\begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ x + 4y - z = 0 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۹- نقطه‌ی برخورد دو خط $2x + y = 4$ و $-x + 2y = 1$ را تعیین کنید.

۱۰- نقطه‌ی برخورد سه خط $y - x = 1$ و $y = 2x$ و $y + 2x - 4 = 0$ را تعیین کنید.

۱۱- نقاط برخورد دو صفحه $x - y + 4z = 1$ و $-x + 2y + z = 0$ را تعیین کنید.

۱۲- یک کارخانه سه نوع کالای A و B و C را تولید می‌کند. جهت تولید این کالاها از سه نوع ماشین α و β و γ استفاده می‌شود. ساعت کار با ماشین‌های α و β و γ برای تولید یک واحد کالا از هر نوع در ذیل آمده است:

$$\begin{bmatrix} & \alpha & \beta & \gamma \\ A & 8 & 4 & 3 \\ B & 3 & 3 & 2 \\ C & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

از ماشین‌های α و β و γ به ترتیب به میزان ۸۰۰، ۱۲۰۰، ۱۳۰۰ ساعت می‌توان استفاده کرد، چه تعداد از هر محصول می‌توان تولید نمود تا از تمام ظرفیت ماشین‌ها استفاده شود.

۱۳- رتبه ماتریس‌های زیر را تعیین کنید.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

۱۴- رتبه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ را تعیین کنید.

۱۵- رتبه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ را تعیین کنید.

۱۶- استقلال خطی یا وابستگی خطی بردارهای ذیل را تعیین کنید.

الف) $a = (2, 0, -1)$ ، $b = (0, 4, 1)$ ، $c = (0, 0, 3)$

ب) $a = (2, 4)$ ، $b = (3, 2)$ ، $c = (1, -1)$

۱۷- به ازای کدام مقدار c ، بردارهای $(1, c, 4)$ ، $(-1, 1, 2)$ ، $(3, 1, 0)$ وابسته خطی هستند.

۱۸- معادله‌ی مفسر و مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های ذیل را بیابید.

الف) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (ب) $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

ج) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (د) $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

۱۹- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، مجموع مقادیر ویژه را بیابید.

۲۰- بردارهای ویژه‌ی ماتریس‌های ذیل را تعیین کنید.

الف) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

پیوست

یادآوری مشتق

تعریف مشتق

تعریف. فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در اطراف نقطه x_0 تعریف شده باشد، مشتق تابع $y = f(x)$ را در نقطه x_0 با $f'(x_0)$ نشان می‌دهیم و برابر با حد ذیل است:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

در صورتی که حد فوق وجود داشته باشد، می‌گوییم تابع f در نقطه x_0 مشتق پذیر است. مثال. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = 3x + 1$ را در نقطه $x_0 = 1$ بیابید.

حل.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x + 1) - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3 \end{aligned}$$

بنابراین: $f'(1) = 3$

فرمول‌های مشتق:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad n \in R$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt[r]{x})' = \frac{1}{r\sqrt[r]{x^{r-1}}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\log_a^x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$\begin{aligned}(\tan^{-1} x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\(\cot^{-1} x)' &= \frac{-1}{1+x^2} \\(\sin^{-1} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\(\cos^{-1} x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

قواعد مشتق‌گیری

فرض کنیم $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت:

$$\begin{aligned}(f \pm g)' &= f' \pm g' \\(f \cdot g)' &= f' \cdot g + g' \cdot f \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2} \\(cf(x))' &= cf'(x) \\(c)' &= 0\end{aligned}$$

(C عددی ثابت است.)

توجه. فرض کنیم $y = f(x)$ ، مشتق تابع f نسبت به x را با این نمادها نشان می‌دهند.

$$f'(x), \quad y'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}$$

مثال. مشتق بگیرید

$$\begin{aligned}(x^4 + 5x^3 - 7x + 5)' &= 4x^3 + 15x^2 - 7 + 0 \\(\sqrt[3]{x^4})' &= \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

$$\left(\sqrt{x}(x^r + x)\right)' = \frac{1}{r\sqrt{x}}(x^r + x) + (rx + 1)\sqrt{x}$$

$$\left(\frac{rx + r}{1 + x^r}\right)' = \frac{r(1 + x^r) - rx(rx + r)}{(1 + x^r)^2}$$

$$(x^r \cdot \sin x)' = rx^{r-1} \cdot \sin x + \cos x \cdot x^r$$

$$\left(\frac{\tan x}{rx - 1}\right)' = \frac{(\tan^r x + 1)(rx - 1) - r \tan x}{(rx - 1)^2}$$

$$(-re^x + \ln x)' = -re^x + \frac{1}{x}$$

$$y' = \left(\frac{1}{\ln x}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = -\frac{1}{x \ln^2 x}$$

$$\left(r \sin^{-1} x + x^r\right)' = \frac{r}{\sqrt{1-x^2}} + rx^{r-1}$$

مثال. در تابع $f(x) = \sin x \cdot e^x$ ، $f'(\circ)$ را بیابید.

حل.

$$f'(x) = \cos x \cdot e^x + e^x \cdot \sin x$$

$$f'(\circ) = 1$$

مثال. اگر $y = x^r \cot x$ ، $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

حل.

$$\frac{dy}{dx} = rx \cot x - x^r \csc^2 x$$

مشتق قدر مطلق و جزء صحیح

$$(|x|)' = \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0$$

$$([x])' = 0, \quad x \in R - Z$$

مثال. مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x} \cdot |x|$ را بیابید.

حل.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot |x| + \sqrt{x} \cdot \frac{x}{|x|}$$

مشتق تابع مرکب

قضیه مشتق تابع مرکب (قاعده زنجیری). فرض کنیم $y = f(u)$ تابعی مشتق پذیر از u و $u = u(x)$ تابعی مشتق پذیر از x باشد، در این صورت مشتق تابع f نسبت به x به صورت ذیل است:

$$f'(u(x))_x = f'(u) \cdot u'(x)$$

به عبارت دیگر:

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$$

توجه. قاعده زنجیری برحسب نماد دیگر مشتق، به صورت ذیل تبدیل می شود:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال. مشتق تابع $y = (4x - 1)^9$ را بیابید.

حل. قرار می دهیم: $u = 4x - 1$ پس: $y = u^9$

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$$

$$y' = 9u^8 \cdot (4) = 36(4x - 1)^8$$

نکته: هرگاه $y = f(u(x))$ ، بنابه قاعده زنجیری به تمام فرمول‌های مشتق، ضریب $u'(x)$ اضافه می‌گردد.

مثال. مشتق تابع $y = \sqrt{x^3 - 1}$ را بیابید.

حل.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^3 - 1}} \cdot 3x^2$$

مثال. مشتق تابع $y = \sin(x^4 + 5x)$ را بیابید.

حل.

$$y' = \cos u \cdot u'$$

$$y' = \cos(x^4 + 5x) \cdot (4x^3 + 5)$$

مثال. مشتق تابع $y = \ln(8x^3 + 1)$ را بیابید.

حل.

$$y' = \frac{u'}{u}$$

$$y' = \frac{16x}{8x^3 + 1}$$

مثال. مشتق تابع $f(x) = \sin^3 x$ را در نقطه $x_0 = \frac{\pi}{4}$ بیابید.

حل.

$$y' = 3u^2 \cdot u'$$

$$y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

مثال. اگر $y = e^{\sqrt{x+4}}$ ، $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

حل.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x}+4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال. اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin x$ ، مشتق $f \circ g(x)$ را نسبت به x بیابید.

حل.

$$y = f \circ g(x) = \sqrt{\sin x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x$$

مثال. اگر $f'(x) = \frac{1}{x^3+1}$ ، مشتق تابع $f(\sqrt{x})$ را بیابید.

حل. قرار می‌دهیم: $u = \sqrt{x}$ و $y = f(u)$ داریم:

$$y' = f'(u) \cdot u'(x)$$

$$y' = \frac{1}{u^3+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{(\sqrt{x})^3+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مشتق مراتب بالاتر

اگر $y = f(x)$ ، مشتق مراتب بالاتر f به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$f'(x)$ مشتق مرتبه‌ی اول f

$f''(x) = (f'(x))'$ مشتق مرتبه‌ی دوم f

$f^{(3)}(x) = (f''(x))'$ مشتق مرتبه‌ی سوم f

$\vdots$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ مشتق مرتبه‌ی n ام f

توجه. مشتق مراتب بالاتر بر حسب نماد $\frac{df}{dx}$ به صورت ذیل است:

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

مثال. اگر $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 4$ مشتق مرتبه سوم f را بیابید.
حل.

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 18x - 2$$

$$f^{(3)}(x) = 24x - 18$$

مثال. اگر $f(x) = \ln x$ ، $f''(2)$ را بیابید.
حل.

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(2) = -\frac{1}{4}$$

مثال. مشتق مرتبه‌ی صدم تابع $f(x) = e^{2x}$ را در نقطه $x = 0$ بیابید.
حل.

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

$$f''(x) = 4e^{2x} = 2^2 e^{2x}$$

$$f^{(r)}(x) = \lambda e^{rx} = r^r e^{rx}$$

⋮

$$f^{(100)}(x) = r^{100} e^{rx}$$

$$f^{(100)}(0) = r^{100}$$

دیفرانسیل تابع

فرض کنیم $y = f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد، دیفرانسیل این تابع را با dy نشان می‌دهند و به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$dy = f'(x)\Delta x$$

مثال. دیفرانسیل تابع $y = x^4$ را بیابید.

حل.

$$dy = y' \cdot \Delta x = 4x^3 \cdot \Delta x$$

اگر تعریف دیفرانسیل را برای متغیر مستقل x بکار ببریم، داریم:

$$dx = (x)' \Delta x = \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$$

لذا دیفرانسیل تابع $y = f(x)$ برابر است با:

$$dy = f'(x)dx$$

دیفرانسیل چند تابع در ذیل حساب شده است:

$$d(4x^3 - 6x) = (12x^2 - 6)dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx$$

$$d\left(\frac{1}{x} + 4x\right) = \left(-\frac{1}{x^2} + 4\right)dx$$

مثال. اگر $f(x) = x^4 - x$ ، دیفرانسیل f را در نقطه $x = 1$ حساب کنید.

حل.

$$df = f'(x)dx$$

$$df = (4x^3 - 1)dx$$

به ازای $x = 1$ داریم:

$$df = 3dx$$

۱۵۰ پیوست

مثال. اگر $y = x^2 - 2x$ ، دیفرانسیل y را به ازای $x = 2$ ، $\Delta x = 0.1$ حساب کنید.
حل.

$$dy = y' \Delta x$$

$$dy = (2x - 2) \Delta x$$

به ازای $x = 2$ و $\Delta x = 0.1$ داریم

$$dy = 2 \times 0.1 = 0.2$$

منابع

- استوارت، جیمز: حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمه ارشک حمیدی، تهران: موسسه‌ی فرهنگی فاطمی، ۱۳۸۸
- بلوم، دیوید: جبر خطی و هندسه، ترجمه محمد حسین بیژن زاده و حسین صدیقی، تهران: انتشارات علامه طباطبائی، ۱۳۶۸
- پورکاظمی، محمد حسین: ریاضیات برای اقتصاد و مدیریت، تهران: نشر نی، ۱۳۸۵
- توماس، جرج.بی: حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ترجمه علی اکبر عالم زاده، تهران: انتشارات پژوهش، ۱۳۷۶
- سیلورمن، ریچارد: حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ترجمه علی اکبر عالم زاده، تهران: انتشارات علمی و فنی، ۱۳۶۸
- کریمی، فرزاد: کاربرد ریاضیات و کاربرد آن در اقتصاد و مدیریت، اصفهان: انتشارات جهاد دانشگاهی، ۱۳۸۲
- لیتهدل، لوئیس: حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ترجمه علی اکبر عالم زاده، تهران: موسسه‌ی نشر علوم نوین، ۱۳۷۰
- نیکوکار، مسعود: ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۲)، تهران: نشر فرناز، ۱۳۷۷
- هافمن، کنت: جبر خطی، ترجمه جمشید فرشیدی، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۱

